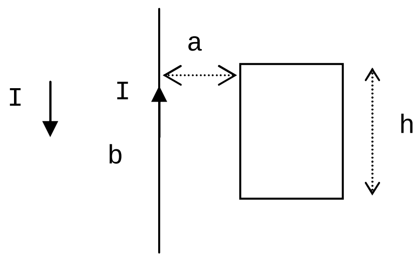
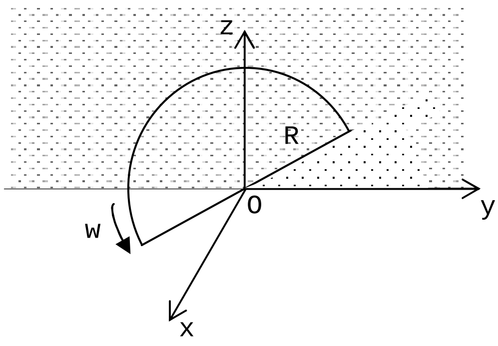
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. Electromagnetismo

1) Calcular la fuerza electromotriz inducida en una espira por un par de hilos paralelos de gran longitud, por los que circula una corriente igual pero con sentidos contrarios.



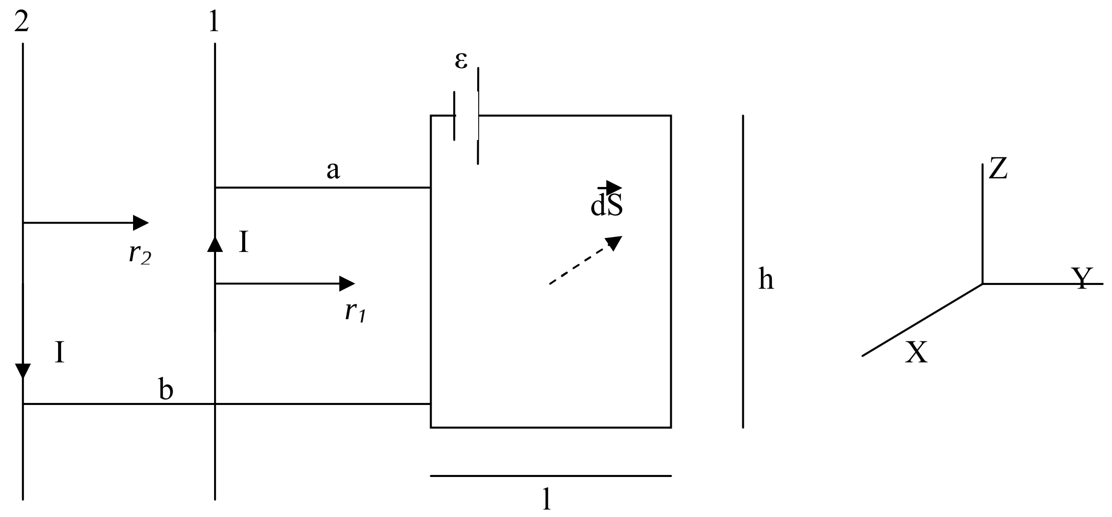
2) En un semiespacio $z > 0$ existe un campo magnético, $\vec{B} = B \cdot \vec{a}_x$, constante. Un circuito plano, contenido en el plano $x = 0$, está formado por una semicircunferencia de radio R y centro O, limitada por un diámetro, construidos con un material conductor homogéneo, cuya resistencia por unidad de longitud es $\rho = \frac{1}{2+\pi}$. Este circuito gira en su plano alrededor de O con velocidad angular contante, $\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \vec{a}_x$ (rad/s), estando inicialmente el diámetro coincidiendo con el eje X, y la semicircunferencia en la región $z > 0$. Calcular:

   a) El flujo del campo magnético $\vec{B} = B \cdot \vec{a}_x$ a través del circuito. Representar gráficamente su valor en función del tiempo.
   b) La fuerza electromotriz inducida en el circuito.
   c) La intensidad de la corriente eléctrica que circula por el circuito, indicando su sentido, en función del tiempo. Representarla gráficamente, tomando como sentido positivo el contrario al de las agujas del reloj.
   d) La fuerza que el campo magnético $\vec{B} = B \cdot \vec{a}_x$ ejerce sobre el circuito.



Problema 1

Calcular la fuerza electromotriz inducida en una espira por un par de hilos paralelos de gran longitud, por los que circula una corriente igual pero con sentidos contrarios.



$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \quad ; \qquad \phi = \phi_1 + \phi_2 \ ; \qquad \phi_1 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 \ , \quad \phi_2 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}(-\vec{a}_x)$$ (Deducimos las direcciones y sentidos de los campos

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}(\vec{a}_x)$$ atendiendo a los sentidos de las corrientes)

$$\phi_1 = \int_a^{a+l} \frac{-\mu_0 I}{2\pi r_1}(-h \cdot dr_1) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot h}{2\pi r_1} Ln\left(\frac{a+l}{a}\right); \quad \phi_2 = \int_b^{b+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}(-h \cdot dr_2) = \frac{-\mu_0 \cdot I \cdot h}{2\pi r_1} Ln\left(\frac{b+l}{b}\right)$$

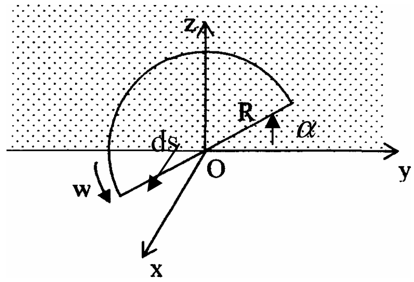
$$d\vec{S} = hdr(-\vec{a}_x)$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} Ln\left(\frac{b(a+l)}{a(b+l)}\right)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{-\mu_0 h}{2\pi} Ln\left(\frac{b(a+l)}{a(b+l)}\right)\frac{dI}{dt}$$

Problema 2



a) $\omega = \frac{\pi}{2}(rad/s)$, *y también* $\omega = \frac{\alpha}{t}$, siendo α el ángulo recorrido en función del tiempo t como se indica en el dibujo :

La formula del flujo es:

$\phi = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_s B\cdot ds = B\int_s ds = B\cdot S$ siendo S la superficie del circuito atravesada por el campo.

Se considera que B es paralelo a ds, por lo que su producto escalar es igual al producto de sus módulos.

Además, como B tiene modulo constante lo podemos sacar de la integral.

La superficie S en cada instante será, aplicando una regla de 3 con una circunferencia (ángulo 2π)

$S = \frac{\pi-\alpha}{2}\cdot R^2$, entonces sustituyendo: $\phi = \frac{\pi-\alpha}{2}\cdot BR^2$ (Wb)

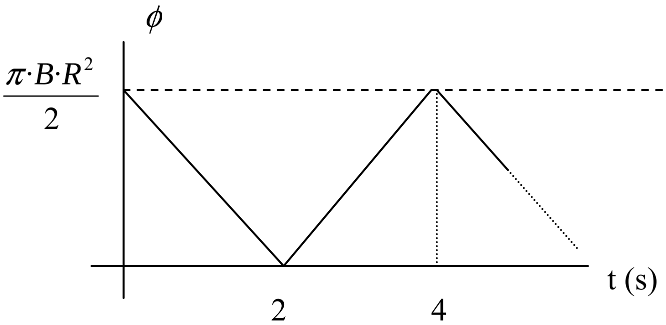
De la formula anterior de $\omega = \frac{\alpha}{t}$, *obtenemos* $\alpha = \omega\cdot t$, *y sustituyendo* ω, $\alpha = \frac{\pi\cdot t}{2}$

Entonces $\phi = \frac{\pi(2-t)}{4}\cdot BR^2$, con $t \in [0,2]$ (estos valores de t son para completar media vuelta, es decir, que la espira salga del campo.)

A partir de t = 0, instante en el que la espira se encuentra completamente dentro del campo, el desplazamiento la va sacando de él, por lo que la expresión del flujo es decreciente hasta t = 2, instante en el que la espira está completamente fuera del campo (y el flujo se anula).

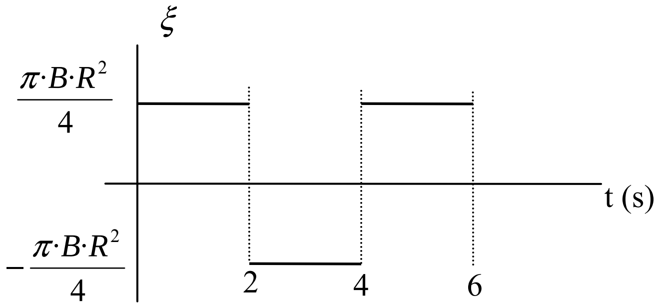
Para $t \in [2,4]$ se obtiene una expresión similar, pero el flujo es ahora creciente, dado que la espira va entrando en el campo.

En adelante la grafica será periódica.



b) La expresión de la fuerza electromotriz inducida viene dada por la variación del flujo respecto al tiempo:

$$\xi = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\pi}{4}\cdot BR^2 \text{ (V)}$$

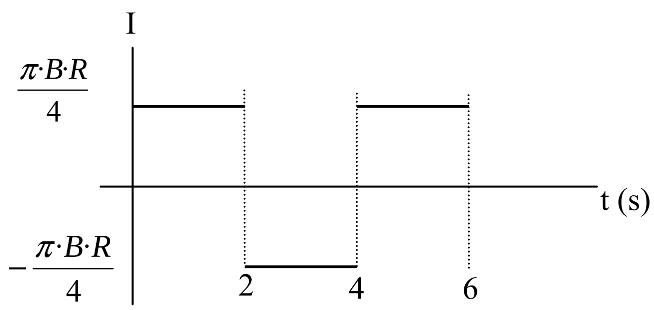


c) La corriente viene dada por la ley de Ohm, que dice que la intensidad es la relación entre la tensión y la resistencia del conductor, siendo la tensión la f.e.m:

$I=\frac{\xi}{\Re}$, y la resistencia es $\Re=\rho\cdot(\pi R+2R)=R$ **,** siendo $(\pi R+2R)$ la longitud de la espira (πR es la longitud de la semicircunferencia y 2R el diámetro)

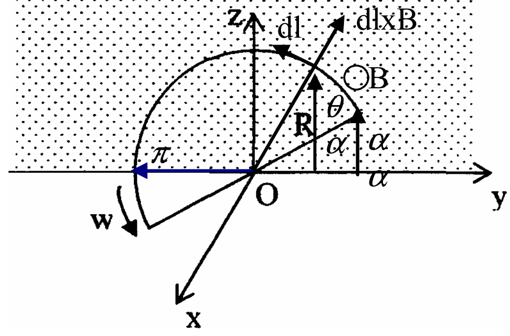
Con lo que queda:

$$I=\frac{\frac{\pi}{4}\cdot BR^2}{\frac{1}{2+\pi}\cdot(\pi R+2R)}=\frac{\pi}{4}\cdot BR \quad \text{(A)}$$



d) Dividimos el camino de la espira en 2 partes, a la semicircunferencia la llamaremos C_1, y al diámetro lo llamaremos C_2.
La formula de la fuerza magnética es:

$$\vec{F}=I\cdot\oint_C d\vec{l}x\vec{B}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=I\cdot\left[\int_{C1}d\vec{l}x\vec{B}+\int_{C2}d\vec{l}x\vec{B}\right]$$



- En C_1 ,

Cuando $0<\alpha<\pi$,
pasando a coordenadas polares :
$d\vec{l}\,x\vec{B}$ = dl·B·sen90· $\vec{a}_r$ (en el sentido que obtenemos mediante la regla de la mano derecha)
$\vec{a}_r=\cos\theta\cdot\vec{a}_y+sen\theta\cdot\vec{a}_z$

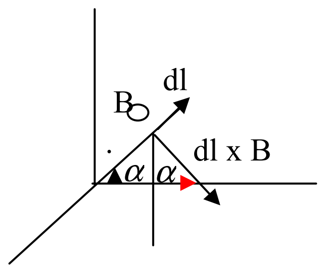
$dl = R \cdot d\theta$ (Utilizando la formula del arco)

Con lo que nos queda, sustituyendo:
$d\vec{l}\, x\vec{B} = B \cdot R(\cos\theta \cdot \vec{a}_y + sen\theta \cdot \vec{a}_z) \cdot d\theta$
y por otro lado tenemos que $\theta \in [\alpha, \pi]$, como vemos en el dibujo.

$$\vec{F}_1 = \int_{C1} d\vec{l} x\vec{B} = \int_{\alpha}^{\pi} B \cdot R(\cos\theta \cdot \vec{a}_y + sen\theta \cdot \vec{a}_z) \cdot d\theta = B \cdot R\left[sen\theta \cdot \vec{a}_y - \cos\theta \cdot \vec{a}_z\right]_{\alpha}^{\pi} = 2B \cdot R\left(-sen\alpha \cdot \vec{a}_y + \cos\alpha \cdot \vec{a}_z\right)$$

Cuando $\pi < \alpha < 2\pi$, la semicircunferencia está subiendo, y tendremos que:
$\theta \in [0, \alpha - \pi]$

- En C_2:



Hay que recordar que el campo B solo existe para y > 0,
por lo tanto, cuando $\alpha = 0$, la línea del diámetro se encuentra sobre y,
y la fuerza es nula.
En otro caso:
$d\vec{l}\, x\vec{B} = dl \cdot B \cdot sen(90)\left[sen\alpha \cdot \vec{a}_y - \cos\alpha \cdot \vec{a}_z\right]$
Ahora, cuando $0 < \alpha < \pi$, los límites de integración son $l \in [0, R]$,
Por lo que la integral queda:
$$\vec{F}_2 = \int_{C2} d\vec{l} x\vec{B} = \int_0^R dl \cdot B(sen\alpha \cdot \vec{a}_y - \cos\alpha \cdot \vec{a}_z) = B \cdot R\left(sen\alpha \cdot \vec{a}_y - \cos\alpha \cdot \vec{a}_z\right)$$
Cuando $2\pi > \alpha > \pi$, tenemos la misma situación pero a la inversa, y la fuerza será igual pero de signo contrario, ya que el diferencial de l irá en sentido contrario.
Sumando:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = I \cdot B \cdot R \cdot (-sen\alpha \cdot \vec{a}_y + \cos\alpha \cdot \vec{a}_z)(N)$$