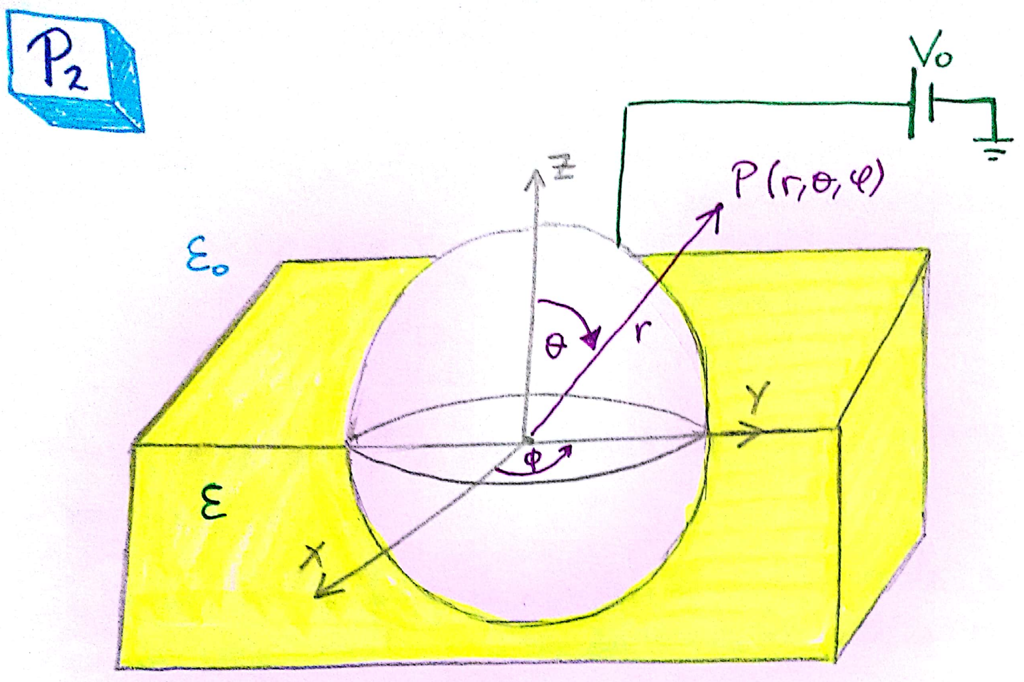


A] Potencial eléctrico.

Hint: El potencial sólo depende de la distancia al centro de la esfera

$$\rightarrow \boxed{V(r) = \phi(r)}$$

Por otro lado, asumiendo equilibrio electrostático, se tendrá que el campo eléctrico $\vec{E}(r)$, lo podemos obtener a partir de...

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0 \implies \vec{E} = -\nabla\phi}$$

NOTAR QUE:

$\vec{E}$ // interfaz

$\Downarrow$

$\underbrace{E_{1t}}_{\text{líquido}} = \underbrace{E_{2t}}_{\text{vacío}} = E$

Caso $r<a$

Por tratarse de una esfera conductora, se tiene que:

$$\boxed{\vec{E}(r<a) = 0} \implies -\nabla\phi(r) = 0 \implies \phi(r<a) = cte.$$

¿Qué constante?

Dada la continuidad del potencial, se debe cumplir que:

$$\boxed{\phi(r<a) = \phi(r=a^+) = V_0} \leftarrow \text{fijado por la fuente.}$$

Entonces,

$$\vec{E}(r<a) = 0 \rightsquigarrow$$ No hay carga eléctrica neta (libre y polarización) al interior de la esfera.

$$\phi(r<a) = V_0$$

$$\vec{D}(r<a) = 0$$

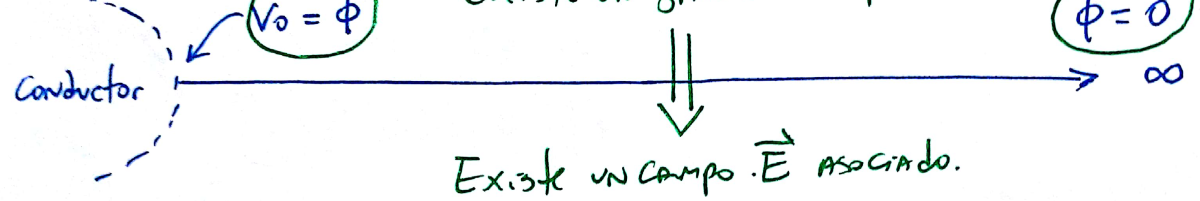
Recuerda: $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0}$

Sabemos que la esfera conductora sí hay carga, además, ésta se distribuye en la superficie.

La carga almacenada en la superficie conductora es la que "provoca" que exista campo eléctrico fuera del conductor. Otra manera de verlo es que sabemos que $\phi(r=a)=V_0$ y tomando como referencia el infinito $\phi(r\to\infty)=0$

Gráficamente...

Existe un gradiente del potencial



$\Downarrow$

Existe un campo $\vec{E}$ asociado.

$\Downarrow$

tenemos carga (a priori, libre y de polarización)

Caso $r>a$

* Consideramos un dieléctrico ideal (no contiene cargas libres) (líquido)

Luego, $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_l = 0$, $\nabla\times E = 0 \rightarrow E = -\nabla\phi$

Usaremos también que $\vec{D} = \epsilon(r)\,\vec{E}(r)$

$\epsilon(r) \downarrow$ permitividad dieléctrica

Usando que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla(\epsilon(r) E(r)) = 0 \Rightarrow \nabla(\epsilon(r) \nabla \phi) = 0$$

separamos por casos:

$$\Rightarrow \text{①} \quad \nabla \cdot (\epsilon_0 \nabla \phi) = 0 \quad , r > a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\Rightarrow \text{②} \quad \nabla (\epsilon \nabla \phi) = 0 \quad , r > a, \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

Como las permitividades ϵ_0 y ϵ son constantes en su respectivo semiespacio éstas pueden salir de la divergencia y se concluye que el potencial verifica o cumple la ec. de Laplace, tanto en el vacío como en el líquido dieléctrico.

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi(r) = 0 \quad , \forall r > a$$

Del enunciado $\phi = \phi(r)$

Condiciones:

$\phi(r=a) = V_0$

$\phi(r \to \infty) = 0$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{d\phi}{dr}\right) = 0 \Rightarrow r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} = A = cte.$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{A}{r^2} \Big/ \int \Rightarrow \boxed{\phi(r) = A\left[\frac{-1}{r}\right] + B}$$

Determinamos las constantes

$$\phi(r \to \infty) = B = 0 \to \boxed{B = 0}$$

$$\phi(r=a) = \frac{-A}{a} = V_0 \to \boxed{A = -V_0 a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r) = \frac{V_0 a}{r}} \quad (r > a)$$

$$\boxed{\phi(r) = V_0} \quad (r < a)$$

B] Campo eléctrico y Desplazamiento en todo el espacio.

De la parte ⓐ, teníamos que.

$$\boxed{\vec{E}(r<a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D}(r<a) = 0}$$

Para $r>a$, usaremos el potencial para $r>a$.

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = -\nabla\phi(r>a) = -\frac{d\phi}{dr}\hat{r} = \frac{V_0 a}{r^2}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r>a) = \frac{V_0 a}{r^2}\hat{r}}$$

Asumiendo dieléctricos lineales, y recordando que.

$$E_1 = E_2 = E$$

Los campos son iguales, NO así los desplazamientos, en efecto,

$$\vec{D}(r) = \epsilon(r)\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & , r<a \\ \epsilon_0 \underbrace{\left[\frac{V_0 a}{r^2}\right]}_{E}\hat{r} & , r>a \ \& \ \underbrace{0 \le \theta \le \pi/2}_{\text{vacío}} \\ \epsilon \underbrace{\left[\frac{V_0 a}{r^2}\right]}_{E}\hat{r} & , r>a \ \& \ \underbrace{\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi}_{\text{líquido dieléctrico}} \end{cases}$$

C] Carga libre en la esfera conductora.

Para determinar la carga eléctrica libre total en la esfera conductora, usamos Ley de Gauss en una esfera que encierre a la de radio a.

$$\Longrightarrow \underbrace{Q}_{\text{carga libre total en la superficie de la esfera.}} = \oiint \underbrace{\vec{D}}_{\text{radial}} \cdot d\vec{S} \quad , \quad d\vec{S} = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

$$Q = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \epsilon_0 V_0 \, a \operatorname{sen}\theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \epsilon V_0 \, a \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

* usamos $\vec{D} = \frac{\epsilon_0 V_0 a}{r^2} \hat{r}$ * usamos $\vec{D}_{\text{líquido}} = \frac{\epsilon V_0 a}{r^2} \hat{r}$

$$\boxed{Q = 2\pi (\epsilon_0 + \epsilon) \cdot V_0}$$

D]

• Densidades de carga libre.

Ya dijimos que $\rho_\ell = 0$, pues la carga sólo existe en la superficie conductora.
[Con esto fue que pudimos hacer la parte anterior]

La distribución de carga libre en la superficie conductora tiene relación con la discontinuidad en $r=a$ de $\vec{D}$.

En específico,

$$\sigma_\ell(r=a) = \eta \cdot \left(\vec{D}(r=a^+) - \cancel{D(r=a^-)} \right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_\ell(r=a) = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 V_0}{a} , & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \frac{\epsilon V_0}{a} , & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$= \underset{\hat{r}}{\hat{\eta}} \cdot \vec{D}(r) \Big|_{r=a^+}$$

• Densidades de carga de polarización

Utilizaremos que:

$$\rho_{\text{eléctrica total}}(r) = \rho_{\text{libre}}(r) + \rho_{\text{Polarización}}(r)$$

$$\sigma_{\text{eléctrica total}}(r) = \sigma_e(r) + \sigma_p(r)$$

Ya tenemos las densidades de carga libre.

Por otro lado, las densidades de carga eléctrica total se pueden obtener a partir de la divergencia del campo eléctrico

$$\Rightarrow \nabla(\vec{E}(r)) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\cdot\left[\frac{V_0\, a}{\cancel{r^2}}\right]\right) = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{E}(r) = 0 = \frac{\rho_{e\ \text{total}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho_e = 0}$$

Con esto,

$$\rho_e = 0 = \underbrace{\cancel{\rho_e}}_{\substack{0 \\ \text{(discutido antes)}}} + \rho_{\text{Pol.}} \Rightarrow \boxed{\rho_{\text{Polarización}} = 0}$$

Ahora, las distribuciones superficiales de las cargas de polarización (σ_p)

Nuevamente, calculamos las densidades superficiales de carga eléctrica total que aparecen producto de las discontinuidades del campo eléctrico.

$\vec{E}$ sufre un salto en $r=a$, pasa de 0 a un valor constante.

Entonces, la expresión queda como sigue.

$$\sigma_e = \epsilon_0 \cdot n \left(E(r=a^+) - \underbrace{\cancel{E(r=a^-)}}_{0} \right)$$

$$\rightarrow \quad \sigma_e = \epsilon_0 \left(\frac{V_0}{a} \right) \qquad \forall \theta$$

La distribución de carga de polarización en la superficie de contacto entre los medios dieléctricos y la esfera conductora, se obtiene de:

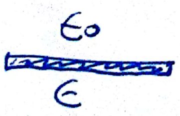
$$\sigma_e = \sigma_\ell + \sigma_p \quad \rightarrow \quad \sigma_p = \sigma_e - \sigma_\ell$$

Así,

$$\sigma_{\text{Polarización}} = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_0 V_0}{a} - \underbrace{\dfrac{\epsilon_0 V_0}{a}}_{\substack{\sigma_{\text{libre}} \\ \text{vacío}}} = 0 , & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\[2ex] \dfrac{\epsilon_0 V_0}{a} - \underbrace{\dfrac{\epsilon V_0}{a}}_{\substack{\sigma_{\text{libre}} \\ \text{líquido.}}} = \dfrac{V_0}{a}(\epsilon_0 - \epsilon) , & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Observación:

Podría existir carga de polarización en la interfaz de los dieléctricos



Pero, al tratarse de dieléctricos ideales, No habrá carga libre en dichas superficies

Además, en la interfaz se tendrá

$$\sigma_p = \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma_\ell = 0}}{\sigma_e} = \epsilon_0 \cdot \hat{n} \left(E\left(\theta = \tfrac{\pi}{2}^+\right) - E\left(\theta = \tfrac{\pi}{2}^-\right) \right) = 0$$

E] Energía Almacenada.

Tenemos los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$, entonces, podemos obtener la energía integrando la densidad de energía u_e, que estará dada por:

$$u_e = \begin{cases} 0 & r<a \\ \frac{1}{2} E\cdot D & r>a \end{cases} \Rightarrow U_e = \frac{1}{2}\int_{r>a} E\cdot D \, \underbrace{dV}_{\text{esféricos}}$$

$$dV_{\text{esféricas}} = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\phi \, d\theta$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{\epsilon_0 V_0^2 a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_a^{\infty} \frac{1}{r^2} dr + \frac{\epsilon V_0^2 a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$\rightarrow \boxed{U_e = \pi(\epsilon_0 + \epsilon) a V_0^2}$$

f]

Ahora la esfera estará rodeada solo de vacío

$\Rightarrow$ La carga libre seguirá estando solo en su superficie, pero quedará determinada por:

$$Q' = \sigma_{libre} \cdot 4\pi r^2 \Big|_{r=a} = \left[\frac{\epsilon_0 V_0}{\cancel{a}}\right] \cdot 4\pi \cancel{a^2}^{\,a} = \boxed{4\pi a \epsilon_0 V_0 = Q'}$$

Así, la nueva energía queda determinada por:

$$U_e' = \frac{1}{2} V_0 Q' = \frac{1}{2} C' V_0^2 = \boxed{2\pi \epsilon_0 a V_0^2 = U_e'}$$

$\therefore$ $$\Delta U_e = \underbrace{U_e'}_{\text{sin líquido}} - \underbrace{U_e}_{\text{con líquido}} = 2\pi \epsilon_0 V_0^2 - \pi(\epsilon_0 + \epsilon) a V_0^2 = \pi(\epsilon_0 - \epsilon) a V_0^2$$

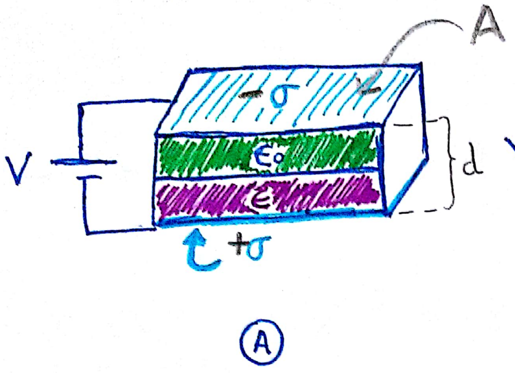
$$\Delta U_e = \pi(\epsilon_0 - \epsilon) a V_0^2 < 0$$

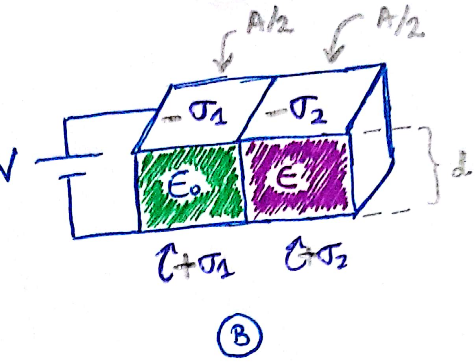
$$\Downarrow$$

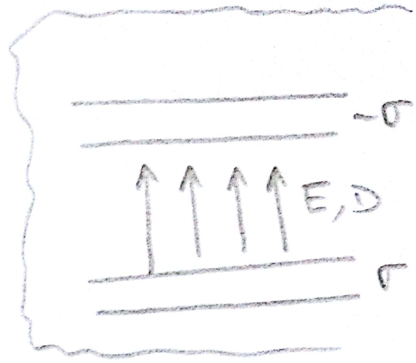
Al retirar el líquido, disminuye la energía del sistema.

Pregunta 1

Casos a estudiar:







A] Capacitancia en cada caso (con y sin dieléctrico

→ SIN DIELÉCTRICO:

Sabemos que para este tipo de Condensadores (placas paralelas), la capacitancia puede expresarse como:

$$\boxed{C_{\substack{\text{sin}\\\text{dieléctrico}}} = \frac{A\cdot\epsilon_0}{d}}$$

A → Área placa

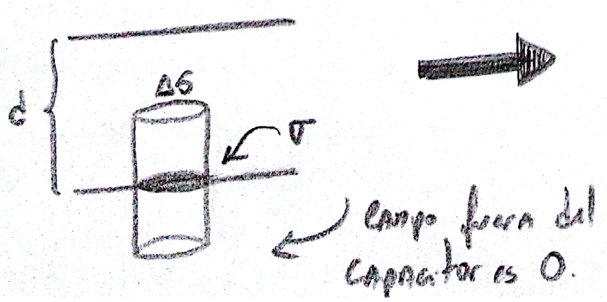
d → distancia entre placas

* DIELÉCTRICO HORIZONTAL (A)

Obs: Queremos obtener $\vec{E}$, para calcular ΔV y con eso obtener C.

⇒ En primer lugar, nos debemos percatar que el vector desplazamiento tiene la forma:

$\vec{D} = D\hat{k}$ * Despreciamos efectos de borde. ($A_{placa} \gg d$)



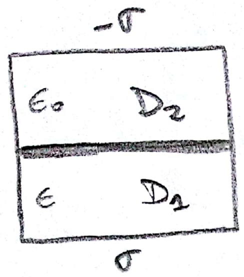
$D\cdot\Delta S = \sigma\cdot\Delta S \Rightarrow D = \sigma$ $\therefore$ $\boxed{\vec{D} = \sigma\hat{k}}$

Interfaz de los medios es perpendicular al campo eléctrico y a $\vec{D}$

$\Rightarrow \boxed{D_{n1} - D_{n2} = \sigma_\ell}$

Luego

$$D_1 - D_2 = \sigma_l = 0$$



interfaz $\sigma_l = 0$

$$\Rightarrow D_1 = D_2 = \sigma \hat{k}$$

$\therefore$ $\vec{D}$ es igual en ambos medios

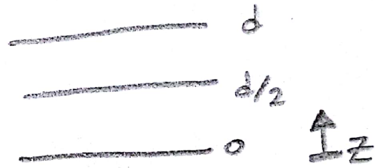
Ahora obtenemos $\vec{E}$, usamos $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \vec{D}$

$$\underset{(\epsilon_0)}{\vec{E}_1} = \frac{D}{\epsilon_0}\hat{k} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{k}$$

$$\underset{(\epsilon)}{\vec{E}_2} = \frac{D}{\epsilon}\hat{k} = \frac{\sigma}{\epsilon}\hat{k}$$

Ahora calculamos la diferencia de potencial.

* Como referencia $V(d) = 0$ ¡ Arbitrario
$V(0) = \Delta V$



$$\Rightarrow V(d) - V(0) = -\Delta V = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{z} = -\left[\int_0^{d/2} \frac{\sigma}{\epsilon} dz + \int_{d/2}^{d} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz\right]$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot (d/2) + \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d - d/2)$$

$$= \frac{\sigma d}{2\epsilon} + \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma d}{2}\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma d}{2}\left(\frac{\epsilon_0 + \epsilon}{\epsilon \cdot \epsilon_0}\right)$$

$$\Rightarrow C_{horizontal} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma \cdot A}{\Delta V} = \frac{\cancel{\sigma} A}{\cancel{\sigma} d} \frac{2(\epsilon \cdot \epsilon_0)}{(\epsilon_0 + \epsilon)} = \frac{2A(\epsilon \cdot \epsilon_0)}{d(\epsilon + \epsilon_0)}$$

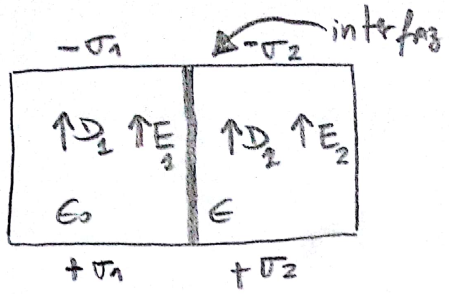
Están en serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C_{eq} = \therefore$$

$$\boxed{C_{horizontal} = \frac{2A}{d}\left(\frac{\epsilon \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}\right)}$$

$C_1 = \frac{A}{d/2} \cdot \epsilon$; $C_2 = \frac{A}{d/2} \cdot \epsilon_0$

* DIELÉCTRICO VERTICAL:



* La interfaz es paralela al campo eléctrico

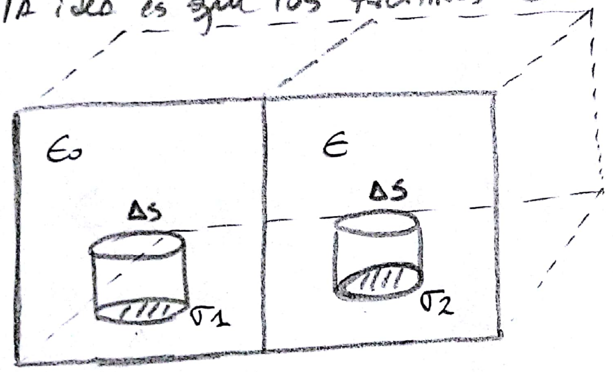
$$\Rightarrow \boxed{E_{1t} = E_{2t} = E}$$

Nuevamente, fijamos $V(d) = 0$
$V(0) = \Delta V$

$$\Rightarrow -\Delta V = -\int_0^d E\,dz = -E \cdot d \Rightarrow \boxed{\Delta V = E \cdot d}$$

Hay un solo campo

Resta calcular Q, trataremos de encontrar una expresión para Q en función de E (la idea es que los términos se cancelen).

$\Rightarrow$ 

$$\Rightarrow Q = \sigma_1\left(\frac{A}{2}\right) + \sigma_2\left(\frac{A}{2}\right)$$

Falta encontrar σ_1 y σ_2

$$\oiint_{\text{medio 1}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre} = \sigma_1 \cdot \Delta S$$

$$D \cdot \cancel{\Delta S} = \sigma_1 \cancel{\Delta S}$$

$$\Rightarrow D_1 = \sigma_1$$

Análogamente $\Rightarrow D_2 = \sigma_2$

Luego, $Q = \frac{A}{2}\left[D_1 + D_2\right]$

usando $\vec{D} = \epsilon \cdot \underbrace{\vec{E}}_{\text{mismo}} \rightarrow D_1 = \epsilon_0 E$
$D_2 = \epsilon E$ $\Rightarrow Q = \frac{A}{2} E (\epsilon_0 + \epsilon)$

Teniendo Q en función del módulo del campo, obtenemos C.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{A\frac{\cancel{E}}{2}(\epsilon_0 + \epsilon)}{\cancel{E}\cdot d} = \frac{A(\epsilon_0+\epsilon)}{2d}$$

Forma Alternativa

Paralelo $\Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2$

$$C_{eq} = \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{d}\epsilon_0 + \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{d}\cdot\epsilon$$

$$= \frac{A}{2d}(\epsilon_0+\epsilon)$$

$$\boxed{C_{vertical} = \frac{A(\epsilon_0+\epsilon)}{2d}}$$

↳ Propuesto, encontrar σ_1 y σ_2 en función de ϵ, ϵ_0, Q y A.

Comparamos con $C_{\text{sin dieléctrico}}$

$$\Rightarrow \frac{C_{Horizontal}}{C_{sin\ diel.}} = \frac{\frac{2\cancel{A}}{\cancel{d}}\left(\frac{\epsilon\cdot\cancel{\epsilon_0}}{\epsilon+\epsilon_0}\right)}{\frac{\cancel{A}\cancel{\epsilon_0}}{\cancel{d}}} = \frac{2\epsilon}{\epsilon+\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{vertical}}{C_{sin\ diel.}} = \frac{\frac{\cancel{A}(\epsilon_0+\epsilon)}{2\cancel{d}}}{\frac{\cancel{A}\epsilon_0}{\cancel{d}}} = \frac{\epsilon_0+\epsilon}{2\epsilon_0}$$

B] Vectores $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{P}$

$\vec{E}$ y $\vec{D}$ se calcularon en la parte anterior.

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$$

		$\vec{E}$	$\vec{D}$	$\vec{P}$
Horizontal	C/dieléctrico	$\frac{2V}{d}\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon+\epsilon_0}\right)\hat{k}$	$\frac{2V\epsilon_0\epsilon}{d(\epsilon+\epsilon_0)}\hat{k}$	$\frac{2V\epsilon_0}{d}\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+\epsilon_0}\right)\hat{k}$
	S/dieléctrico (Aire)	$\frac{2V}{d}\left[\frac{\epsilon}{\epsilon_0+\epsilon}\right]\hat{k}$	$\frac{2V\epsilon\cdot\epsilon_0}{d(\epsilon+\epsilon_0)}\hat{k}$	0
Vertical	C/dieléctrico	$\frac{V}{d}\hat{k}$	$\frac{\epsilon V}{d}\hat{k}$	$\frac{V(\epsilon-\epsilon_0)}{d}\hat{k}$
	S/dieléctrico (Aire)	$\frac{V}{d}\hat{k}$	$\epsilon_0\frac{V}{d}\hat{k}$	0

* Horizontal sin dieléctrico.

$$V = \frac{\sigma d}{2}\left(\frac{\epsilon_0+\epsilon}{\epsilon\epsilon_0}\right) \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2V\epsilon\cancel{\epsilon_0}}{d(\epsilon_0+\epsilon)\cdot\cancel{\epsilon_0}}$$

$$\sigma = \frac{2V(\epsilon\epsilon_0)}{d(\epsilon_0+\epsilon)} \qquad E = \frac{2V}{d}\left[\frac{\epsilon}{\epsilon_0+\epsilon}\right]$$

* Horizontal con dieléctrico.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{2V(\cancel{\epsilon}\epsilon_0)}{d(\epsilon_0+\epsilon)\cdot\cancel{\epsilon}} = \frac{2V\epsilon_0}{d(\epsilon_0+\epsilon)}$$

* Vertical Dieléctrico

$$Q = \frac{A}{2}E(\epsilon_0+\epsilon), \quad V = E\cdot d \rightarrow E = \frac{V}{d}, \quad \vec{D} = \epsilon\cdot E \rightarrow D = \epsilon\frac{V}{d}$$

$$\rightarrow E = \frac{2Q}{A(\epsilon_0+\epsilon)}$$

* Vertical sin dieléctrico.

$\epsilon \rightarrow \epsilon_0$

$$E = \frac{V}{d}, \quad D = \epsilon_0\frac{V}{d}$$