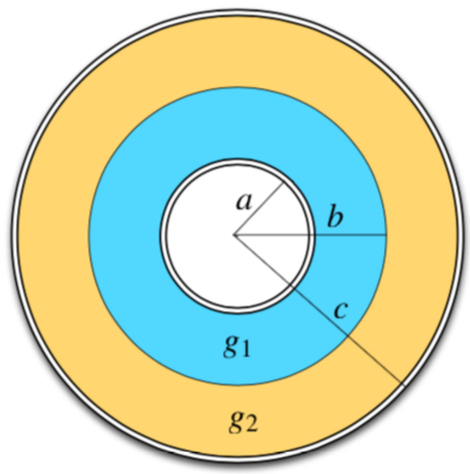
Pauta Auxiliar 6: Dieléctricos, Corriente eléctrica & Circuitos

Fecha: 22 de Abril de 2019

Pregunta 1

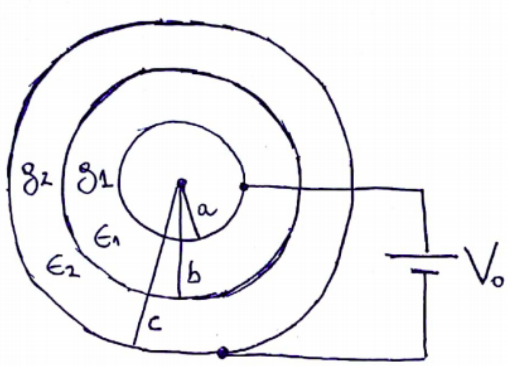
Se tiene un sistema formado por dos casquetes conductores concéntricos conectados a una diferencia de potencial V_0, con $V(a) = V_0$ (la configuración se muestra en la figura). En el espacio interior a las placas se colocan dos medios dieléctricos imperfectos con g_1, ϵ_1 y g_2, ϵ_2 respectivamente.
Considere que se ha alcanzo el régimen estacionario.



- a) Encuentre una expresión para el vector densidad de corriente $\vec{J}$.
- b) Obtenga la expresión para el campo eléctrico entre placas.
- c) Calcule el valor de la resistencia.
- d) Determine la densidad de carga superficial entre los medios.
- e) Por último, calcule la potencia

Pauta Pregunta 1

P1



⊛ Dieléctricos imperfectos

⊛ El sistema ha alcanzado regimen estacionario

$$\hookrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

A] Encontrar $\vec{J}$

Dada la simetría esférica sabemos que $\vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{g} \Rightarrow \vec{J} = J(r)\hat{r}$

Por otro lado,

$$I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{\phi:0}^{2\pi}\int_{\theta:0}^{\pi} J(r)\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$I = \underbrace{J(r)\, r^2}_{\text{salen de la integral}} \left[\underbrace{\int_{\phi:0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \; \underbrace{\int_{\theta:0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{\underbrace{[-\cos\theta]_0^{\pi}}_{2}} \right] = J(r)\, r^2 \cdot 4\pi$$

$$\Rightarrow I = J(r)\, r^2 4\pi \quad \longrightarrow \quad \boxed{J(r) = \frac{I}{4\pi r^2}}$$

B] Campo eléctrico

Obtenido $\vec{J}$, es fácil obtener $\vec{E}$, pero antes debemos encontrar una expresión para I.

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{g} = \frac{I}{4\pi r^2 g}\hat{r}$$

Para encontrar I, usamos el dato de V_0 (dif. de potencial)

$$\Rightarrow V_0 = V(a) - V(c) = -\int_c^a E \cdot dl$$

$$\Rightarrow V_0 = \int_a^b \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} + \int_b^c \vec{E}_2 \cdot \vec{dl}$$

$$\Rightarrow V_0 = \int_a^b \frac{I}{4\pi r^2 g_1} dr + \int_b^c \frac{I}{4\pi r^2 g_2} dr = \frac{I}{4\pi g_1}\left[\frac{-1}{r}\right]_a^b + \frac{I}{4\pi g_2}\left[\frac{-1}{r}\right]_b^c$$

$$\Rightarrow V_0 = I \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi g_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{4\pi g_2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\right]}_{R}$$

* Recordamos que: $V = IR$

Así,

$$\boxed{I = \frac{V_0}{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{g_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{g_2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\right]}}$$

Ahora, se escribe el campo eléctrico como sigue.

$$\vec{E}_1 = \frac{V_0}{4\pi r^2 g_1 \cdot R}\hat{r} \qquad \xrightarrow{\vec{D}=\epsilon\vec{E}} \qquad \vec{D}_1 = \epsilon_1 \cdot \frac{V_0}{4\pi r^2 g_1 R}\hat{r}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{V_0}{4\pi r^2 g_2 R}\hat{r} \qquad\qquad \vec{D}_2 = \frac{\epsilon_2 \cdot V_0}{4\pi r^2 g_2 R}\hat{r}$$

c] Calcular la resistencia.

De la parte anterior, a partir de la expresión de I se obtiene que R está dada por:

$$\boxed{R = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{g_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{g_2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\right]}$$

* PROPUESTO:

USAR

$$\boxed{R = \frac{\int \vec{E}\cdot d\vec{r}}{g \int \vec{E}\cdot d\vec{s}}}$$

d] Densidades de carga superficial entre los medios.

$$\sigma_{libre} = \left[\vec{D}_2(b) - \vec{D}_1(b)\right]\cdot\hat{r}$$

$$= \frac{\epsilon_2 \cdot V_0}{4\pi b^2 g_2 R} - \frac{\epsilon_1 \cdot V_0}{4\pi b^2 g_1 R} = \boxed{\frac{V_0}{4\pi b^2 R}\left(\frac{\epsilon_2}{g_2} - \frac{\epsilon_1}{g_1}\right) = \sigma_{libre}}$$

$$* \; I = \frac{V_0}{R}.$$

E] Calcular la Potencia.

➡ Podemos usar que: * [Propuesto]

$$P = \int \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV$$, como para un material óhmico se cumple que: $\boxed{\vec{J} = g\vec{E}}$

$P = \frac{dU}{dt}$; energía perdida por unidad de tiempo.

$$\Rightarrow P = \int g E^2 \, dV \quad \text{[efecto Joule]}$$

Además, se tiene que:

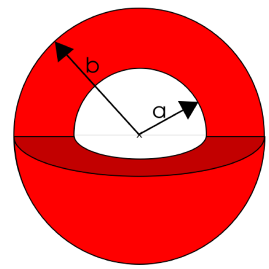
$$P = VI = \frac{V^2}{R} = I^2 R$$

diferencia de potencial

$$\boxed{P = \frac{V_0^2}{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{g_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{g_2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right]}}$$

Pregunta 2

En una esfera de radio a se distribuye homogéneamente una carga Q. Alrededor de ella se sitúa una capa dieléctrica de radio interior a y radio exterior b, cuya permitividad es $\epsilon = \frac{k}{r^2}$.



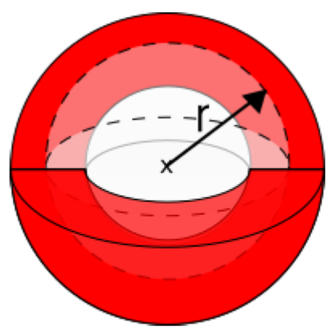
(a) Determine los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$ en la capa dieléctrica.

(b) Obtener las densidades de carga de polarización en el dieléctrico.

(c) Obtenga la carga total de polarización.

SOLUCION

(a) Para determinar el desplazamiento eléctrico se usará la ley de Gauss para éste, en una esfera de radio r, con $a < r < b$. Se usará esta ley para el desplazamiento, ya que en ella sólo se requiere conocer la carga libre encerrada. En dicho caso la carga libre encerrada es la que está en la esfera de radio a, es decir, Q. Como, por simetría, el desplazamiento es $\vec{D} = D(r)\hat{r}$:



$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$
$$\Rightarrow D4\pi r^2 = Q$$
$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Por lo que el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi k}\hat{r}$$

Luego el vector de polarización vale:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon_0}{k}\right)\hat{r}$$

(b) La densidad volumétrica de carga de polarización es:

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P)}{\partial r} = \frac{Q\epsilon_0}{2\pi k r}$$

La densidad superficial de carga de polarización en la frontera con la esfera de radio a, resulta de evaluar la polarización en dicha frontera y hacer producto punto con la normal exterior:

$$\sigma_{b1} = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\epsilon_0}{k}\right)$$

La densidad en la frontera exterior resulta de evaluar en la frontera y hacer producto punto con $\hat{r}$:

$$\sigma_{b2} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{\epsilon_0}{k}\right)$$

(c) Las densidades superficiales de cargas de polarización son constantes, por lo tanto para calcular la carga superficial total basta multiplicarlas por la superficie:

$$q_{b1} = -4\pi a^2 \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\epsilon_0}{k}\right) = -Q + \frac{Qa^2\epsilon_0}{k}$$
$$q_{b2} = 4\pi b^2 \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{\epsilon_0}{k}\right) = Q - \frac{Qb^2\epsilon_0}{k}$$

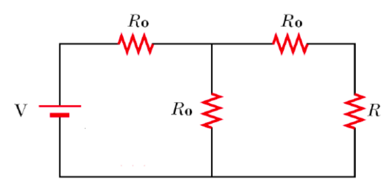
Para calcular la carga distribuida en el volumen hay que integrar la densidad en toda la capa dieléctrica:

$$q_{b3} = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q\epsilon_0}{2\pi kr} r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q\epsilon_0}{2\pi k} r \sin(\theta) d\phi d\theta dr$$
$$= 2\pi \int_a^b \int_0^\pi \frac{Q\epsilon_0}{2\pi k} r \sin(\theta) d\theta dr = 4\pi \int_a^b \frac{Q\epsilon_0}{2\pi k} r dr = \frac{Q\epsilon_0}{k}(b^2 - a^2)$$

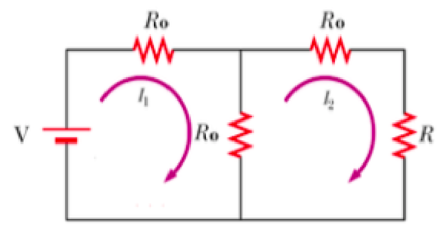
De donde es fácil ver que:

$$q_{\text{b total}} = q_{b1} + q_{b2} + q_{b3} = 0$$

Solución Pregunta 3



Resolviendo el problema con mallas



Para la malla 1

$$-V + I_1R_0 + R_0(I_1 - I_2) = 0$$

Para la malla 2

$$R_0(I_2 - I_1) + R_0I_2 + RI_2$$

De la primera ecuación se obtiene

$$I_1 = \frac{V + I_2R_0}{2R_0}$$

Reemplazando en la ecuación de la malla 2

$$(2R_0 + R)I_2 = R_0I_1 = R_0\frac{V + I_2R_0}{2R_0}$$

$$(3R_0 + 2R)I_2 = V \rightarrow I_2 = \frac{V}{3R_0 + 2R}$$

Teniendo la corriente que pasa por la resistencia R, la potencia que ésta consume se puede obtener como

$$P = V_RI_R = (I_RR)I_R = I_R^2R$$

$$P = \frac{V^2}{(3R_0 + 2R)^2} R$$

Para encontrar el valor de R que maximize esta potencia consumida, bastará con resolver

$$\frac{dP(R)}{dR} = 0$$

Esto es

$$\frac{dP}{dR} = \frac{V^2}{(3R_0 + 2R)^2} - \frac{4RV^2}{(3R_0 + 2R)^3} = \frac{3V^2R_0 + 2V^2R - 4RV^2}{(3R_0 + 2R)^3}$$

$$\frac{3V^2R_0 - 2V^2R}{(3R_0 + 2R)^3} = 0 \rightarrow 3V^2R_0 - 2V^2R = 0$$

Así, la resistencia R que maximiza la potencia consumida es

$$R = \frac{3}{2}R_0$$