

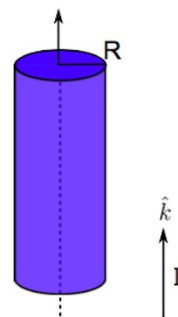


Pauta Auxiliar 10

Dado que es un cascanón, tendremos corriente SOLAMENTE en la superficie exterior.

NO es un cilindro macizo.

Distinguimos 2 casos de importancia, $r > R$ y $r < R$.



Caso $r < R$

Para hacer uso de la Ley de Ampère, calculamos la corriente enlazada por la circunferencia de radio r , con eje en el centro del cilindro de radio R .

$$\Rightarrow I_{\text{enlazada}} = 0 \quad (r < R) \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r \cdot B = \mu_0 I_{\text{enlazada}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = 0 \hat{\phi}}$$

Caso $r > R$

$\vec{K} = \frac{I}{2\pi R} \hat{k} = K_0 \hat{k} \Rightarrow I_{\text{enlazada}} = 2\pi R \cdot K_0$

densidad superficial de corriente. Luego.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B = (2\pi R K_0) \mu_0$$

$$\Rightarrow B = \frac{2\pi R K_0 \mu_0}{2\pi r} = \frac{\mu_0 K_0 R}{r} \hat{\theta} = \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\mu_0 K_0 R}{r} \hat{\theta}, & r > R. \end{cases}$$

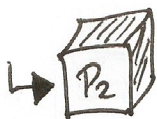
Recordo

$$I = \int_{\Gamma} \vec{K} \cdot \vec{n}_1 d\ell$$

vector tangente a la superficie y normal a la curva Γ

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{K_0 R}{r} \hat{\theta}}$$

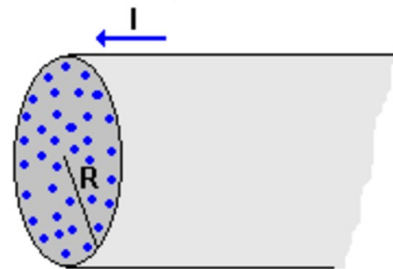


Ahora tenemos una situación similar para un cilindro macizo.

Necesariamente estudiaremos los 2 casos, $r > R$ y $r < R$

Caso $r < R$.

Veamos la corriente enlazada.



$\Rightarrow$ Corresponde a una fracción de la corriente total I .

$$I_{\text{enlazada}} = I \cdot \left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \right) = I \left(\frac{r^2}{R^2} \right)$$

$\downarrow$ sólo una parte de la corriente I está encerrada por la trayectoria.

Otra forma de verlo.

Como la corriente está uniformemente distribuida. $J = \frac{I}{\pi R^2}$

La sección transversal que queda dentro de la circunferencia elegida tiene un área de πr^2 , entonces, la corriente encerrada es.

$$I_{\text{enlazada}} = \int J \cdot \hat{n} dA = J \int dA = J \cdot \pi r^2 = \left(\frac{I}{\pi R^2} \right) \cdot \pi r^2 = I \left(\frac{r^2}{R^2} \right)$$

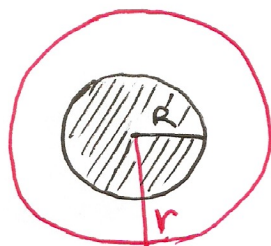
Luego, como.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_{\text{enlazada}} \Rightarrow 2\pi r \cdot B = \mu_0 \cdot I \left(\frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I \cdot r^2}{2\pi r R^2} \Rightarrow \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \hat{\theta} = \vec{B}_{r < R}$$

Caso $r > R$

Para este caso



La sección elegida abarca toda la corriente

$$\Rightarrow I_{\text{encerrada}} = I.$$

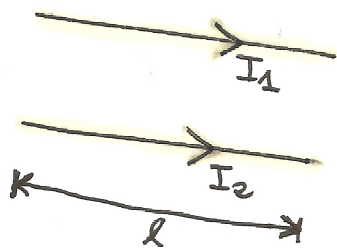
$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encerrada}} \Rightarrow 2\pi r \cdot B = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta} \quad r > R}$$

P3

Sabemos que la Fuerza magnética que el conductor 2 ejerce sobre el 1 es:

$$\vec{F}_1 = I_1 \int_r d\vec{r} \times \vec{B}_2 \quad \rightarrow \text{campo debido a la corriente } I_2.$$



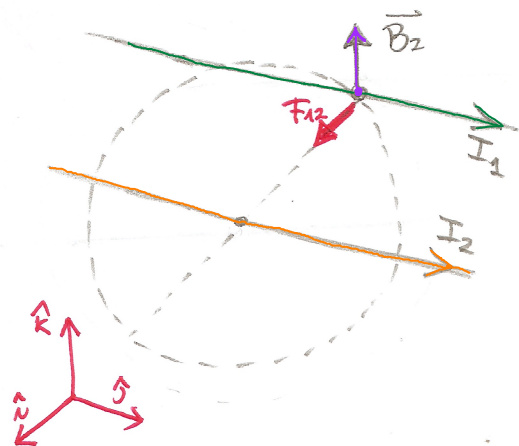
Vamos a calcular la fuerza que el conductor 2 ejerce sobre el 1, entonces, calcularemos el campo magnético que siente el conductor 1 por efecto de la corriente I_2 .

Sabemos que el campo magnético producido por una corriente I en un alambre infinito está dado por:

$$\vec{B}_{\text{hilo infinito}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad \rightarrow \text{El campo magnético en cada punto del alambre con } I_1, \text{ producida por el alambre con corriente } I_2 \text{ está dado por:}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \hat{\phi} \quad (r=a)$$

Gráficamente



$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi a} \hat{k} \quad (r=a)$$

Para un punto P arbitrario sobre el conductor 1 el campo estará dado por la siguiente expresión. Notamos que $\hat{\phi} = \hat{k}$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= I_1 \int_0^l d\vec{l} \times \vec{B}_2 \\ &= I_1 l \hat{j} \times \left(\frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi a} \hat{k} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \cdot l}{2\pi a} \hat{i}$$

Propongo: demostrar que

$$F_{12} = -F_{21}$$

NOTAR:

Los conductores se atraerán si las corrientes I_1 e I_2 tienen igual signo.

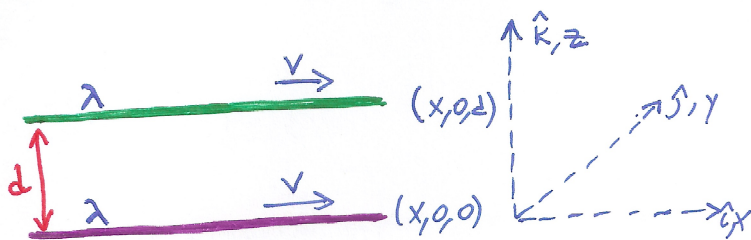
" " " repelerán si tienen signo contrario.

en el punto
de la
gráfica 1

$$\vec{B} = \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \vec{L}$$

P4



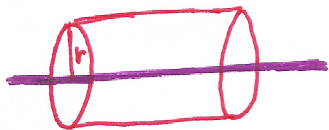
Consideramos que el cable inferior está ubicado en $(x, 0, 0)$, mientras que el superior en $(x, 0, d)$.

Lo que vamos a calcular la Fuerza total que se ejerce sobre el cable de arriba.

En particular, la fuerza eléctrica y magnética que el cable inferior ejerce sobre el de arriba, luego imponeremos que este sea cero, para encontrar la velocidad que logre tal condición.

⇒ Fuerza eléctrica que el cable inferior ejerce sobre el superior.

Para esto, calculamos el campo eléctrico usando Ley de Gauss, con un cilindro coaxial de altura L y radio r .



Dado que el campo es radial.

$$\Phi = \underbrace{2\pi r L}_{\text{Area lateral}} \cdot E = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

luego, como el otro cable (superior)

está a una distancia d , la fuerza que siente el cable sup., por "culpa" del inferior es:

$$F = q \cdot E = \lambda \cdot L \left(\frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \right) = \frac{\lambda^2 \cdot L}{2\pi r \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow F_{\text{eléctrica que siente el cable superior por acción del inferior (por unidad de largo)}} = \frac{\lambda^2}{2\pi d \epsilon_0} \hat{k}$$

imponemos $r = d$
 $\hat{r} = \hat{k}$

➡ Fuerza magnética que ejerce el conductor inferior sobre el superior

(d que estamos estudiando)

Usamos Ley de Ampère.

Sabemos (por la pregunta anterior) que el campo magnético producido por una corriente I es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow 2\pi r \cdot B = \mu_0 I$$

Pero... , necesitamos relacionar esto con la velocidad. Entonces

Como: $I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \Rightarrow \boxed{I = \lambda v}$

Reemplazando...

$$2\pi r B = \mu_0 \cdot \lambda \cdot v \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \hat{\theta}}$$

Nos interesa saber que pasa justo cuando este campo llega al conductor superior.

$$\Rightarrow r = d \quad \& \quad \hat{\theta} = -\hat{j}$$

Luego $\boxed{\vec{B}^* = -\frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi d} \hat{j}}$

Por lo tanto, la fuerza que siente el cable superior, por unidad de largo de dicho cable es:

$$\vec{F} = \int_x^{x+1} I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B}^* = \int_x^{x+1} \underbrace{\lambda \cdot v}_I \underbrace{\hat{i} dx}_{d\vec{\ell}} \times \left(\frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi d} [-\hat{j}] \right) = \lambda v \cdot 1 \hat{i} \times \left(\frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi d} [-\hat{j}] \right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{magnética}} = \frac{-\lambda^2 v^2 \mu_0}{2\pi d} [\hat{k}]}$$

Además,

$$\vec{F}_{\text{Total sobre conductor superior}} = F_e + F_m = \frac{\lambda^2}{2\pi d \epsilon_0} \hat{k} - \frac{\lambda^2 v^2 \mu_0}{2\pi d} \hat{k} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\lambda^2}}{2\pi d \epsilon_0} = \frac{\cancel{\lambda^2} v^2 \mu_0}{2\pi d} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} = v^2 \mu_0 \Rightarrow v^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\therefore \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}$$

Si se reemplazan los valores se obtiene que $v = 2,99 \times 10^8 \text{ [m/s]}$
lo cual corresponde a la velocidad de la luz, por lo tanto, NUNCA
pueden ir suficientemente rápido como para que la Fuerza magnética
equipare a la eléctrica

○ FANTÁSTICO. //

P5

$$\vec{J} = \frac{\alpha}{r} \cdot \hat{\phi} + \beta \cdot \hat{k} = J_{\phi} + J_k$$

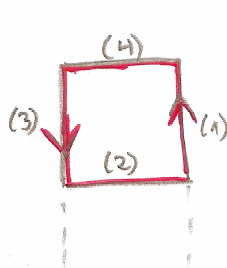
genera un campo
magnético en $\hat{k}$

genera un campo
magnético en $\hat{\phi}$

Tendremos tres zonas $\begin{cases} r < a \\ a < r < b \\ r > b \end{cases}$

Caso $r > b$

* Para el campo producido por J_{ϕ}



Vista en corte.

Para J_{ϕ}

$$\vec{B} = B(r) \hat{z}$$

(por regla de la mano derecha)

↓
Sólo nos sirven las componentes (1) y (3)
(2) y (4) no nos aportan.

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 \cdot l - B_3 \cdot l = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow B_1 = B_3 = B_k$$

Como en el infinito el campo magnético debeser nulo
¿por qué?

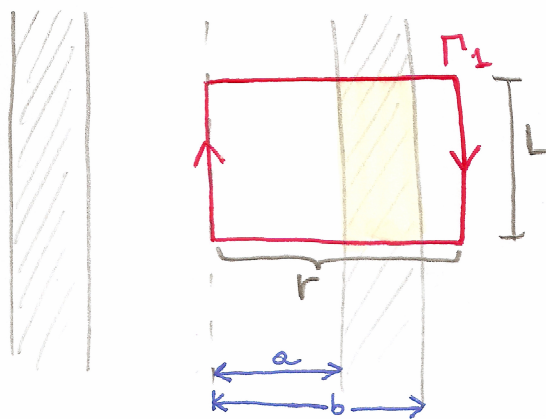
↳ Por tratarse de un cilindro infinito, del tipo cerrado.

El campo se generará sólo al interior del mismo.

$$B_k(r > b) = 0$$

demostración
Atrás //

Otra forma sería...



$$\Rightarrow \oint_{\Gamma_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iiint \vec{J}_0 \cdot \hat{\theta} \cdot dr dz \hat{\theta} = \mu_0 \iiint J_0 dr dz = \mu_0 \int_a^b \int_0^L \frac{\alpha}{r} dr dz$$

$$\Rightarrow \left[\underset{\uparrow}{B_1(0)} - B_1(r) \right] \cdot L = \mu_0 \alpha L \int_a^b \frac{1}{r} dr = \alpha \mu_0 L \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{B_1(0) - B_1(r) = \alpha \mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Nos interesa $B_1(r)$, para ello requerimos de $B_1(0)$.

USAMOS Biot savart.

$$\vec{B}_1(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z: -\infty}^{\infty} \int_{\theta: 0}^{2\pi} \int_{r: a}^b \frac{\frac{\alpha}{r} \hat{\theta} [r dr d\theta dz] \times (0 - (r\hat{r} - z\hat{z}))}{(r^2 + z^2)^{3/2}} =$$

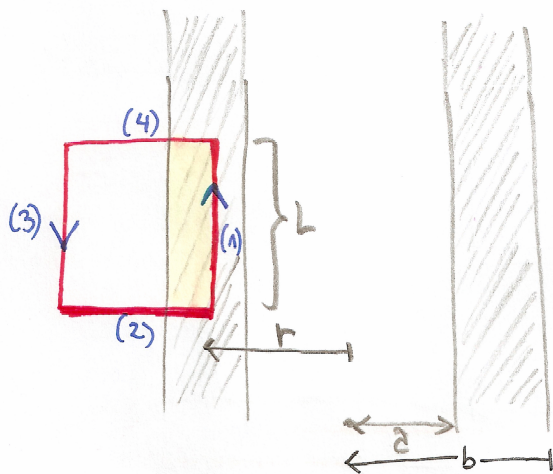
Propuesto

$$\vec{B}_1(0) = \mu_0 \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{z}, \text{ Con esto.}$$

$$B_1(0) - \alpha \mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right) = B_1(r) = \mu_0 \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \mu_0 \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_1(r) = 0 \cdot \hat{r}}$$

Ahora, el campo magnético, producto de J_0 , para $a < r < b$



Aprovechamos que sabemos que

$$\vec{B}_1(r > b) = 0$$

$$\oint \vec{B}_k \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_{enc.}$$

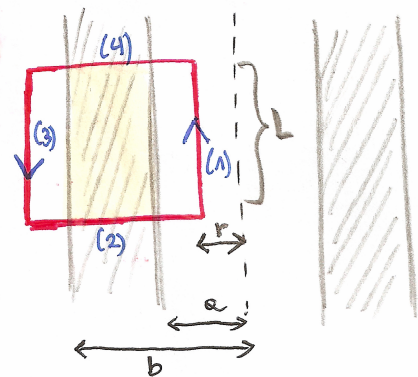
$$\Rightarrow [B_{2k}(a < r < b) - \cancel{B_{2k}(r > b)}] \cdot L = \mu_0 \cdot I_{enc.}$$

$$\Rightarrow B_{2k}(a < r < b) = \frac{\mu_0}{L} \cdot I_{enc} = \frac{\mu_0}{L} \cdot \left[\int_0^L \int_r^b \frac{\alpha}{r} \cdot dr dz \right]$$

$$\Rightarrow B_{2k}(a < r < b) = \frac{\mu_0}{k} \cdot \alpha \cdot k \cdot \int_r^b \frac{1}{r} dr = \mu_0 \alpha \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{2k}(a < r < b) = \mu_0 \alpha \ln\left(\frac{b}{r}\right) \hat{k}}$$

Último caso, $r < a$ / Nuevamente nos aprovechamos de que sabemos que $\vec{B}_1(r > b) = 0$



$$\oint \vec{B}_{3k} \cdot d\vec{\ell} = [B_{3k}(r < a) - \cancel{B_{3k}(r > b)}] \cdot L = \mu_0 \cdot I_{enc}$$

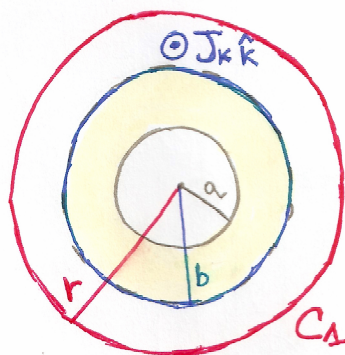
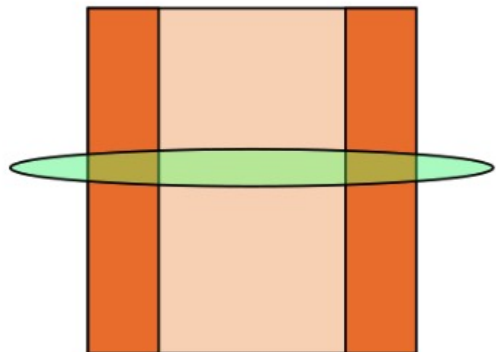
$$B_{3k}(r < a) = \frac{\mu_0}{L} \cdot I_{enc} = \frac{\mu_0}{L} \cdot \left[\int_0^L \int_a^b \frac{\alpha}{r} \cdot dr dz \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{k} \cdot \alpha \cdot k \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \mu_0 \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{3k}(r < a) = \mu_0 \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{k}}$$

Ya estamos casi listos, al menos con los campos producidos por $\vec{J}_0$
 Ahora veamos las contribuciones de $\boxed{\vec{J}_K = \beta \hat{k}}$

Campo producido corriente J_K

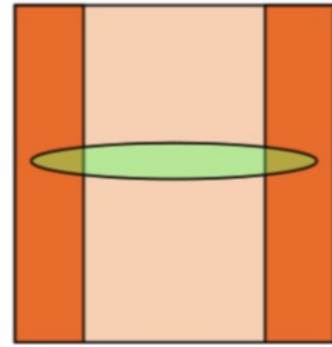
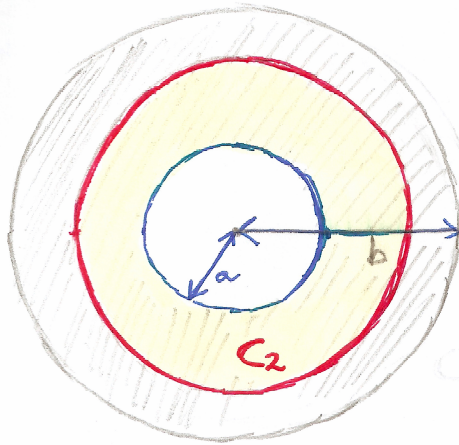


$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{enc} = \mu_0 \cdot \int \int J_K \hat{k} \cdot r dr d\theta \hat{k} = \mu_0 \int_a^b \int_0^{2\pi} \beta r dr d\theta = \mu_0 \beta 2\pi \frac{(b^2 - a^2)}{2}$$

$$\Rightarrow B_{1\theta}(r) \cdot \cancel{2\pi} r = \mu_0 \beta \cdot \cancel{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{1\theta}(r) = \frac{\mu_0 \beta}{2r} (b^2 - a^2) \hat{\theta}}$$

Caso $a < r < b$



$$\oint_{C_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = B_{2\theta} \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{encerrada} = \mu_0 \left[\int_a^r \int_0^{2\pi} \beta \hat{k} \cdot r dr d\theta \right]$$

$$= \mu_0 \cdot \beta \cdot 2\pi \cdot \frac{(r^2 - a^2)}{2} = \mu_0 \beta \pi (r^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow B_{2\theta} \cdot 2\pi r = \mu_0 \beta \pi (r^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{2\theta} = \frac{\mu_0 \beta}{2r} (r^2 - a^2) \hat{\theta}}$$

Caso $r < a$

No existe corriente enlazada... $I_{encerrada} = 0$

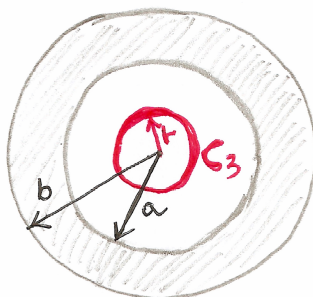
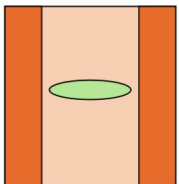
Se ve geométricamente.

$$\oint_{C_3} \vec{B}_{3\theta} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{I_{encerrada}}_0 = 0$$

$$\Rightarrow B_{3\theta} = 0$$

$$\therefore \boxed{\vec{B}_{3\theta} = 0 \cdot \hat{\theta}}$$

Campo producido corriente J_k



Para obtener las expresiones generales por cada zona, considerando las contribuciones de $\vec{J}_\theta$ y $\vec{J}_\kappa$, usamos el principio de superposición

$$\vec{B} = \vec{B}_\kappa + \vec{B}_\theta$$

$$\vec{B}_{\text{total}} = \begin{cases} \vec{B}_{3\theta} + \vec{B}_{3\kappa} = 0 \cdot \hat{\theta} + \mu_0 \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{k} = \mu_0 \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{k}, & r < a \\ \vec{B}_{2\theta} + \vec{B}_{2\kappa} = \frac{\mu_0 \beta (r^2 - a^2)}{2r} \hat{\theta} + \mu_0 \alpha \ln\left(\frac{b}{r}\right) \hat{k}, & a < r < b \\ \vec{B}_{1\theta} + \vec{B}_{1\kappa} = \frac{\mu_0 \beta (b^2 - a^2)}{2r} \hat{\theta} + 0 \cdot \hat{k} = \frac{\mu_0 \beta (b^2 - a^2)}{2r} \hat{\theta}, & r > b \end{cases}$$

FIN //