

**MIGUEL A. FURMAN**

# **ELECTRO- MAGNETISMO**

**Problemas analizados y resueltos**

**Segunda Edición**

**TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS**

© MIGUEL A. FURMAN ROSENZVIT  
Inscripción Nº 39.911  
Santiago de Chile. 1972.

Se terminó de imprimir  
esta segunda edición en el mes  
de marzo de 1978  
en los talleres de ALFABETA IMPRESORES LTDA.  
Lira 140 - Santiago, Chile

## PREFACIO A LA SEGUNDA EDICION

El éxito de esta "Colección de Problemas" es evidente del hecho que su primera edición se agotó rápidamente, hace ya varios años, y que desde entonces se ha convertido en un texto que circula activamente en la universidad en cada comienzo de los períodos lectivos; esto habla con elocuencia de la excelencia del trabajo realizado por el autor.

Los problemas resueltos en este libro fueron seleccionados de entre aquellos propuestos, ya sea como tareas, ejercicios, controles o exámenes, a los alumnos de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile en aquellos años (esto es, en los años inmediatamente anteriores a 1971, fecha en que se realizó este trabajo). Es una reflexión interesante el notar que el nivel de estos problemas es superior al nivel medio que hoy se exige en nuestras universidades, y que, sin embargo, el grado de dificultad que nuestros actuales alumnos encuentran en el tema parece ser mayor que el que encontraron sus predecesores, a juzgar por los rendimientos académicos respectivos.

Los alumnos deberían usar este texto para **aprender a trabajar**, y no sólo como un medio para asegurar una nota aprobatoria en los controles (lo que desgraciadamente parece ser la regla general). Para ello, como dicho ya por el autor en el prefacio de la primera edición, deberían trabajar ellos mismos cada problema, sin recurrir al libro sino cuando realmente se encuentren sin saber cómo continuar, y no limitarse a mirar superficialmente los desarrollos hechos, con la esperanza de memorizar (¡en el mejor de los casos!) los pasos esenciales. Sólo de esa manera, con ese método, estarán aprovechando realmente, en cuanto a universitarios, el generoso esfuerzo realizado por Miguel A. Furman, en ese entonces (1971) destacado estudiante en nuestra Facultad, y hoy flamante Doctor de la Universidad de California y activo investigador en Física Teórica.

**Igor Saavedra**

Facultad de Ciencias Físicas y  
Matemáticas,  
Universidad de Chile

Santiago, marzo de 1978.

## P R E F A C I O

Esta colección de problemas resueltos de electromagnetismo está destinada a complementar los cursos relacionados con esta materia, que se dictan principalmente en las carreras de Ingeniería y Técnicas, en las varias Universidades de nuestro país.

La idea surgió atendiendo a las necesidades de los alumnos que cursan el ramo de Electromagnetismo en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, cuna de esta obra: una colección de problemas resueltos llenaría un vacío en la estructura docente del curso, y sería de gran utilidad para los alumnos. Este ha sido el espíritu en que se ha realizado esta colección.

Los problemas han sido seleccionados tratando de ser los más representativos de las materias que se pasan en un curso de electromagnetismo de este nivel; además, se ha procurado alcanzar un equilibrio adecuado entre los distintos tipos de problemas, como son los de interés físico, los que simplemente ilustran algún concepto abstracto o fórmula, los que requieren saber calcular, y los de aplicación práctica. Cuando ha sido conveniente e ilustrativo, los problemas se han resuelto por varios métodos.

Los problemas se han resuelto en la forma más explícita posible, sin omitir detalles (salvo los triviales) en los cálculos; el alumno tiene así ejemplos completos de resolución de problemas. Sin embargo, la única forma en que el alumno puede adquirir una comprensión cabal de ellos y entrenamiento en su resolución, es haciendo por sí mismo todos los cálculos necesarios, y confrontándolos luego con los que aquí aparecen.

Deliberadamente no se ha querido dar, al final, una lista de problemas propuestos, sin resolver: una tal lista sería necesariamente incompleta. Se deja así a criterio del profesor del ramo el tipo de problemas que estime que sus alumnos deban realizar como tareas semanales; debe quedar muy en claro que esta Colección no pretende ser una "Biblia" para los alumnos del curso, sino sólo una ayuda para aquéllos realmente interesados en aprender y adquirir destreza en la resolución de problemas.

Se utiliza en todos los problemas el sistema de unidades MKS racionalizado, simplemente porque es éste el que se usa más frecuentemente en las aplicaciones tecnológicas del electromagnetismo. En algunas ocasiones se utiliza una misma letra para designar cantidades físicas distintas, pero se ha tenido el cuidado de que no pueda haber confusión posible; las letras y símbolos usados son los habituales en los libros de electromagnetismo; la carga del electrón se designa por  $-e$ , e  $> 0$ , en todos los problemas en que aparece.

La clasificación de los problemas por materias es como sigue: Electrostática, problema 1 al 18; esto incluye problemas relativos a fuerza y trabajo en el campo electrostático, cálculo del campo eléctrico producido por distintas distribuciones de carga, teorema de Gauss y aplicaciones, cálculo de la función potencial, condensadores y cálculo de capacidades, teorema de reciprocidad de Green, medios dieléctricos, cargas de polarización y vector polarización, energía almacenada en el campo electrostático, teorema de unicidad de la solución de la ecuación de Poisson, y método de las imágenes. Efecto Joule y cálculo de resistencias, problemas 19 y 20. Circuitos de corriente continua, problemas 21 al 25; esto incluye varios métodos de resolución de circuitos, principio de superposición, y cálculo de potencias. Magnetostática, problemas 26 al 42; esto incluye cálculo del campo magnético producido por distintas distribuciones de corriente, potencial vector y aplicaciones, movimiento de partículas cargadas en campo eléctricos y magnéticos, fuerzas y torque sobre momentos magnéticos y espiras, energía almace-

nada en el campo magnético, magnetización y electroimanes, precesión de Larmor, fórmula de Neumann y cálculo de inductancias mutuas y propias, y constante de acoplamiento. Inducción electromagnética y fenómenos transientes, problemas 43 al 45. Corriente alterna, problema 46 al 49; esto incluye varios métodos de resolución de circuitos, cálculo de potencias, y diagramas fasoriales. Ondas electromagnéticas, problemas 50 al 54; esto incluye ondas en el vacío, en dieléctricos, en plasma y en conductores, reflexión y refracción, coeficiente de transmisión y reflexión, y principios de guías de ondas.

Finalmente, es un placer agradecer aquí al Profesor I. Saavedra, quien me propuso la realización de esta colección, por las muchas discusiones, sugerencias y correcciones que me hizo en los distintos problemas; y a la Srta. Sylvia López, por haber mecanografiado el manuscrito, y por su paciencia y buena disposición para hacer, posteriormente todos los cambios que fueron necesarios.

Miguel Furman

Santiago, Diciembre de 1971.

## I N D I C E

ELECTROSTATICA, Problemas 1 al 18

EFFECTO JOULE Y CALCULO DE RESISTENCIAS, Problemas 19 y 20

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA, Problemas 21 al 25

MAGNETOSTATICA, Problemas 26 al 42

INDUCCION ELECTROMAGNETICA Y FENOMENOS TRANSIENTES, Problemas 43 al 45

CORRIENTE ALTERNA, Problemas 46 al 49

ONDAS ELECTROMAGNETICAS, Problemas 50 al 54

# PROBLEMA 1.-

En un campo electrostático, se lleva una carga  $q$ , desde un punto A en que el potencial es  $V_1$  hasta un punto B de potencial  $V_2 > V_1$ .

a) Calcule el trabajo realizado para efectuar esta operación y, según el signo de  $q$ , discuta si es el agente externo o el campo quien realizó el trabajo.

b) Un electrón se suelta desde A y luego se observa (sin modificar su movimiento) cuando pasa por un punto C a potencial  $V$ . Calcule la energía cinética que lleva en C.

## Resolución

a) Por ser el campo electrostático, existe una función potencial  $V = V(\vec{r})$  tal que

$$\vec{E} = - \nabla V.$$

Sea  $d\vec{\ell}$  un elemento diferencial vectorial de la trayectoria según la cual se lleva la carga  $q$  desde A hasta B:

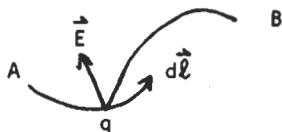


Fig. 1

Se cumple lo siguiente:

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \nabla V \cdot d\vec{\ell} = - dV;$$

$$q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - qdV;$$

pero  $q\vec{E}$  es la fuerza que el campo ejerce sobre la carga  $q$ :

$$\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - qdV.$$

Por definición,  $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$  es un elemento de trabajo que el campo realiza en el traslado de la carga; llamémoslo  $dW_C$ :

$$dW_C = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Como el campo es conservativo, el trabajo realizado por el campo es igual y de signo contrario al que realiza el agente externo, pues por hipótesis la energía cinética de la carga es cero en A y B; sea  $dW_A$  el elemento de trabajo realizado por el agente externo en el traslado de  $q$ :

$$dW_A = - dW_C = - \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = qdV$$

y el trabajo total realizado por el agente externo será:

$$W_A(A \rightarrow B) = \int_A^B dW_A = \int_A^B qdV = q(V_2 - V_1)$$

Como  $V_2 > V_1$ , el signo de  $W_A$  será el de  $q$ ; si  $q$  es positivo (negativo) será el agente externo (campo) quien realice el trabajo en el traslado de  $q$ . (Se supone que "realizar trabajo" significa "realizar trabajo positivo").

b) Como no hay agente externo, el trabajo realizado por el campo se transforma íntegramente en energía cinética; sea  $-e$  la carga del electrón, y sea  $v$  su velocidad al pasar por el punto  $C$ ; entonces:

$$W_C(A \rightarrow C) = -W_A(A \rightarrow C) = +e(V - V_1)$$

y

$$W_C(A \rightarrow C) = \frac{1}{2} m v^2$$

luego

$$\frac{1}{2} m v^2 = +e(V - V_1)$$

(La expresión  $+e(V - V_1)$  debe ser positiva para que el movimiento sea real;

esto es sólo posible si  $V > V_1$ , puesto que  $e$  es positivo. Esto quiere decir que el electrón se mueve hacia las regiones de mayor potencial, lo cual está de acuerdo con la ley de fuerzas,  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , pues  $e > 0$  y  $\vec{E}$  apunta siempre hacia las regiones de menor potencial).

## PROBLEMA 2.-

Calcular el campo eléctrico producido por las siguientes configuraciones y en las regiones que se indican:

- Casquete semiesférico de radio  $R$  cargado con densidad de carga superficial constante  $\sigma$ ; en el centro de la esfera.
- Anillo de radio  $r$ , cargado uniformemente con densidad de carga lineal; sobre su eje.
- Disco de radio  $R$ , cargado con densidad de carga superficial  $\sigma$  constante; sobre su eje.
- Cilindro macizo de radio  $R$  y altura  $h$ , cargado uniformemente con densidad de carga en volumen  $\rho$ ; sobre su eje.

## Resolución.

- Coloquemos el casquete con su centro en el origen  $O$  de un sistema de coordenadas;

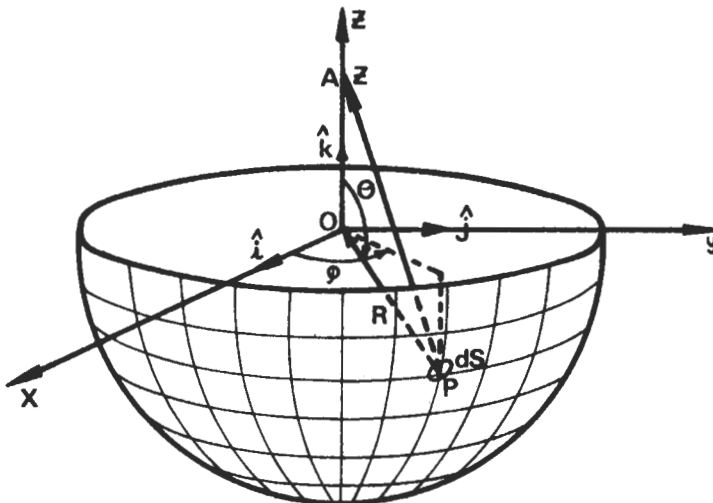


Fig. 2



Sea P un punto cualquiera del casquete; sea A un punto cualquiera sobre el eje Oz; en estas condiciones,  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{OP}$  y  $\hat{k}$ , y  $\varphi$  es el ángulo entre la proyección de  $\vec{OP}$  sobre el plano xOy y el eje Ox; calculemos el potencial sobre el eje Oz, y luego el campo a partir de él.

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(P)}{|\vec{PA}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma dS(P)}{|\vec{PA}|}$$

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}}$$

El casquete está descrito, en coordenadas esféricas, por:

$$\begin{cases} r = R \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$V(z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} dV(z)$$

$$V(z) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}}$$

$$V(z) = \frac{2\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}}$$

$$V(z) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{2}{-2zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} \left[ z + R - \sqrt{z^2 + R^2} \right]$$

El campo eléctrico  $\vec{E}$  será

$$\vec{E} = -\nabla V;$$

por simetría,  $\vec{E}$  sobre el eje Oz es colineal con  $\hat{k}$ , luego:

$$\vec{E}(z) = -\hat{k} \frac{dV}{dz}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma R^2 \hat{k}}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}}{z^2}$$

El campo eléctrico pedido es  $\vec{E}(z=0)$ ; sin embargo, si hacemos  $z=0$  directamente en la fórmula de  $\vec{E}(z)$ , resulta que no está bien definido; sin embargo notamos que cuando  $z$  tiende a cero, tanto el numerador como el denominador tienden a cero; luego es posible aplicar la regla de l'Hopital

$$\vec{E}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \vec{E}(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma R^2 \hat{k}}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{d}{dz} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)}{\frac{d}{dz} (z^2)}$$

$$\vec{E}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma R^2 \hat{k}}{2\epsilon_0} \cdot \frac{(-R) (-1/2) (R^2 + z^2)^{-3/2} (2z)}{2z}$$

$$\vec{E}(0) = \frac{\sigma \hat{k}}{4\epsilon_0}$$

Este resultado se puede encontrar directamente calculando  $d\vec{E}$  en el origen e integrando:

$$d\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(P)}{|\vec{PO}|^3} \vec{PO}$$

(ver figura anterior).

Por simetría,  $\vec{E}(0)$  es colineal con  $\hat{k}$ , es decir:

$$\vec{E}(0) = E_z(0) \hat{k}$$

$$d\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\phi}{R^3} \left[ -R(\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}) \right]$$

Pero como sólo nos interesa la componente según  $\hat{k}$ ,

$$\vec{E}(0) = -\frac{\sigma \hat{k}}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{E}(0) = \frac{\sigma \hat{k}}{4\epsilon_0}$$

El resultado no depende del radio R del casquete; esto es aparentemente extraño, pero puede entenderse si razonamos así: obviamente,  $\vec{E}(0)$  debe depender de la densidad de carga  $\sigma$ , pues si el casquete no estuviera cargado, no existiría campo; también es obvio que dependa del medio que rodea la densidad de carga, es decir, de  $\epsilon_0$ , pues si el medio no fuera el vacío, el campo sería distinto; además, por simetría,  $\vec{E}(0)$  debe ser colineal con  $\hat{k}$ . La única forma de combinar estos ingredientes para construir  $\vec{E}(0)$  de tal modo que éste tenga dimensiones de campo eléctrico, es:

$$\vec{E}(0) = K \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k},$$

en que K es una constante sin dimensiones.

Ahora bien; supongamos que R aparezca en el resultado formando parte de K como una potencia cualquiera de R; la única forma de mantener a K sin dimensiones, es que esta potencia de R sea cancelada por otra potencia (de igual exponente) de alguna longitud. Pero la única longitud característica de nuestro problema es precisamente R; luego, de aparecer R en el resultado debiera ser calculado consigo mismo, es decir, no puede figurar en él.

b) Calculemos primero el potencial producido sobre el eje y luego encontraremos  $\vec{E}$  a partir de él; se deja propuesto calcular el campo eléctrico directamente.

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(P)}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda d\ell}{a}$$

$$dV(z) = \frac{\lambda r d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$V(z) = \int_{\phi=0}^{2\pi} dV(z)$$

$$V(z) = \frac{\lambda r}{2\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} \quad (1).$$

Por simetría, el campo eléctrico sobre el eje del anillo es colineal con  $\hat{k}$ ; luego:

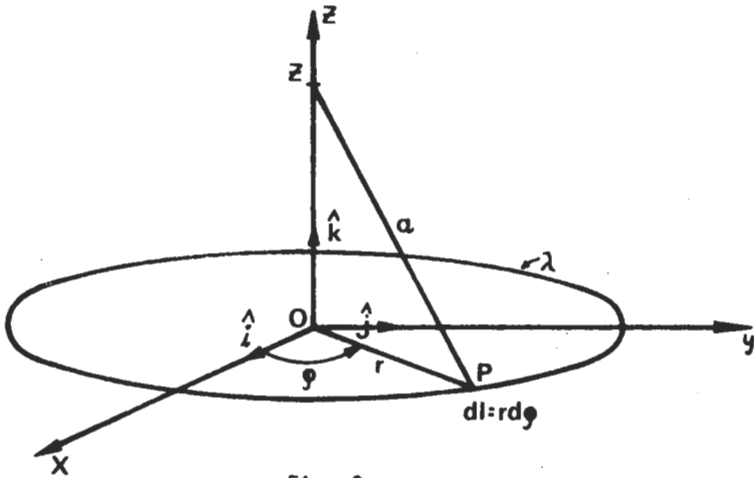


Fig. 3

$$\vec{E}(z) = -\nabla V = -\hat{k} \frac{dV}{dz}$$

$$\vec{E}(z) = -\hat{k} \frac{\lambda r}{2 \epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda r z}{2 \epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

c) Calcularemos primero el potencial producido sobre el eje del disco, y luego el campo eléctrico a partir de él. Se deja igualmente propuesto el cálculo directo de  $\vec{E}$ . Para calcular el potencial sobre el eje, consideraremos al disco como si estuviera compuesto por anillos de ancho  $\Delta r$  y de radio  $r$  variable entre cero y  $R$ :

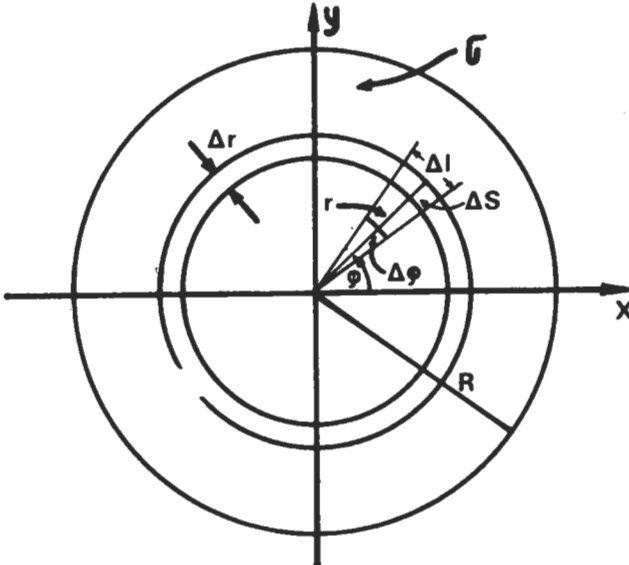


Fig. 4

Necesitamos una relación entre  $\lambda$  del anillo,  $\sigma$  del disco, y  $\Delta r$ ;

$$\Delta q = \sigma \Delta S = \sigma (\Delta r) \cdot (\Delta \ell) = \sigma r (\Delta r) \cdot (\Delta \phi);$$

por otra parte,

$$\Delta q = \lambda \Delta \ell = \lambda r \Delta \phi;$$

comparando ambas relaciones, resulta:

$$\lambda = \sigma \Delta r$$

El potencial producido por el anillo de radio  $r$  será: (ver (1))

$$\Delta V(z) = \frac{\sigma r \Delta r}{2 \epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}},$$

es decir, tomando el límite,

$$dV(z) = \frac{\sigma r dr}{2 \epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}},$$

y el potencial producido por todo el disco será:

$$\begin{aligned} V(z) &= \int_{r=0}^R dV(z) \\ V(z) &= \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left. \sqrt{r^2 + z^2} \right|_0^R \\ V(z) &= \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \cdot [\sqrt{z^2 + R^2} - z] \end{aligned}$$

Por simetría, el campo  $\vec{E}$  sobre el eje es colineal con  $\hat{k}$ ; luego,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V = -\hat{k} \frac{dV}{dz} \\ \vec{E} &= \frac{\sigma \hat{k}}{2 \epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \text{----- (2)} \end{aligned}$$

(los cálculos que hemos hecho son para  $z \geq 0$ ; sin embargo, el campo  $\vec{E}$  es simétrico con respecto al plano del disco).

d) En este caso no calcularemos el potencial sobre el eje del cilindro porque las integrales son algo complicadas; sin embargo, utilizaremos el método de superposición aplicado directamente al campo  $\vec{E}$ : supondremos que el cilindro está compuesto de disco de espesor  $\Delta z'$ , y sumaremos todos sus efectos. Se deja propuesto el cálculo directo de  $\vec{E}$ .

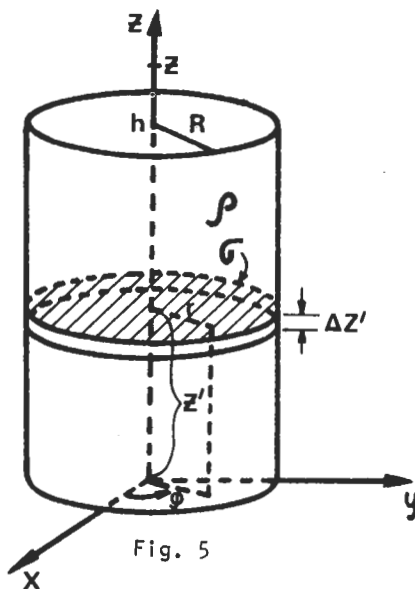


Fig. 5

Necesitamos una relación entre  $\rho$  del cilindro,  $\sigma$  del disco y  $\Delta z'$ :

$$\Delta q = \rho \Delta \delta = \rho r (\Delta r) (\Delta \phi) (\Delta z')$$

y también:

$$\Delta q = \sigma \Delta S = \sigma r (\Delta r) (\Delta \phi)$$

Comparando, resulta:

$$\sigma = \rho \Delta z'$$

La contribución del disco a la altura  $z'$  al campo eléctrico en el punto  $z$  será (ver (2)):

$$\Delta \vec{E} = \frac{\rho \Delta z' \hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R^2}} \right]$$

y tomando el límite,

$$d\vec{E} = \frac{\rho dz' \hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R^2}} \right]$$

El campo eléctrico producido por todo el cilindro será:

$$\vec{E}(z) = \int_{z'=0}^h d\vec{E}(z)$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho \hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ z' - \sqrt{(z - z')^2 + R^2} \right]_{z'=0}^h$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho \hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ h - \sqrt{(z - h)^2 + R^2} + \sqrt{z^2 + R^2} \right]$$

### PROBLEMA 3.-

Se tiene un condensador esférico compuesto de dos esferas metálicas huecas concéntricas (armaduras del condensador) de radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ ), y de espesor despreciable aunque finito. La armadura interna se carga con una carga  $Q_0 > 0$ . Se supone que la tierra (que se toma como origen de potenciales) está infinitamente alejada.

I. La armadura externa se conecta a tierra a través de una batería cuya diferencia de potencial entre sus bornes es  $V_0$  (ver Fig. 6).

- Calcule la carga que se induce en las superficies interior y exterior de cada una de las armaduras.
- Calcule el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
- Calcule la función potencial en todos los puntos del espacio, y la diferencia de potencial entre las armaduras.

II. Se cortocircuita la batería (conexión directa a tierra) (ver Fig. 7).

- Repita los cálculos anteriores.

III. Se desconecta la armadura externa de tierra, y se acerca una carga  $q > 0$  hasta una distancia  $c > b$  del centro del condensador. (Ver Fig. 8)

Decida si la acción de la carga  $q$  modifica o no:

- e) la carga total de cada una de las armaduras;  
 f) la densidad de carga en ellas;  
 g) la función potencial y la diferencia de potencial entre ellas.  
 Fundamente sus respuestas.

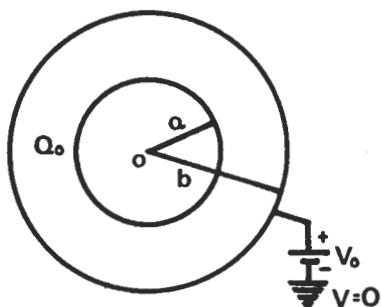


Fig. 6

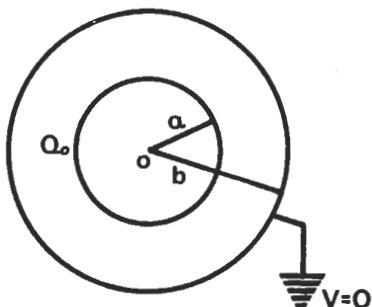


Fig. 7

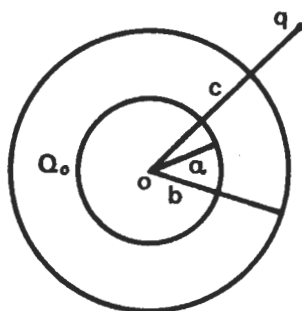


Fig. 8

### Resolución.

1. El problema tiene simetría esférica debido a que la tierra está infinitamente alejada, de modo que las líneas de campo serán radiales en todo el espacio; todas las densidades de carga serán uniformes; la función potencial dependerá sólo de la distancia  $r$  al centro del condensador.

a) En el hueco que queda al interior de la armadura interna no hay carga libre, por hipótesis; sean  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  las cargas totales de las superficies interior y exterior de las armaduras interna y externa, respectivamente, (ver Fig. 9).

Es obvio que se cumplirá  $Q_3 = -Q_2$ , porque todas las líneas de campo que salen de la superficie exterior de la armadura interna deben llegar a la superficie interior de la armadura externa.

Calculemos las cargas sistemáticamente: por hipótesis, se cumple:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

Sean  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  superficies esféricas geométricas, concéntricas con las armaduras. (Ver Fig. 9).

Aplicando el teorema de Gauss a  $S_2$ :

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = 0,$$

pues el campo en el interior de un conductor es siempre cero.

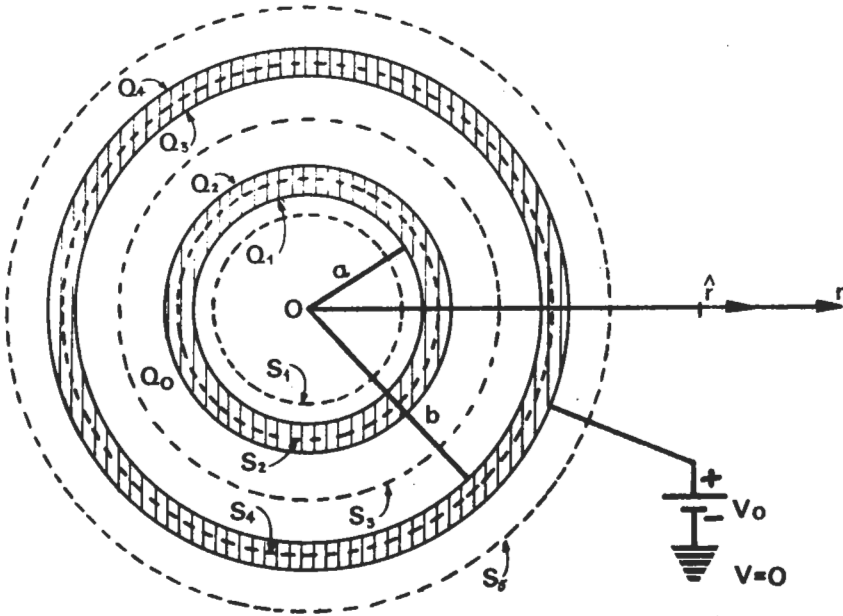


Fig. 9

Luego:

$$Q_1 = 0$$

y

$$Q_2 = Q_0$$

Aplicamos el teorema de Gauss a  $S_4$ :

$$\oint_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\epsilon_0} = 0,$$

por la misma razón anterior; luego:

$$Q_3 = -Q_0$$

Aplicamos el teorema de Gauss a  $S_5$ :

$$\oint_{S_5} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{\epsilon_0} = \frac{Q_4}{\epsilon_0};$$

por simetría esférica,  $\vec{E} = \vec{E}(r) \hat{r}$ ;

luego:

$$\oint_{S_5} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

y de aquí:

$$\vec{E} = \frac{Q_4}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > b)$$

Por otra parte sabemos que la diferencia de potencial entre la armadura externa y tierra es  $V_0$ :

$$V(b) - V(\text{tierra}) = V_0 = - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

e integrando a lo largo de una recta radial,

$$V_0 = - \int_{\infty}^b \frac{Q_4 dr}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$V_0 = \frac{Q_4}{4\pi \epsilon_0 b}$$

luego:

$$Q_4 = 4\pi \epsilon_0 b V_0$$

(recordemos la capacidad de una esfera aislada,  $C = 4\pi \epsilon_0 b$ , y que  $Q = CV$ ).

b) Dividiremos el espacio en varias regiones.

i)  $r \leq a$  (región interior y metal de la armadura interna):

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = E \cdot 4\pi r^2,$$

$$\text{luego } \vec{E} = \vec{0}.$$

ii)  $a < r < b$  (región comprendida entre las armaduras):

$$\oint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_0}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \quad (\text{pues } \vec{E} = E(r) \hat{r})$$

$$\text{luego: } \vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

iii)  $r = b$  (metal de la armadura externa):

$$\vec{E} = \vec{0},$$

pues el campo en el interior de un conductor es siempre cero.

iv)  $r > b$  (región exterior al condensador):

es obvio que existe campo eléctrico, pues hay una diferencia de potencial entre la armadura externa y tierra (infinito);

$$\oint_{S_5} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_4}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi \epsilon_0 b V_0}{\epsilon_0} \quad (\text{pues } \vec{E} = E(r) \hat{r})$$

luego:

$$\vec{E} = \frac{b V_0}{r^2} \hat{r}$$



c) Es conveniente calcular primero la función potencial en la región entre las armaduras, gracias a sus condiciones de borde.

i)  $a \leq r \leq b$ :

$$V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C$$

e integrando a lo largo de una recta radial,

$$V(r) = - \int \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + C$$

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} + C;$$

la constante de integración  $C$  se determina por la condición de borde:

$$V(b) = V_0$$

$$\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 b} + C = V_0$$

$$C = V_0 - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + V_0$$

La diferencia de potencial entre las armaduras es:

$$V(a) - V(b) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

(recordemos que la capacidad de un condensador esférico es:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

y que  $Q = CV$ , en que  $V$  es el valor absoluto de la diferencia de potencial entre las armaduras).

ii)  $r \leq a$ :

el potencial de la armadura interna es:

$$V(a) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + V_0$$

y como no hay campo en la región interior a esta armadura, se deduce que toda esta región será equipotencial, es decir:

$$V(r \leq a) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + V_0$$

iii)  $r \geq b$ :

$$V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C'$$

e integrando a lo largo de una recta radial,

$$V(r) = - \int \frac{b V_0}{r^2} dr + C'$$

$$V(r) = \frac{b V_0}{r} + C'$$

la constante de integración  $C'$  se determina por la condición de borde:

$$V(b) = V_0$$

o bien por:

$$V(\infty) = 0;$$

ambas conducen a

$$C' = 0$$

$$V(r) = \frac{b V_0}{r}$$

II. Al cortacircuitar la batería, o sea, hacer  $V_0 = 0$ , la armadura externa estará al mismo potencial que tierra (en el infinito); en consecuencia no habrá campo fuera del condensador (sólo existe campo cuando existe una diferencia de potencial).

Los cálculos son idénticos a los anteriores, así que basta introducir en ellos la condición  $V_0 = 0$ .

d) Carga:

$$Q_1 = 0$$

$$Q_2 = Q_0$$

$$Q_3 = - Q_0$$

$$Q_4 = 0$$

Campo:

$$r \leq a : \vec{E} = \vec{0}$$

$$a < r < b : \vec{E} = \frac{Q_0}{r \pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$r \geq b : \vec{E} = \vec{0}$$

Función potencial:

$$a \leq r \leq b : V(r) = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

$$r \leq a : V(r) = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$r \geq b : V(r) = 0$$

Diferencia de potencial entre las armaduras:

$$V(a) - V(b) = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

III. Al desconectar de tierra, sin acercar la carga  $q$  todavía, las cargas eléctricas no sufren modificación con respecto a la parte II.

e) Al acercar  $q$ , la carga total de cada armadura sigue siendo la misma por el principio de conservación de carga eléctrica.

Veamos qué pasa con  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ .

$Q_1$  seguirá siendo cero, porque

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = 0,$$

porque el campo en el interior de un conductor es siempre cero; luego, por conservación de carga,  $Q_2$  sigue igual a  $Q_0$ .

$Q_3$  seguirá siendo igual a  $-Q_0$ , porque:

$$\oint_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\epsilon_0} = \frac{Q_0 + Q_3}{\epsilon_0} = 0$$

por la misma razón anterior; luego, por conservación de carga, también  $Q_4$  seguirá siendo cero.

f) La densidad de carga sí se modifica, pues la carga  $q$  introduce una asimetría en el espacio, y las cargas en los metales están libres de moverse; la carga de la armadura externa será atraída por  $q$ , y la densidad superficial tendrá un máximo (de carga negativa) en la parte de la esfera más cercana a  $q$ .

g) La situación es la siguiente:

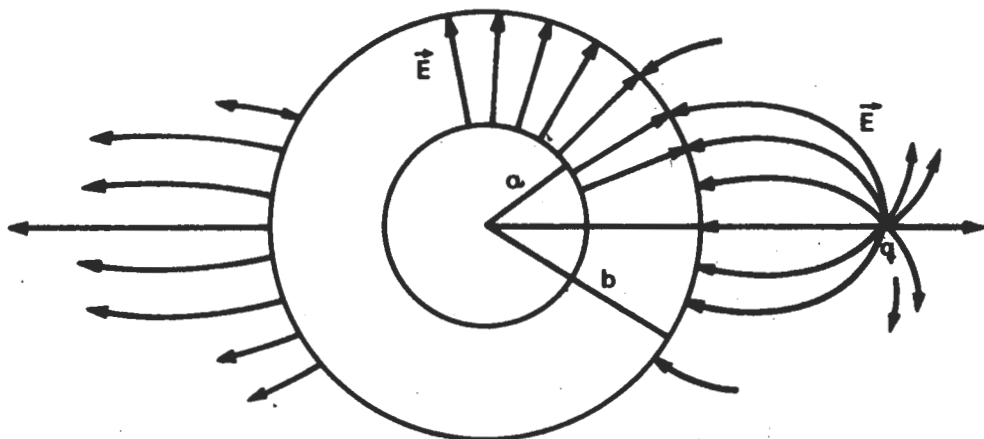


Fig. 10

La armadura externa se pondrá a un potencial distinto de cero, si es que seguimos tomando a la tierra como origen de potencial (en el infinito):

$$V(b) - V(\infty) = - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V(b) = - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \neq 0,$$

pues  $\vec{E} \neq \vec{0}$  y no hay una simetría que pudiera anular la integral; en consecuencia,

la función potencial entre las armaduras cambiará, subiendo en la constante  $V(b)$ ; luego la diferencia de potencial entre las armaduras seguirá siendo la misma. (La capacidad del condensador esférico depende sólo de la geometría, que no ha cambiado; tampoco ha cambiado la carga de las armaduras; luego la diferencia de potencial es la misma).

#### PROBLEMA 4.-

I. Se tienen cargas  $q < 0$  en las vértices de un cuadrado de lado  $a$ .

- Calcular  $\vec{E}$  y  $V$  en el centro.
- Se coloca un tubo perpendicular al plano del cuadrado que pasa por su centro. Una carga  $Q > 0$  puede moverse a lo largo de ella; demostrar que el centro del cuadrado es un punto de equilibrio estable para  $Q$ ; ¿por qué no se cumple el teorema de Earnshaw?

II. Se cambia de signo a dos cargas que están en vértices opuestos; calcular la energía del sistema (cuadrupolo), si el medio en que está tiene susceptibilidad 80,  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $|q| = 10^{-9} \text{ Coulomb}$ .

#### Resolución.

a)

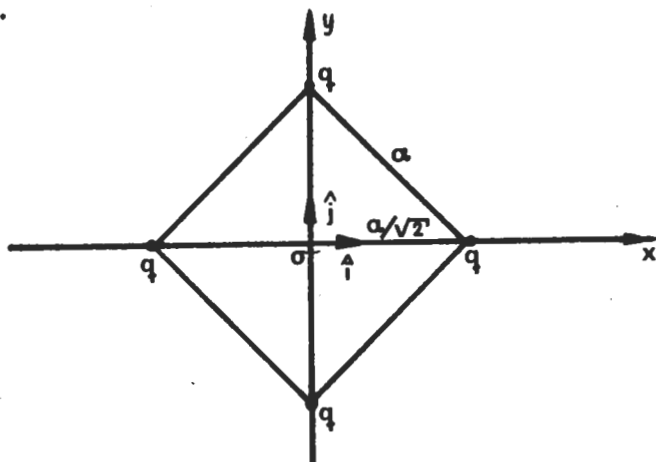


FIG. 11

$$\vec{E}(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \left( \frac{\hat{j}}{a^2/2} - \frac{\hat{j}}{a^2/2} + \frac{\hat{i}}{a^2/2} - \frac{\hat{i}}{a^2/2} \right) = \vec{0} \quad (\text{hay simetría})$$

$$V(0) = 4 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 a/\sqrt{2}}$$

$$V(0) = \frac{q\sqrt{2}}{a\pi\epsilon\epsilon_0}$$

- b) Como  $Q$  está sobre el eje de simetría, la fuerza que actúa sobre ella apunta siempre hacia el centro del cuadrado; luego el centro  $O$  será un punto de equilibrio estable. Esto puede demostrarse también calculando  $\nabla^2 W$  en  $z = 0$ ;  $W$  es la energía potencial de  $Q$ :

$$V(z) = 4 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 d}$$

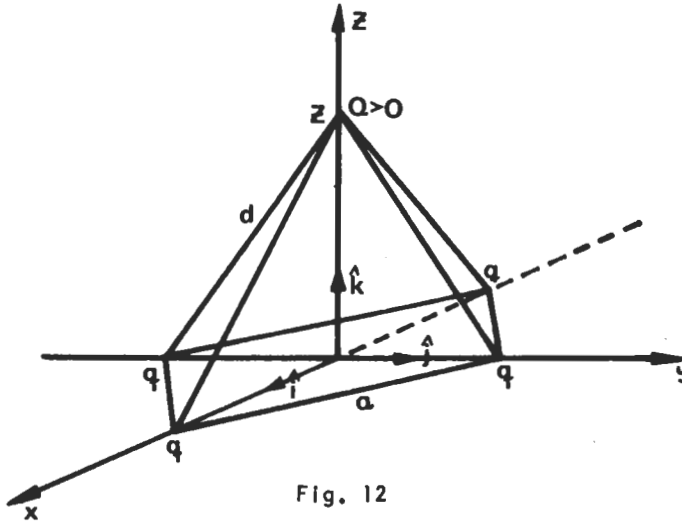


Fig. 12

$$V(z) = \frac{q}{\pi \epsilon \epsilon_0 \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

$$W(z) = QV(z)$$

$$W(z) = \frac{Qq}{\pi \epsilon \epsilon_0 \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

$$\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 W \big|_{z=0} = -\frac{Qq}{\pi \epsilon \epsilon_0} \left( -\frac{a^2}{2} \right)^{-3/2} > 0,$$

pues  $q < 0$ ; luego el equilibrio es estable en el centro.

El teorema de Earnshaw dice que en un campo electrostático no existen puntos de equilibrio estable, si sólo actúan fuerzas eléctricas. En nuestro caso no sólo actúan fuerzas eléctricas, sino que también hay fuerzas externas que mantienen a la carga  $Q$  dentro del tubo; si éste no existiera,  $Q$  estaría en equilibrio inestable, pues sería atraída por alguna de las cargas  $q$ .

Es por esta misma razón que el núcleo atómico se mantiene como tal: existen fuerzas nucleares mucho mayores que la fuerza de repulsión electrostática entre los protones.

$$II. \quad W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$$

$$V(A) = V(C) = \frac{1}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \left[ \frac{-q}{a} + \frac{-q}{a} + \frac{q}{a\sqrt{2}} \right] = \frac{q}{4\pi a \epsilon \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right]$$

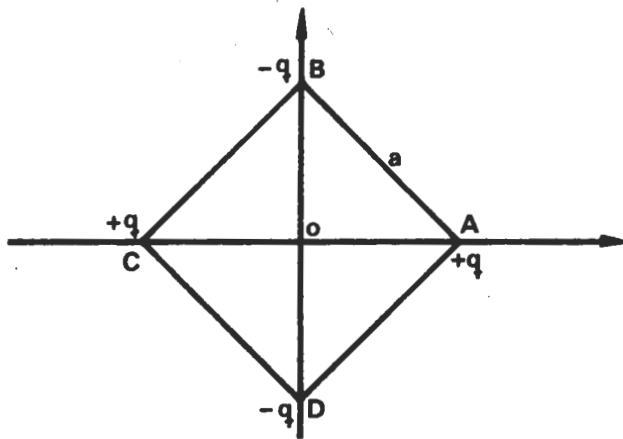


Fig. 13

$$V(B) = V(D) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[ \frac{q}{a} + \frac{q}{a} + \frac{-q}{a\sqrt{2}} \right] = \frac{q}{4\pi a\epsilon\epsilon_0} \left[ 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$$

$$W = \frac{1}{2} \left[ q V(A) - q V(B) + q V(C) - q V(D) \right]$$

$$W = \frac{1}{2} q \frac{q}{4\pi a\epsilon\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right]$$

$$W = \frac{q^2}{2\pi a \epsilon\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right] .$$

$$\epsilon = 1 + \chi = 81$$

$$q = 10^{-9} \text{ [Coulomb]}$$

$$a = 10^{-3} \text{ [m]}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{\text{Farad}}{\text{m}} \right]$$

Entonces:

$$W = - 2,87 \cdot 10^{-7} \text{ [Joule]}$$

El signo negativo de la energía quiere decir que, para formarlo, el cuadrupolo ha trabajado sobre el agente externo; esto puede verse claramente si se piensa que al dejar de actuar las fuerzas externas que mantienen el cuadrupolo formado, las 4 cargas tienden a juntarse en el centro del cuadrado.

**PROBLEMA 5.-**

I. Se tiene una distribución rectilínea de carga de densidad  $\lambda$  por unidad de longitud (constante). Un punto P está a una distancia  $r$  de la distribución, y su proyección sobre la recta de carga está a las distancias  $l_1$  y  $l_2$  de sus extremos. (Ver Fig. 14)

- Calcule el campo eléctrico en P.
- Haga una primera aproximación para obtener  $E$  cuando:

$r \ll l_1 + l_2$ ,  $r \gg l_1 + l_2$  y cuando  $l_1$  y  $l_2$  tienden a infinito.

II. Suponga ahora que la recta de carga es infinitamente larga, y que coincide con el eje  $Oz$  de un sistema de referencia  $Oxyz$ . (Ver Fig. 15)

- Es el campo  $\vec{E}$  perpendicular a  $Oz$ ?
  - Está  $\vec{E}$  contenido en el plano que pasa por  $Oz$  y por el punto de observación en cuestión?
  - Depende  $\vec{E}$  de  $z$ ?
  - El teorema de Gauss se demostró en clases para cargas puntuales; ¿por qué puede aplicarlo en este problema?
  - Para calcular  $\vec{E}$ , Ud. aplicará el teorema de Gauss a un cilindro adecuado; dibuje el elemento vectorial de superficie  $d\vec{S}$  en todas las "caras" de la superficie cilíndrica; ¿contribuyen las bases del cilindro al flujo de  $\vec{E}$  a través de él?
  - Calcule  $\vec{E}$  en un punto cualquiera del espacio.
  - Haga un gráfico aproximado comparando este campo con el producido por una carga puntual.
  - Calcule la función potencial y fije la constante de integración; es el potencial cero en el infinito? Explique.
- Justifique todas sus respuestas.

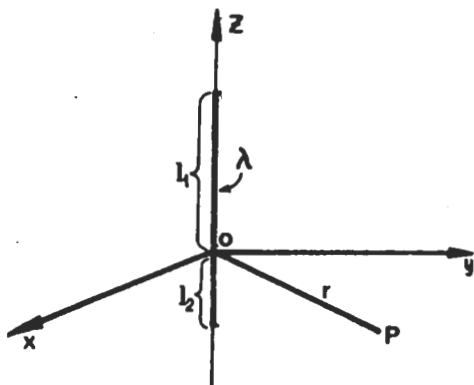


Fig. 14

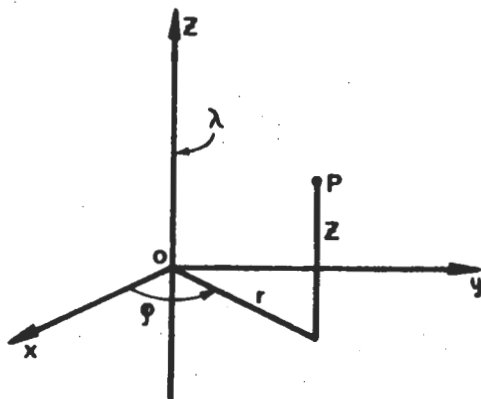


Fig. 15

**Resolución.**

I. El problema tiene simetría cilíndrica en torno al eje  $Oz$ , de modo que el campo eléctrico (en módulo) dependerá sólo de  $r$ ,  $l_1$ , y  $l_2$ .

$$a) \quad d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(R)}{|R-P|^3} \vec{R-P}$$

$$\vec{R-P} = \vec{O-P} - \vec{O-R} = r \hat{r} - z \hat{k}$$

$$|\vec{R-P}| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$dq(R) = \lambda dz$$

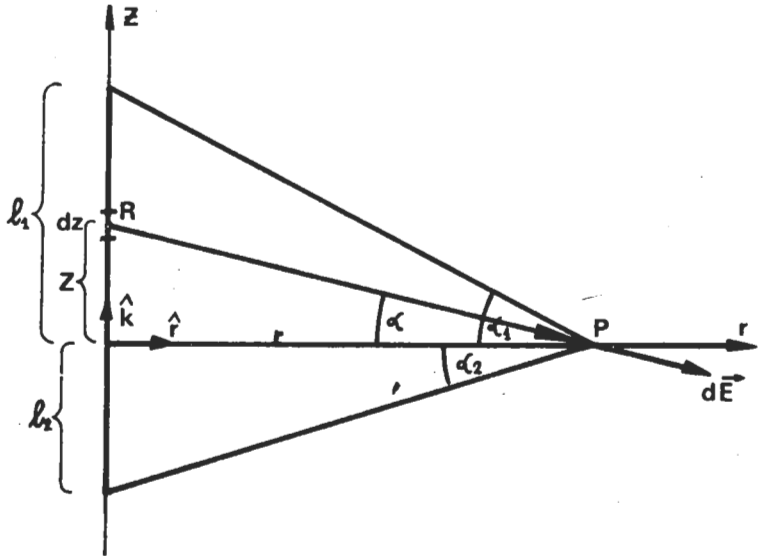


Fig. 16

La variable de integración más cómoda es el ángulo  $\alpha$ , formado por los vectores  $\vec{PR}$  y  $\vec{PO}$ ; los límites de integración serán  $\alpha_1$  y  $-\alpha_2$  (superior e inferior, respectivamente). Expresemos todas las variables que tenemos en función de  $\alpha$ :

$$\frac{z}{r} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \cos \alpha;$$

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{r}{\sqrt{l_{1,2}^2 + r^2}}$$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \operatorname{sen} \alpha;$$

$$\operatorname{sen} \alpha_{1,2} = \frac{l_{1,2}}{\sqrt{l_{1,2}^2 + r^2}}$$

Luego:

$$\frac{\vec{RP}}{|\vec{RP}|^3} = \frac{r \hat{r} - z \hat{k}}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\hat{r} \cos \alpha - \hat{k} \operatorname{sen} \alpha}{r^2 \sec^2 \alpha}$$

$$dz = \frac{dz}{d\alpha} d\alpha = r \sec^2 \alpha d\alpha$$

luego:

$$d\vec{E}(P) = \frac{\lambda r \sec^2 \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{r} \cos \alpha - \hat{k} \operatorname{sen} \alpha}{r^2 \sec^2 \alpha}$$

$$d\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\hat{r} \cos \alpha - \hat{k} \operatorname{sen} \alpha] d\alpha$$

$$\vec{E}(P) = \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} d\vec{E}(P)$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} [\hat{r} (\operatorname{sen} \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_1) + \hat{k} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)]$$



$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \hat{r} \left( \frac{l_2}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} \right) + \hat{k} \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} - \frac{r}{\sqrt{r^2 + l_2^2}} \right) \right]$$

b) i) Cuando  $r \ll l_1 + l_2$ ,

$$\begin{cases} l_2^2 + r^2 \approx l_2^2 \\ l_1^2 + r^2 \approx l_1^2 \end{cases};$$

luego:  $\vec{E}(P) \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 2\hat{r} + \hat{k}r \left( \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right) \right]$

ii) Cuando  $r \ll l_1 + l_2$ ,  $r^2 + l_1^2 \approx r^2 + l_2^2 \approx r^2$ ; luego:

$$\vec{E}(P) = \frac{\hat{r} \lambda (l_1 + l_2)}{r \pi \epsilon_0 r^2}$$

pero  $\lambda (l_1 + l_2) = q$ , en que  $q$  es la carga total de la distribución; luego:

$$\vec{E}(P) \approx \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

es decir, para distancias muy grandes, el campo se comporta como si se tratara de una carga puntual, tal como intuitivamente uno esperaría.

iii) Cuando  $l_1, l_2 \rightarrow \infty$  entonces

$$\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

luego:  $\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \hat{r} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) + \hat{k} \left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) \right],$

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda \hat{r}}{2\pi\epsilon_0 r},$$

II. c) El campo  $\vec{E}$  es perpendicular a  $Oz$  porque la distribución de carga es infinita y homogénea, y el espacio tiene simetría cilíndrica con respecto al eje  $Oz$ , en consecuencia, las líneas de campo serán rectas que parten perpendicularmente desde el eje  $Oz$  y llegan al infinito.

d) El campo  $\vec{E}$  está contenido en el plano que pasa por  $P$  y  $Oz$  porque las líneas de campo son radiales.

e) El campo  $\vec{E}$  no depende de  $z$ , porque la distribución de carga es infinita y homogénea (no depende de  $z$ ); en consecuencia hay invariancia frente a traslaciones paralelas a  $Oz$ .

f) Una distribución continua de carga puede considerarse como una superposición de cargas puntuales, y como en electrostática es válido el principio de superposición, el teorema de Gauss será válido también para distribuciones continuas de carga.

g) Las bases del cilindro no contribuyen al flujo de  $\vec{E}$  a través de él, porque sobre ellas,  $\vec{E} \perp d\vec{S}$ , luego  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ .

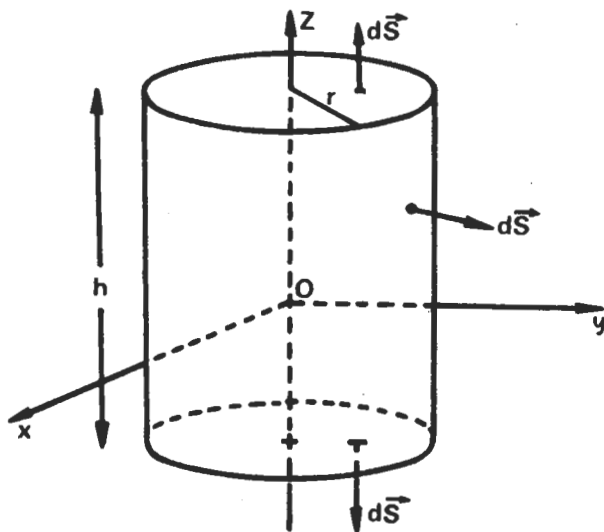


Fig. 17

h) Apliquemos el teorema de Gauss al cilindro dibujado:

$$\oint_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

como  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  es constantemente igual a  $E dS$  sobre la superficie del cilindro, entonces

$$\oint_{\text{cil.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{cil.}} E(r) dS = \int_{z=-h/2}^{h/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} E(r) \cdot r d\theta dz =$$

$$\oint_{\text{cil.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E r h \cdot 2\pi = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

y 
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

(recuerde el resultado de la parte (i), (b), (iii).

i) En el caso de una carga puntual, el campo eléctrico depende de  $\frac{1}{r^2}$  ;  
el gráfico será: (Ver Fig. 18).

j) La función potencial  $V(r)$  es:

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C,$$

e integrando a lo largo de una recta radial,

$$V = - \int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr + C$$

$$V = - \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \text{Log } r + C$$

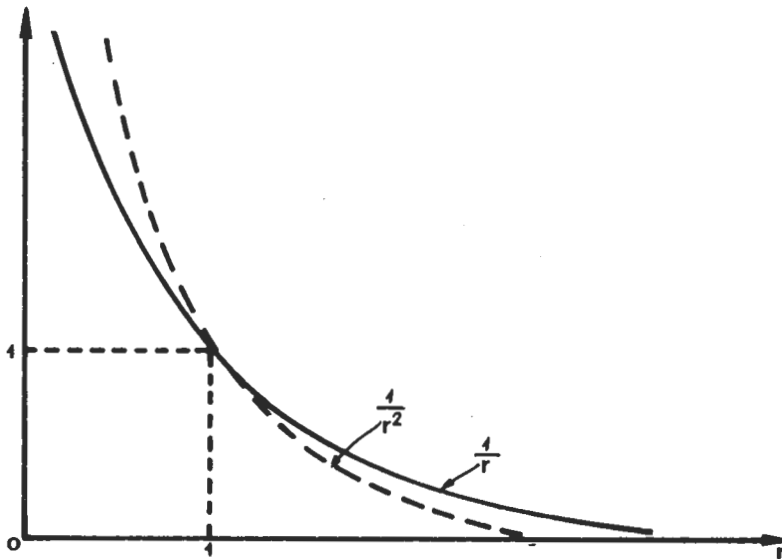


Fig. 18

La constante de Integración  $C$  puede fijarse arbitrariamente; una manera de hacerlo es la siguiente; nos fijamos que  $V$  en  $r = 1$  es  $C$ , puesto que  $\text{Log } 1 = 0$ ; en consecuencia,  $C$  representa el potencial de los puntos que están sobre el manto del cilindro de radio unitario, coaxial con  $Oz$ . El valor de  $C$  es totalmente arbitrario, por ejemplo, cero; en este caso,  $V(r)$  representa el potencial de un punto cualquiera con respecto a este cilindro unitario (en realidad, debiera decirse diferencia de potencial) tomado como origen de potenciales. El potencial en el infinito es menos infinito; sólo se puede decir que el potencial es cero en el infinito para distribuciones cuya carga eléctrica total es finita (y siempre que se escoja la constante de integración adecuada).

Nota: Hemos aplicado el teorema de Gauss para la segunda parte solamente, debido a su fuerte simetría en torno al eje  $Oz$ , sin embargo, la simetría no es una limitación para la validez del teorema. El teorema de Gauss es válido siempre, pero cuando no hay simetría, resulta bastante complicado el cálculo de  $E$  por este método; además, para poder calcular  $E$  a partir de este teorema, es necesario conocer alguna propiedad del campo antes de calcularlo, y es necesario que  $|E|$  sobre la superficie de integración no dependa de las variables que describen esta superficie, para poder sacar  $|E|$  fuera de la integral.

#### PROBLEMA 6.-

Se tiene un potencial  $V = \frac{k}{r}$ , en que  $k$  es una constante y  $r$  es la distancia al foco de potencial, que supondremos en el origen de coordenadas.

- Calcule  $\nabla^2 V$ . ¿Qué pasa en  $r = 0$ ?
- Defina la delta de Dirac  $\delta(r)$ , compárela con  $\nabla^2(\frac{1}{r})$  y deduzca la relación entre ambos.
- Calcule la constante introducida en (b).

d) Demuestre que  $\delta(r)$  tiene dimensiones del inverso de un volumen.

e) Escriba la ecuación de Poisson, y suponiendo  $V = \frac{k}{r}$ , calcule  $k$ .

### Resolución.

a) En coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , el laplaciano se escribe

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

pero  $V = \frac{k}{r}$  no depende de  $\theta$  ni  $\varphi$ ; luego:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= \frac{k}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \right] \\ &= \frac{k}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \left( -\frac{1}{r^2} \right) \right] = 0 \quad \text{si } r \neq 0; \end{aligned}$$

en  $r = 0$ ,  $\nabla^2 V$  diverge:  $\nabla^2 V = \infty$  si  $r = 0$ .

b) La delta de Dirac se define así:

$$\delta(r) = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

de tal modo que

$$\iiint_{\mathcal{V}} \delta(r) d\mathcal{V} = \begin{cases} 0 & \text{si el origen no pertenece a } \mathcal{V} \\ 1 & \text{si el origen pertenece a } \mathcal{V} \end{cases}$$

Por otra parte,

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq 0 \\ \infty & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Luego:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \alpha \delta(r) \quad \text{-----} \quad (1),$$

en que  $\alpha$  es una constante por determinar.

c) Integremos la ecuación (1) en un volumen  $\mathcal{V}$  que contenga al origen:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\mathcal{V} &= \alpha \iiint_{\mathcal{V}} \delta(r) d\mathcal{V} = \alpha \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\mathcal{V} \\ &= \oint_{S(\mathcal{V})} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{S}, \text{ en que } S(\mathcal{V}) \text{ es la superficie cerrada que} \\ &\quad \text{encierra al volumen } \mathcal{V} \\ &= - \oint_{S(\mathcal{V})} \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = - \oint_{S(\mathcal{V})} d\Omega = -4\pi \end{aligned}$$

( $d\Omega$  es por definición un elemento de ángulo sólido con centro en el origen);

$$\text{luego: } \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r)$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \iiint_V \delta(r) d\tau &= 1 \Rightarrow [\delta(r)] \cdot [\text{volumen}] = \\ &= [\text{sin dimensión}] \Rightarrow [\delta(r)] = \left[ \frac{1}{\text{volumen}} \right] \end{aligned}$$

e) La ecuación de Poisson es:

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

pero  $V = \frac{k}{r}$

$$\text{luego } k \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

$$- 4 \pi k \delta(r) = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

$$\iiint_V 4 \pi k \delta(r) d\tau = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}$$

$$4 \pi k = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}$$

$$\text{luego: } V = \frac{q}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 r}$$

### PROBLEMA 7.-

Se tienen dos planos paralelos infinitos de ecuaciones  $z = \frac{a}{2}$  y  $z = -\frac{a}{2}$ , respectivamente. Entre ellos existe una distribución de carga de densidad  $\rho = \rho(z)$ ; fuera de ellos, el vacío. Calcule el campo eléctrico en todos los puntos del espacio. Aplique al caso en que  $\rho$  es constante.

### Resolución.

Resolveremos el problema por varios métodos, dada su simplicidad y su fuerte simetría. Las siguientes observaciones nos serán útiles:

a) Puesto que  $\rho$  depende sólo de  $z$ , y como la distribución de carga es plana e infinita,  $\vec{E}$  será sólo función de  $z$ .

b) La distribución de carga puede suponerse compuesta por planos paralelos de espesor  $\Delta z'$  que ocupan el volumen correspondiente a la distribución; a estos planos se les puede asignar la densidad de carga  $\sigma = \sigma(z')$  de la siguiente manera:

$$\Delta q = \rho(z') \Delta x' \Delta y' \Delta z'$$

$$\Delta q = \sigma(z') \Delta z'$$

$$\sigma(z') = \rho(z') \Delta z'$$

(hemos acentuado las variables de integración para distinguirlas de las variables de observación, es decir, las que describen el punto en el que medimos el campo eléctrico).

c) Como el campo producido por un plano infinito con densidad de carga uniforme es perpendicular a él, no depende de la distancia a él, y es simétrico con respecto a él, en nuestro caso se cumplirá que:

- i)  $\vec{E}$  será colineal con  $\hat{k}$  (perpendicular a los planos);
- ii) para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}$  será simétrico con respecto al plano  $z = 0$  (Igual y de sentido contrario).
- iii) para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}$  será constante.

(Estas dos últimas observaciones surgen del hecho que para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}$  será

la suma de los campos producidos por los planos definidos en (b); puesto que estos campos no dependen de la distancia al plano que los produce, entonces, para  $|z| \gg \frac{a}{2}$ , toda la distribución de carga se comporta como un solo plano, que se obtendría juntando todos los planos en uno solo).

d) para el caso  $\rho = \text{cte.}$ , por simetría,  $\vec{E}$  será cero en el plano  $z = 0$ , y será simétrico con respecto a este plano para  $z \neq 0$ .

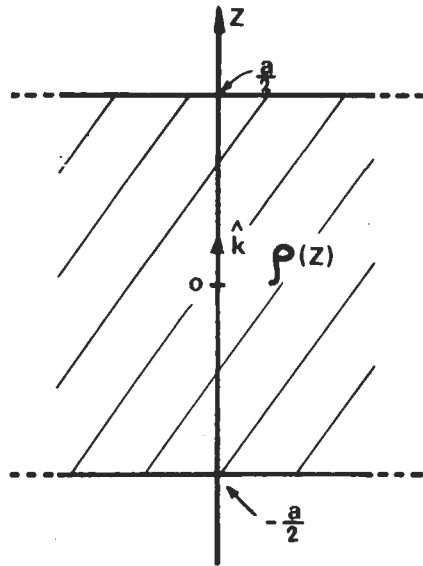


Fig. 20

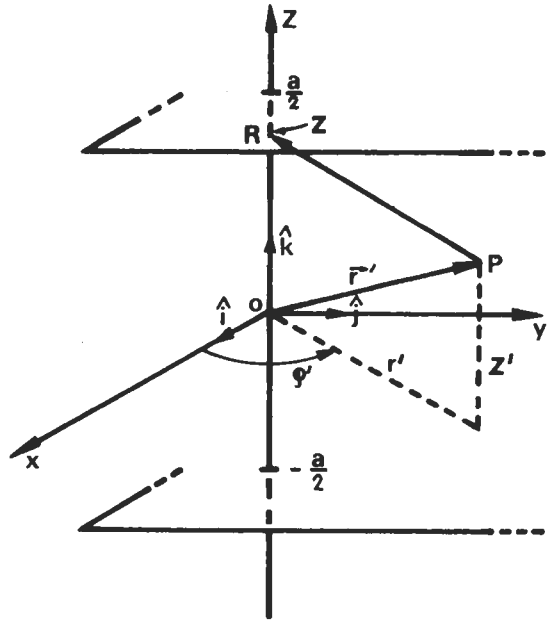


Fig. 21

Sea  $R(z)$  el punto en que queremos calcular  $\vec{E}$ ; para  $z < \frac{a}{2}$

$$d\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq(P)}{|\vec{PR}|^3} \vec{PR}$$

$$dq(P) = \rho d\vec{\mathcal{B}}' = \rho r' dr' d\varphi' dz'$$

$$\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP} = z \hat{k} - r' \cos \varphi' \hat{i} - r' \sin \varphi' \hat{j} - z' \hat{k}$$

$$|\vec{PR}| = \sqrt{(z - z')^2 + r'^2}$$

$$d\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho r' dr' d\varphi' dz'}{[(z-z')^2 + r'^2]^{3/2}} \left[ (z-z')\hat{k} - r'\cos\varphi'\hat{i} - r'\sin\varphi'\hat{j} \right]$$

$$\vec{E}(z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{r'=0}^{\infty} d\vec{E}(z)$$

Integrando según  $\varphi'$  resulta:

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{z'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{r'=0}^{\infty} \frac{r' dr' (z-z') dz'}{[(z-z')^2 + r'^2]^{3/2}}$$

Integrando según  $r'$ , queda:

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{z-z'}{\sqrt{(z-z')^2}} \rho(z') dz' ;$$

$$\text{pero } \sqrt{(z-z')^2} = |z-z'| = \begin{cases} z-z' & \text{si } z > z' \\ z'-z & \text{si } z < z' \\ 0 & \text{si } z = z' \end{cases}$$

luego es necesario dividir el intervalo de integración  $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  que recorre  $z'$  en 2 regiones:

$(-\frac{a}{2} \leq z' \leq z)$  y  $(z \leq z' \leq \frac{a}{2})$ ; es decir:

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ \int_{-\frac{a}{2}}^z \frac{\rho(z')(z-z') dz'}{(z-z')} + \int_z^{\frac{a}{2}} \frac{\rho(z')(z-z') dz'}{(z'-z)} \right]$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \left[ \int_{-\frac{a}{2}}^z \rho(z') dz' - \int_z^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz' \right] .$$

Para  $z \geq \frac{a}{2}$ ,

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz' ,$$

y para  $z \leq -\frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}(z)$  será igual pero de signo opuesto, pues la integral debe realizarse en el otro sentido.

En el caso en que  $\rho = \text{cte.}$ :

para  $|z| \leq \frac{a}{2}$

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k} \rho}{2\epsilon_0} \left[ \rho \left( z + \frac{a}{2} \right) - \rho \left( \frac{a}{2} - z \right) \right]$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\hat{k} \rho z}{\epsilon_0} ,$$

y para  $z > \frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}(z) = \frac{\hat{k} \rho a}{2 \epsilon_0}$

y para  $z \leq -\frac{a}{2}$ ,  $\vec{E}(z) = -\frac{\hat{k} \rho a}{2 \epsilon_0}$

2º Método: teorema de Gauss (para  $|z| > \frac{a}{2}$ )

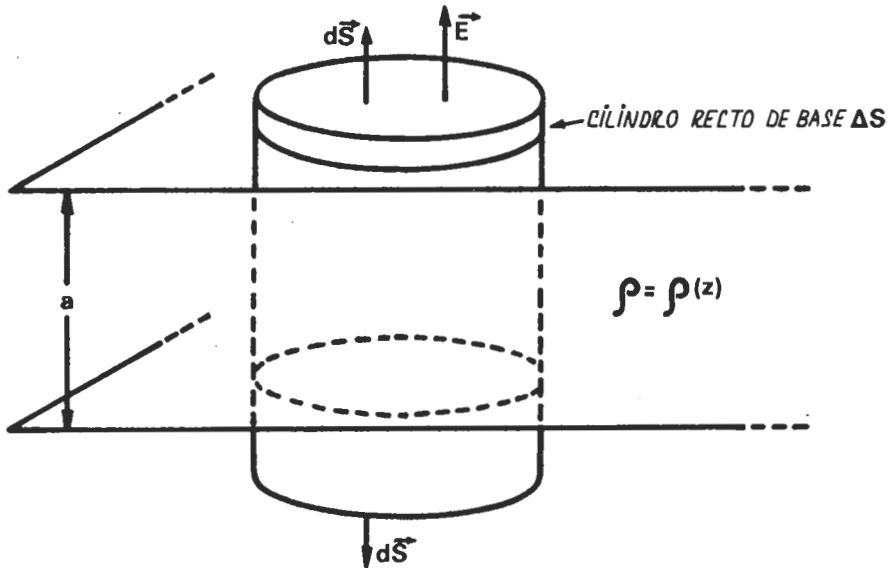


Fig. 22

Recordando las observaciones (c) y aplicando el teorema de Gauss al cilindro recto de base  $\Delta S$  de la figura:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho d\tau$$

$$\text{c)l} \quad 2 E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta S \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz'$$

luego:  $\vec{E}(z) = \frac{\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz'$  (para  $z > \frac{a}{2}$ ),

y cambia de signo para  $z < -\frac{a}{2}$ .

Este mismo método se puede aplicar para  $|z| < \frac{a}{2}$ , en el caso en que  $\rho$  es constante:

Recordando que  $\vec{E}$  es paralelo al eje  $Oz$  y la observación (d), y aplicando el teorema de Gauss al cilindro recto de base  $\Delta S$  de la figura (notamos que las bases del cilindro están a igual distancia del origen):



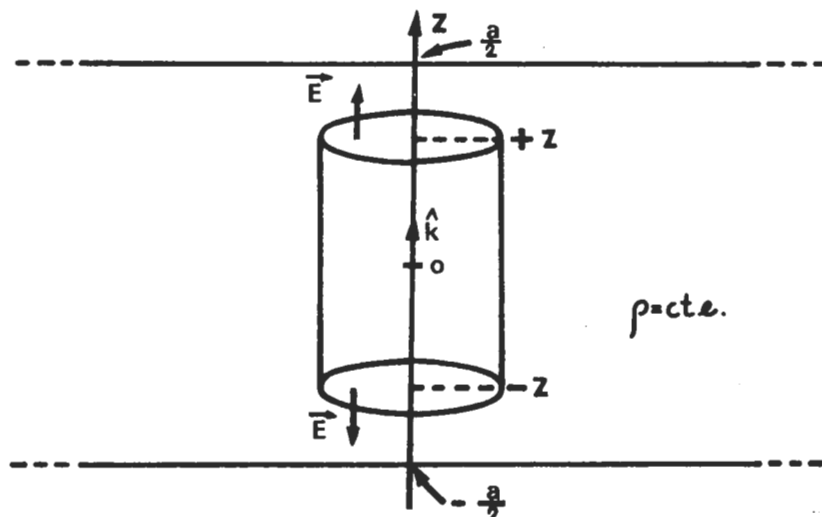


Fig. 23

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, d\mathcal{V}$$

cil (sup)                      cil (vol)

$$2E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho \cdot 2z \Delta S$$

$$\text{Luego } \vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \hat{k},$$

3<sup>er</sup> Método: ecuación de Poisson, para  $\rho = \text{cte}$ , y  $|z| \leq \frac{a}{2}$

Dentro de la distribución de carga, es decir, en  $|z| \leq \frac{a}{2}$ , se tiene:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0};$$

pero  $V = V(z)$ , pues la distribución varía con  $z$  y es infinita:

$$\text{Entonces } \frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho z}{\epsilon_0} + K$$

Pero  $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz} \hat{k}$  vale cero para  $z = 0$  (ver observación (d)).

Se tiene entonces, sucesivamente:

$$\left. \frac{dV}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

$$K = 0$$

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho z}{\epsilon_0}$$

$$V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + K'$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{k} \frac{dV}{dz} = \frac{\rho z \hat{k}}{\epsilon_0}$$

Este método no tiene ventaja alguna para  $|z| \geq \frac{a}{2}$ , porque para determinar las constantes de integración se necesita conocer el campo eléctrico en algún punto del espacio.

40 Método: superposición de planos (para  $|z| \geq \frac{a}{2}$ )

Recordando las observaciones (b) y (c), podemos reducir toda la distribución de carga a un solo plano, juntando en uno sólo todos los planos definidos en (b), de tal modo que no se pierda carga; es decir, que si tomamos un disco de área  $\Delta S$  sobre este plano y calculamos su carga ( $\sigma \cdot \Delta S$ ), ésta deberá ser igual a la carga total encerrada por un cilindro con este mismo disco de base, y de altura  $a$ , en el caso de la distribución maciza anterior:

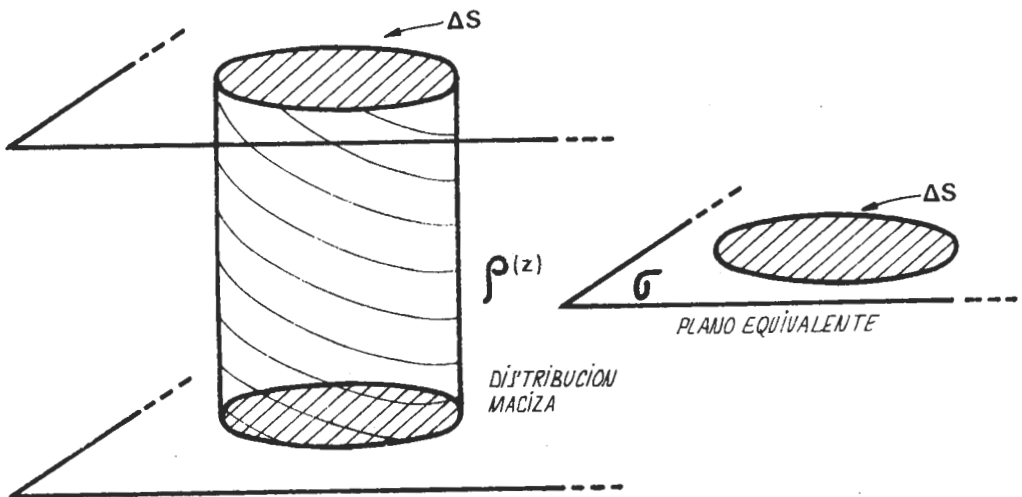


Fig. 24

$$\begin{aligned} \sigma \Delta S &= \iiint_{\text{cil}} \rho(z') dz' \\ \sigma \Delta S &= \Delta S \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz' \\ \sigma &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz' \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Gauss a un cilindro que es cortado por este plano, y recordando la observación (c):

$$\oint_{\text{cil}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$$

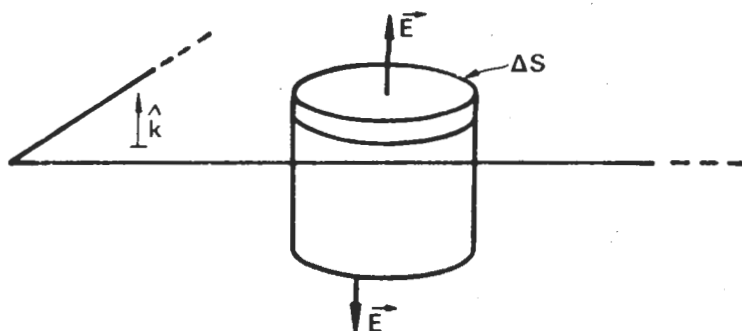


Fig. 25

$$2E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \hat{k}$$

$$\vec{E} = \frac{\hat{k}}{2 \epsilon_0} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho(z') dz' \quad , \quad \text{para } z > \frac{a}{2} ,$$

y cambia de sentido para  $z < -\frac{a}{2}$ .

#### PROBLEMA 8.-

Se tiene un campo eléctrico constante y uniforme en todo el espacio (vacío),  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{k}$ , en que  $\hat{k}$  es un vector unitario según el eje Oz.

Se introduce luego una esfera de material dieléctrico de constante dieléctrica  $\epsilon$ , y de radio R. Como consecuencia de esto, el campo eléctrico se deforma. Tómese el origen de coordenadas en el centro de la esfera. Llámase región I al interior de la esfera, y región II al exterior.

a) Se sabe (esto es un dato) que la solución para el potencial en ambas regiones se escribe, en coordenadas esféricas:

$$V = \begin{cases} V_I = A_1 r \cos \theta + B_1 \frac{\cos \theta}{r^2} & (r \leq R) \\ V_{II} = A_2 r \cos \theta + B_2 \frac{\cos \theta}{r^2} & (r \geq R) \end{cases}$$

Calcule las constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ .

b) Calcule el campo eléctrico en el interior de la esfera.

c) Calcule la densidad superficial de carga de polarización sobre la superficie de la esfera.

#### Resolución.

a) Para calcular las cuatro constantes, escribamos las condiciones de borde para el problema:

i) El potencial debe ser finito en todas las regiones del espacio (salvo en el infinito), pues el campo eléctrico debe estar bien definido en todas

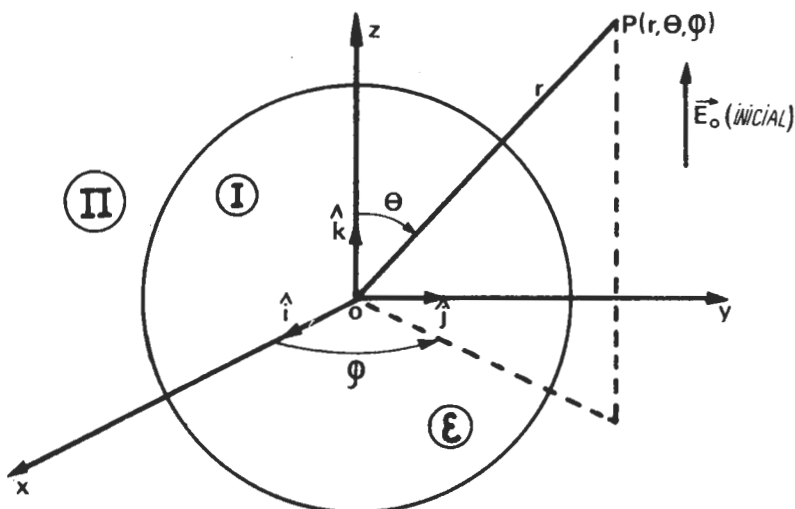


Fig. 26

ellas (no se han introducido cargas puntuales).

ii) Para las regiones del espacio muy alejadas de la esfera, la distorsión del campo producida por la esfera debe desaparecer.

iii) El potencial debe ser continuo sobre la superficie de la esfera, pues, de no ser así, el campo eléctrico estaría indeterminado sobre ella.

iv) En la superficie de la esfera, la componente normal del vector desplazamiento debe ser continua, pues allí no hay carga libre.

Con estas cuatro condiciones de borde nos será fácil calcular las constantes.

El potencial es:

$$V = \begin{cases} V_I = A_1 r \cos \theta + B_1 \frac{\cos \theta}{r^2} & , \quad r \leq R \\ V_{II} = A_2 r \cos \theta + B_2 \frac{\cos \theta}{r^2} & , \quad r \geq R \end{cases}$$

La condición (i) implica inmediatamente:

$$B_1 = 0 \quad \text{-----} \quad (1),$$

pues, de no ser así, el potencial será infinito en  $r = 0$ .

La condición (ii) es:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E} = \vec{E}_0$$

para  $r \rightarrow \infty$ ,

$$V = V_{II} \rightarrow A_2 r \cos \theta = A_2 z$$

$$\text{luego: } \vec{E} = -\nabla V = -A_2 \hat{k}$$

y esto debe ser igual a  $\vec{E}_0$  :

$$E_0 \hat{k} = -A_2 \hat{k}$$

luego:  $A_2 = -E_0$  ----- (2)

La condición (iii) es:

$$V_I(R, \theta) = V_{II}(R, \theta), \text{ para } \forall \theta.$$

$$V_I(r = R) = A_1 R \cos \theta$$

$$V_{II}(r = R) = -E_0 R \cos \theta + B_2 \frac{\cos \theta}{R^2};$$

igualando y simplificando por  $\cos \theta$ , resulta:

$$R A_1 = -E_0 R + \frac{B_2}{R^2} \text{ ----- (3)}$$

La condición (iv) es:

$$D_{nI}(r = R) = D_{nII}(r = R) \text{ para } \forall \theta.$$

$$\vec{D}_I = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_I = -\epsilon \epsilon_0 \nabla V_I, \text{ y lo mismo para } \vec{D}_{II};$$

$$D_{nI} = \vec{D}_I \cdot \hat{r} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial V_I}{\partial r}$$

$$D_{nII} = \vec{D}_{II} \cdot \hat{r} = -\epsilon_0 \frac{\partial V_{II}}{\partial r}$$

$$-\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial V_I}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\epsilon_0 \frac{\partial V_{II}}{\partial r} \Big|_{r=R}, \forall \theta$$

$$-\epsilon \epsilon_0 A_1 \cos \theta = -\epsilon_0 (-E_0 \cos \theta - 2 B_2 \frac{\cos \theta}{R^3})$$

luego:  $\epsilon A_1 = -E_0 - \frac{2B_2}{R^3}$  ----- (4)

Las relaciones (3) y (4) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:  $A_1$  y  $B_2$ ; resolviéndolo, resulta:

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\epsilon + 2} \text{ ----- (5)}$$

$$B_2 = \frac{E_0 R^3 (\epsilon - 1)}{\epsilon + 2} \text{ ----- (6)}$$

y el potencial se escribirá, finalmente:

$$V = \begin{cases} V_I = -\frac{3E_0}{\epsilon + 2} r \cos \theta, & r \leq R \\ V_{II} = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^3 (\epsilon - 1)}{\epsilon + 2} \frac{\cos \theta}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

b) Para calcular  $E_I$ , conviene escribir  $V_I$  en coordenadas cartesianas:

$$V_I = - \frac{3 E_0}{\epsilon + 2} z ;$$

luego:

$$\vec{E}_I = - \nabla V_I = - \hat{k} \frac{dV_I}{dz}$$

$$\vec{E}_I = \frac{3\vec{E}_0}{\epsilon + 2}$$

c) Se sabe que  $\sigma_p = P_n$  ( $r = R$ ),  $\forall \theta$ .

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_I + \vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_I$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}_I$$

$$P_n = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E_n ;$$

pero  $E_n = - \frac{\partial V_I}{\partial r}$

$$E_n \Big|_{r=R} = \frac{3E_0}{\epsilon + 2} \cos \theta$$

luego  $\sigma_p = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \frac{3E_0}{\epsilon + 2} \cos \theta$

Un rápido chequeo nos dice si hacemos desaparecer la esfera, es decir, ponemos  $\epsilon = 1$ , todas las ecuaciones nos dan los valores esperados:

$$V_I = V_{II}$$

$$\vec{E}_I = \vec{E}_{II} = \vec{E}_0$$

$$\sigma_p = 0$$

Es interesante notar que  $\vec{E}_I$  es uniforme y colineal con  $\vec{E}_0$ , pero de módulo menor, pues, en general,  $\epsilon > 1$ ; esto se debe al campo uniforme que las cargas de polarización sobre la superficie de la esfera producen en contra de  $\vec{E}_0$  ( $\rho_p = 0$ ). Puede definirse entonces un "campo depolarizante"  $\vec{E}_{dep}$ , como:

$$\vec{E}_{dep} = \vec{E}_0 - \vec{E}_I ;$$

también es posible definir un "factor de depolarización"  $L$  como

$$\epsilon_0 \vec{E}_{dep} = L \vec{P} ;$$

en el presente problema, es fácil calcular  $L$ ; en efecto,

$$\vec{E}_{dep} = \vec{E}_0 - \vec{E}_I = \vec{E}_0 - \frac{3}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0$$

$$\epsilon_0 \vec{E}_{dep} = L \vec{P} = L \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}_I$$

luego:  $\vec{E}_{dep} = L (\epsilon - 1) \frac{3 \vec{E}_0}{\epsilon + 2}$

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \vec{E}_0 = L \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} 3 \vec{E}_0$$

luego:  $L = \frac{1}{3}$ .

También es interesante notar que el potencial fuera de la esfera está constituido por la superposición de dos términos: uno es  $-E_0 r \cos \theta = -E_0 z$ , que es potencial debido al campo uniforme  $\vec{E}_0$  original; el otro término,

$$\frac{E_0 R^3 (\epsilon - 1)}{\epsilon + 2} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2}, \text{ que es el que da cuenta de la distorsión del}$$

campo, es idéntico al potencial que produciría un dipolo en el origen de la esfera, si su momento dipolar  $\vec{p}$  fuese:

$$\vec{p} = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 (\epsilon - 1) E_0 \hat{k}}{\epsilon + 2};$$

en efecto, el potencial producido por un dipolo de momento  $\vec{p}$  es

$$V_p(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$V_p(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

en que  $\theta$  es el ángulo que forman  $\vec{p}$  y  $\vec{r}$ ; comparando  $V_p(\vec{r})$  con el segundo término del potencial de la esfera,

$$\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{E_0 R^3 (\epsilon - 1) \cos \theta}{(\epsilon + 2) r^2}$$

luego:

$$p = \frac{4\pi\epsilon_0 E_0 R^3 (\epsilon - 1)}{\epsilon + 2}$$

y, considerando que  $\theta$  se mide a partir del eje Oz del problema, se deduce que  $p$  es colineal con  $\hat{k}$ :

$$\vec{p} = p \hat{k}.$$

De este modo, el único efecto de introducir una esfera dieléctrica uniforme en un campo eléctrico uniforme, es agregar al potencial externo a ella un término dipolar con origen en su centro y orientado según el campo uniforme original.

Se deja propuesto hacer el problema en el caso de una burbuja de aire que se ha introducido en el dieléctrico de un condensador de placas paralelas.

#### PROBLEMA 9.-

Un condensador está formado por dos esferas metálicas de radios  $a$  y  $b$ , y cuyos centros están a la distancia  $c$ , en que  $c \gg a, b$ . Calcule su capacidad.

#### Resolución.

la figura correspondiente será:

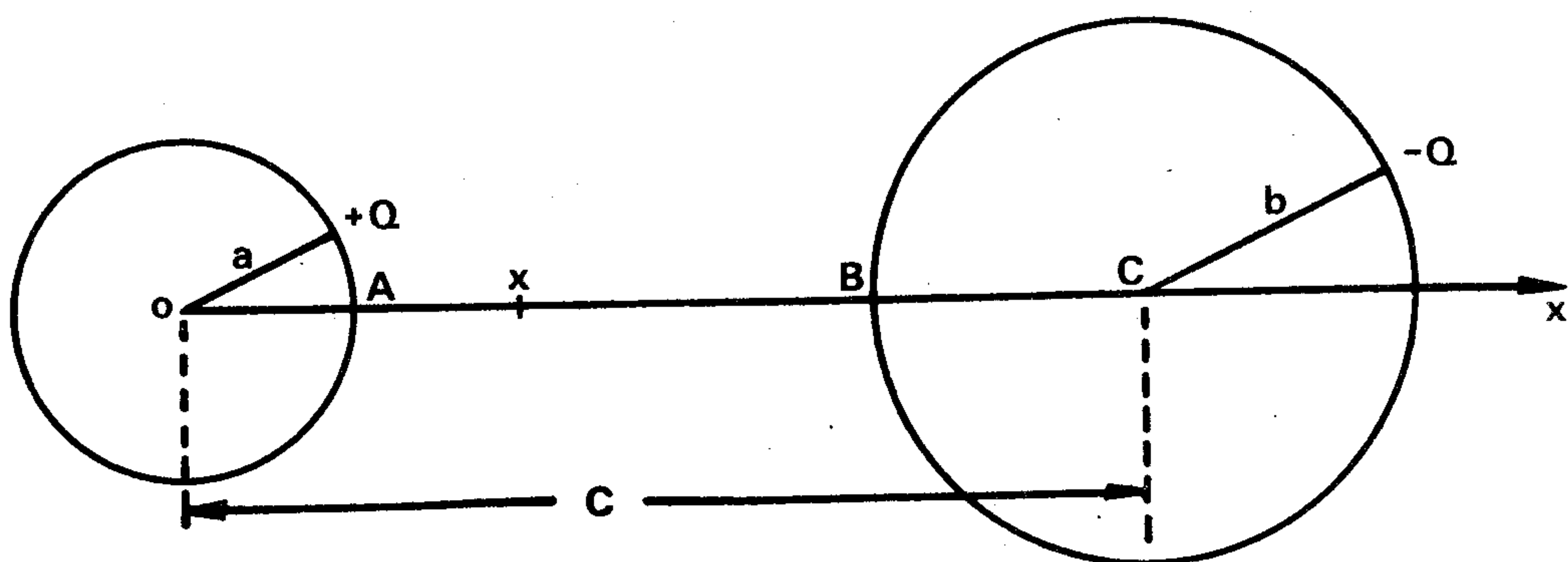


Fig. 27

El truco habitual para calcular capacidades es suponer que una de las armaduras del condensador tiene una carga  $+Q$  y la otra  $-Q$ . Enseguida, dada la geometría del sistema, se calcula el campo eléctrico en todo el espacio, o bien sólo en la región entre las armaduras. Luego se calcula su diferencia de potencial (en valor absoluto) integrando  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  a lo largo de un trayecto cómodo (cualquiera) que una las armaduras.

En nuestro caso, dada la simetría del sistema y la aproximación  $c \gg a, b$ , es fácil calcular directamente la función potencial sobre el eje  $Ox$ , que pasa por los centros de las esferas: podemos suponer que la carga de cada una de ellas está concentrada en su centro, de modo que se comportan como cargas puntuales. (Esto es sólo en primera aproximación, ya que los centros de carga se encuentran un poco desplazados uno hacia el otro, debido a la atracción electrostática).

La función potencial sobre el eje  $x$  será:

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (c - x)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{c - x} \right]$$

y la diferencia de potencial:

$$V(B) - V(A) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{c - b} - \frac{1}{c - a} \right]$$

y puesto que  $c \gg a, b$ ,

$$V(B) - V(A) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

Esta diferencia de potencial es negativa, de modo que su valor absoluto será:

$$V_1 = : \left| V(B) - V(A) \right| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c} \right]$$

y la capacidad:

$$C = \frac{Q}{V_1}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c}}$$



Un chequeo rápido nos dice que si llevamos la esfera mayor al infinito y hacemos tender su radio a infinito, ( $c \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$ )  $C$  nos da la capacidad habitual de una esfera aislada de radio  $a$ ,

$$C_a = 4\pi \epsilon_0 a.$$

**PROBLEMA 10.-**

Un condensador consiste de dos placas metálicas paralelas, de lados  $a$  y  $b$ , y separadas por una distancia  $d$ ; entre ellas existe el vacío, y la diferencia de potencial entre ellas se mantiene constantemente igual a  $V$  (mediante una batería, por ejemplo).

Se introduce una placa de material dieléctrico de constante  $\epsilon$ , de espesor  $t$  ( $t < d$ ) entre las placas del condensador y paralelas a ellas, en la forma que se indica en las figuras.

Calcular la fuerza que se ejerce sobre el dieléctrico.

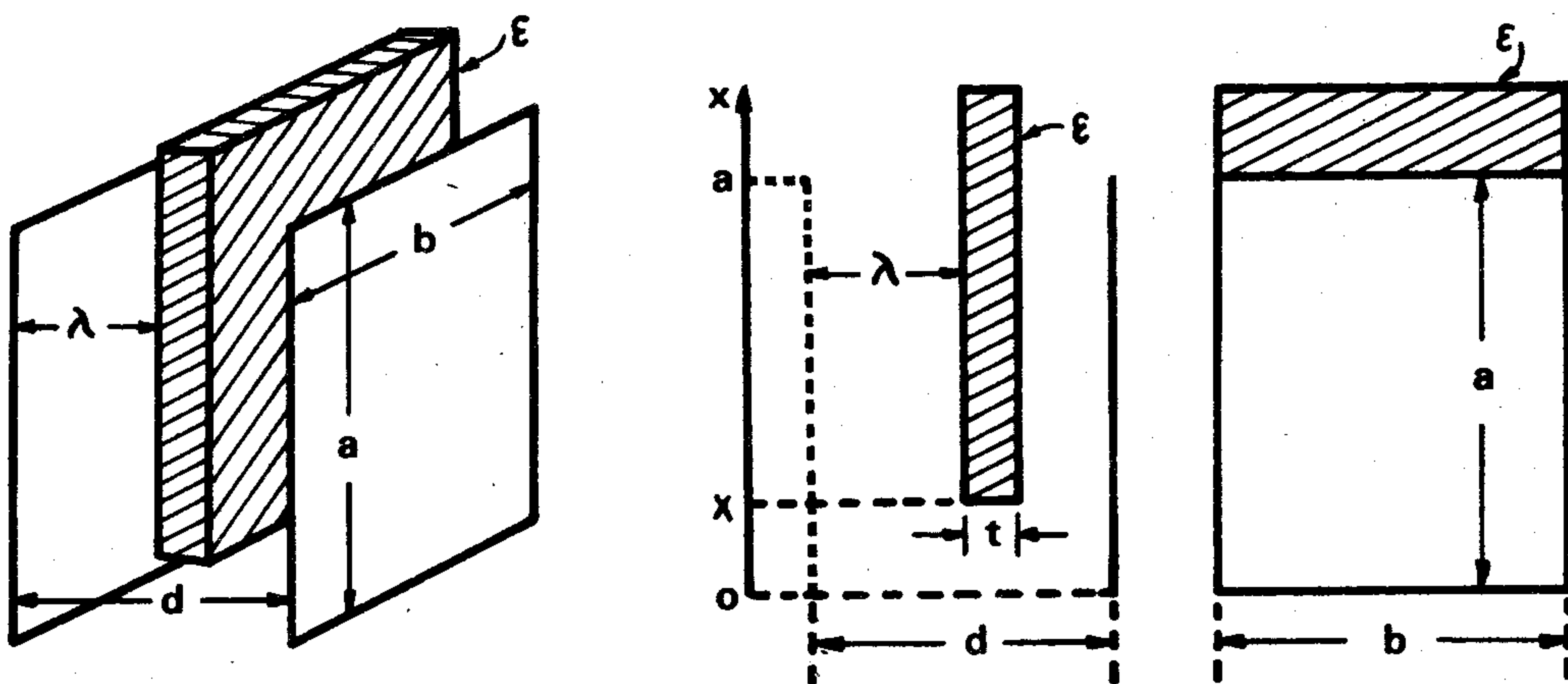


Fig. 28

**Resolución.**

Cuando la diferencia de potencial es constante, tenemos:

$$F_x = \frac{\partial W_v}{\partial x}$$

en que:

$$W_v = \frac{1}{2} \cdot C V^2.$$

$C$  es la capacidad del condensador;  $C = C(x)$ .

Para calcular la capacidad, podemos descomponer el condensador con el dieléctrico que lo llena parcialmente en dos condensadores conectados en paralelo en la forma que se indica en la figura, esto lo podemos hacer porque suponemos que se desprecian todos los efectos de borde, es decir, se supone que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es siempre perpendicular a las placas y existe sólo en la región comprendida entre ellas.

La capacidad de nuestro condensador será, entonces:

$$C = C_A + C_B$$

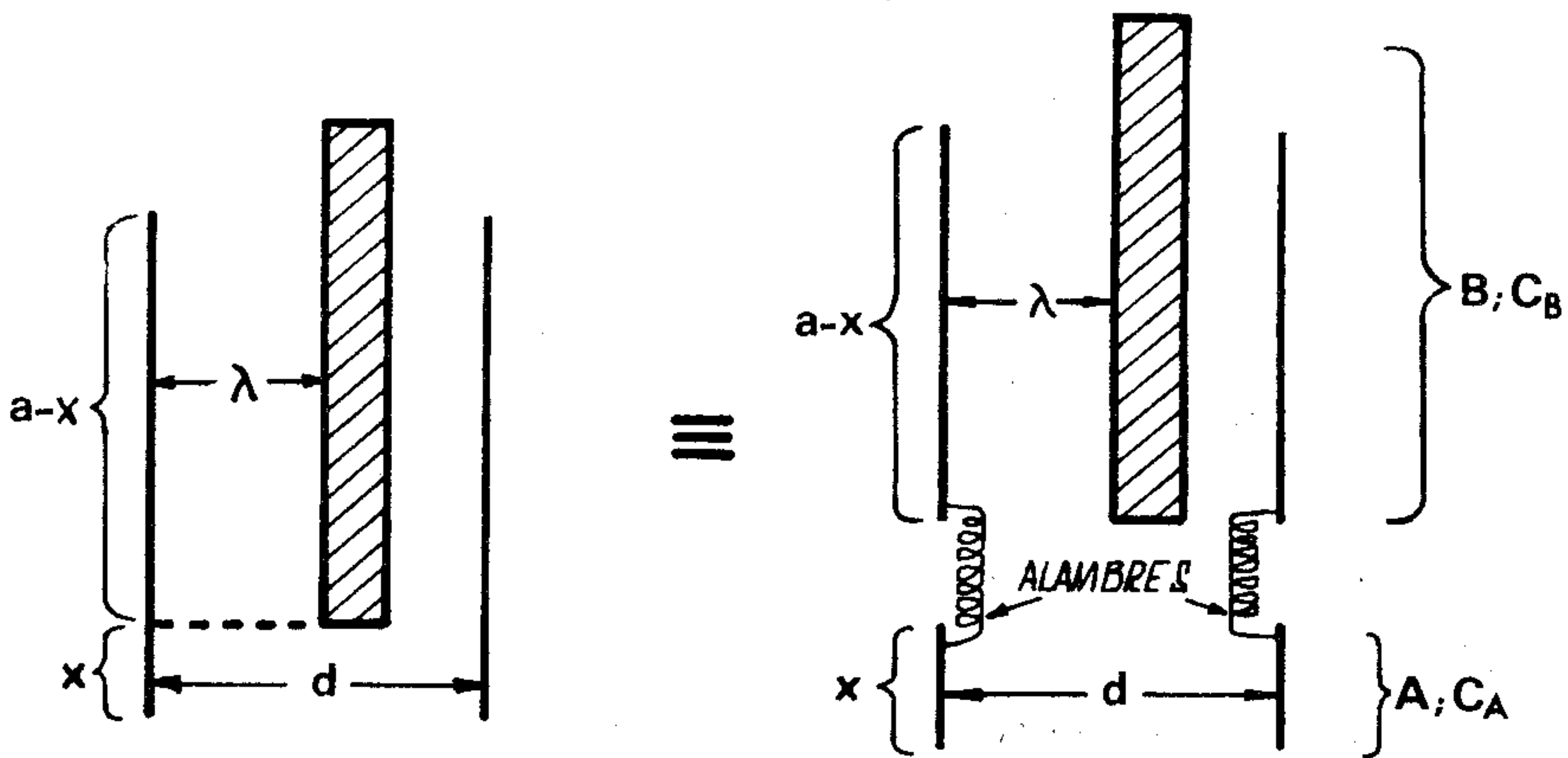


Fig. 29

Calculemos la capacidad de A,  $C_A$  :

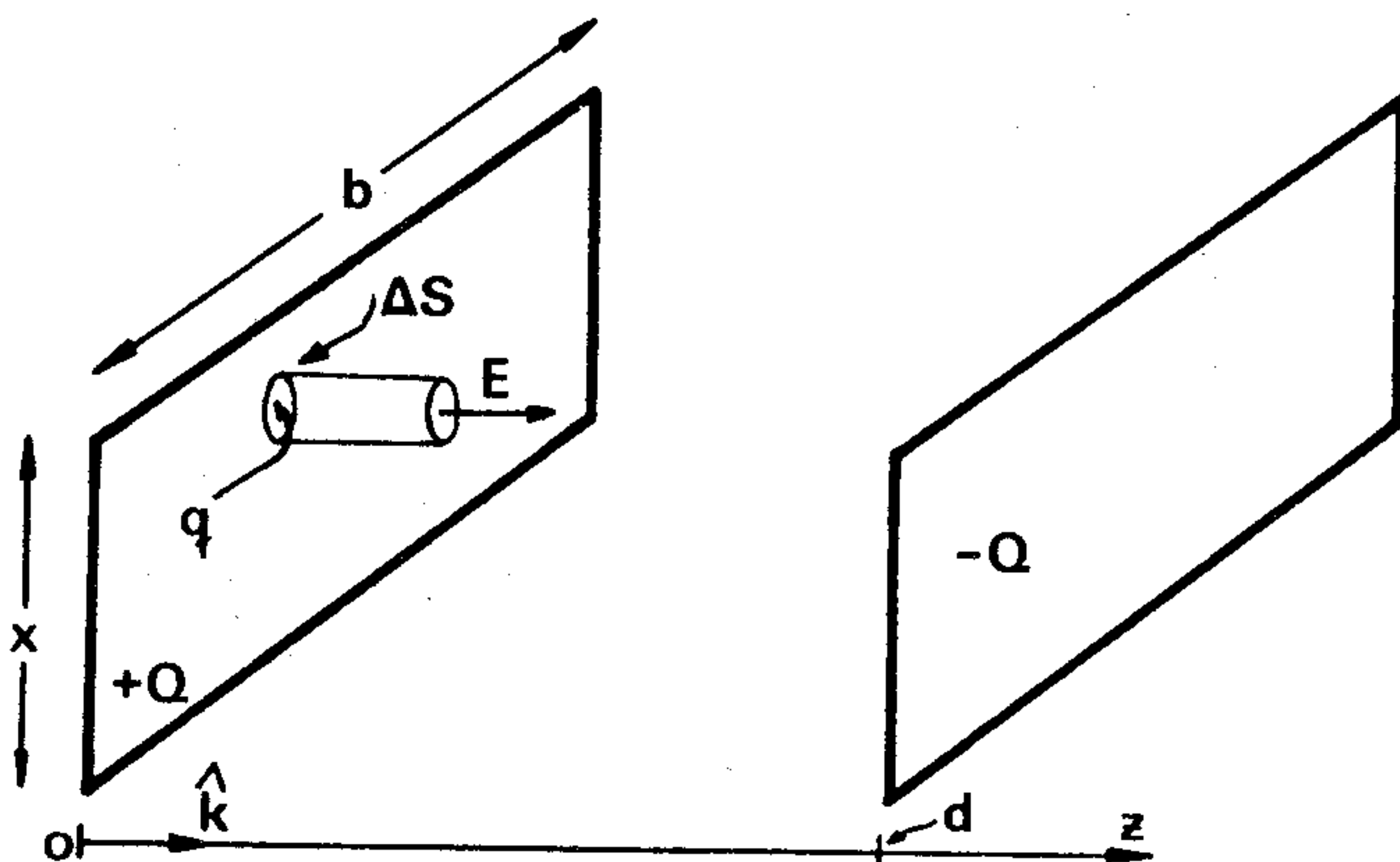


Fig. 30

el campo eléctrico entre las placas de A es constante y perpendicular a ellas; fuera de estas placas, vale cero.

Aplicando el teorema de Gauss a un cilindro recto de base  $\Delta S$  como se indica en la figura, tenemos:

$$\oint_{\text{cil}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{\Delta S}{bx}$$

(hemos supuesto que la carga  $Q$  de la placa izquierda está uniformemente distribuida);

Entonces  $E \Delta S = \frac{Q \Delta S}{\epsilon_0 bx}$

Luego  $\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 bx} \hat{k}$

La función potencial será:

$$V(z) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C,$$

e integrando a lo largo del eje  $z$ ,  $d\vec{r} = \hat{k} dz$

$$V(z) = - \int \frac{Qdz}{\epsilon_0 bx} + C,$$

y la diferencia de potencial entre las placas será, en valor absoluto:

$$V_1 = |V(d) - V(0)| = \frac{Qd}{\epsilon_0 bx};$$

la capacidad es:

$$C_A = \frac{Q}{V_1},$$

$$C_A = \frac{b\epsilon_0 x}{d}$$

Calculemos ahora la capacidad de B:

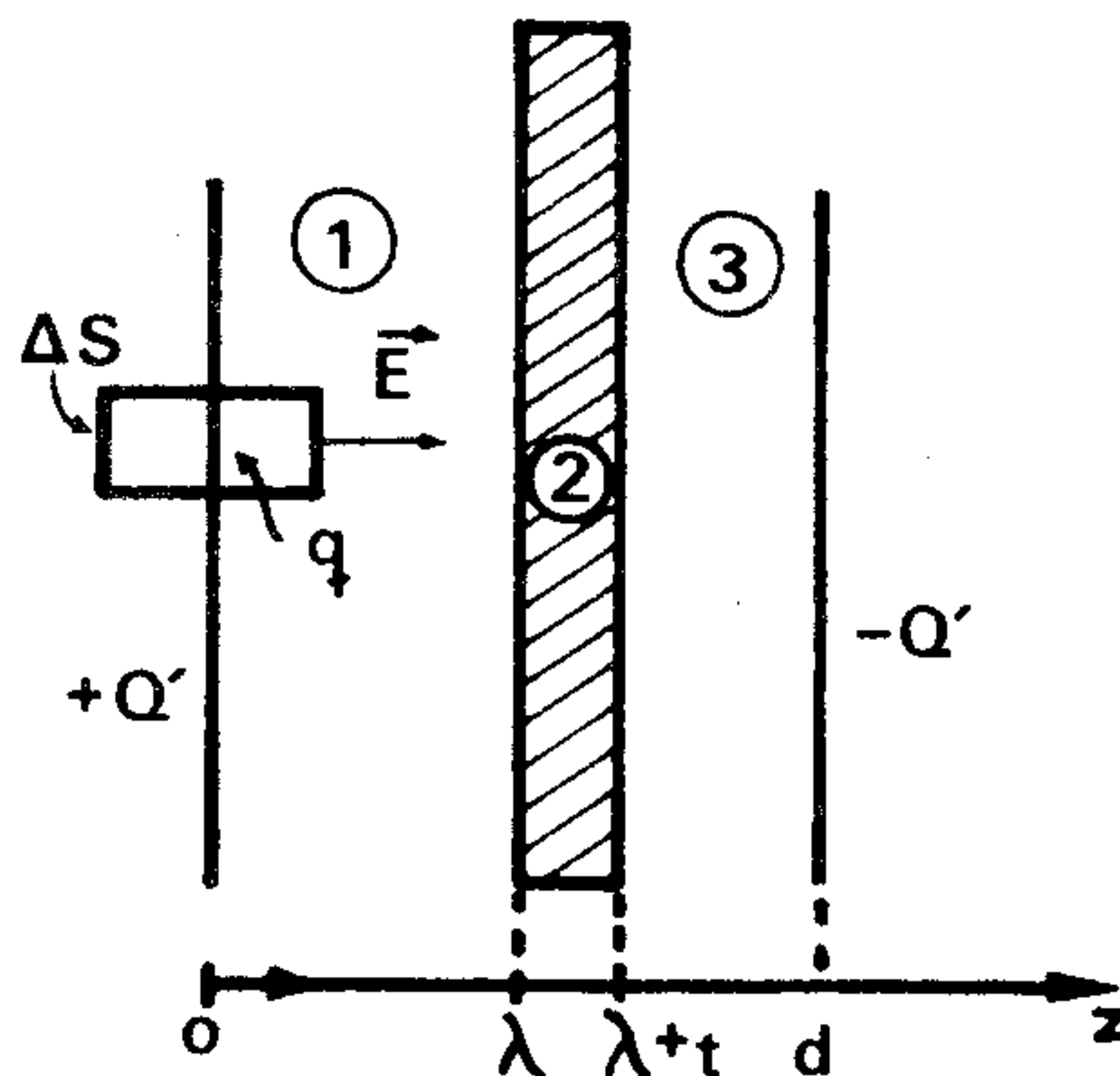


Fig. 31

dividamos el condensador en 3 regiones; el campo  $\vec{E}$  será paralelo a  $\hat{k}$ ; aplicando el teorema de Gauss a un cilindro idéntico al anterior, tendremos para las regiones (1) y (3), en que existe sólo el vacío,

$$\oint_{\text{cil.}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E \Delta S = \frac{Q' \Delta S}{\epsilon_0 b(a - x)}$$

luego:

$$\vec{E} = \frac{Q'}{\epsilon_0 b(a - x)} \hat{k}.$$

Para la región (2), donde está el dieléctrico, podemos calcular  $\vec{E}$  por conservación de la componente normal del vector desplazamiento:

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E} = \epsilon\epsilon_0 E \hat{k}$$

$$D_n = \vec{D} \cdot \hat{k}$$

$$\epsilon\epsilon_0 E = \frac{\epsilon_0 Q'}{\epsilon_0 b(a - x)}$$

luego, tenemos para la región (2)

$$\vec{E} = \frac{Q'}{\epsilon \epsilon_0 (a - x) b} \hat{k}.$$

La diferencia de potencial entre las placas será, en valor absoluto:

$$V_1' = \int_{z=0}^a \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

e integrando a lo largo del eje Oz,  $d\vec{r} = \hat{k} dz$ ;

$$V_1' = \int_0^\lambda E_1 dz + \int_\lambda^{\lambda+t} E_2 dz + \int_{\lambda+t}^d E_3 dz$$

$$V_1' = \frac{Q'}{\epsilon_0 b (a - x)} \left[ \int_0^\lambda dz + \int_\lambda^{\lambda+t} \frac{dz}{\epsilon} + \int_{\lambda+t}^d dz \right]$$

$$V_1' = \frac{Q'}{b \epsilon_0 (a - x)} \left[ \lambda + \frac{t}{\epsilon} + d - t - \lambda \right];$$

la capacidad de B será:

$$C_B = \frac{Q'}{V_1'}$$

$$C_B = \frac{b \epsilon_0 (a - x)}{d + t \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)}$$

La capacidad total del condensador será:

$$C = C_A + C_B$$

$$C = \frac{b \epsilon_0 x}{d} + \frac{(a - x) b \epsilon_0}{d + t \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)}$$

y la energía:

$$W_V = \frac{1}{2} CV^2$$

$$W_V = \frac{1}{2} V^2 b \epsilon_0 \left[ \frac{x}{d} + \frac{a - x}{d + t \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)} \right]$$

Finalmente, tendremos para la fuerza:

$$F_x = \frac{\partial W_V}{\partial x}$$

$$F_x = \frac{1}{2} V^2 b \epsilon_0 \left[ \frac{1}{d} - \frac{1}{d + t \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)} \right]$$

Un chequeo rápido nos dice que si hacemos  $\epsilon = 1$ , es decir, quitamos el dieléctrico, la fuerza se anula, tal como debe ser.



Fijémonos un poco en la expresión de la fuerza; como  $t \ll d$ , y  $\epsilon > 1$  en general, la fuerza es negativa, es decir, el dieléctrico tiende a entrar al condensador. Esto es característico del caso en que se mantiene constante la diferencia de potencial. Notemos que si el dieléctrico tiende a entrar, la capacidad tiende a crecer, (ver la expresión de la capacidad en función de  $x$ ), y por lo tanto la energía almacenada en el condensador también tiende a crecer. En el caso en que se mantiene constante la carga del condensador, ocurre todo lo contrario, es decir, la capacidad y la energía tienden a disminuir.

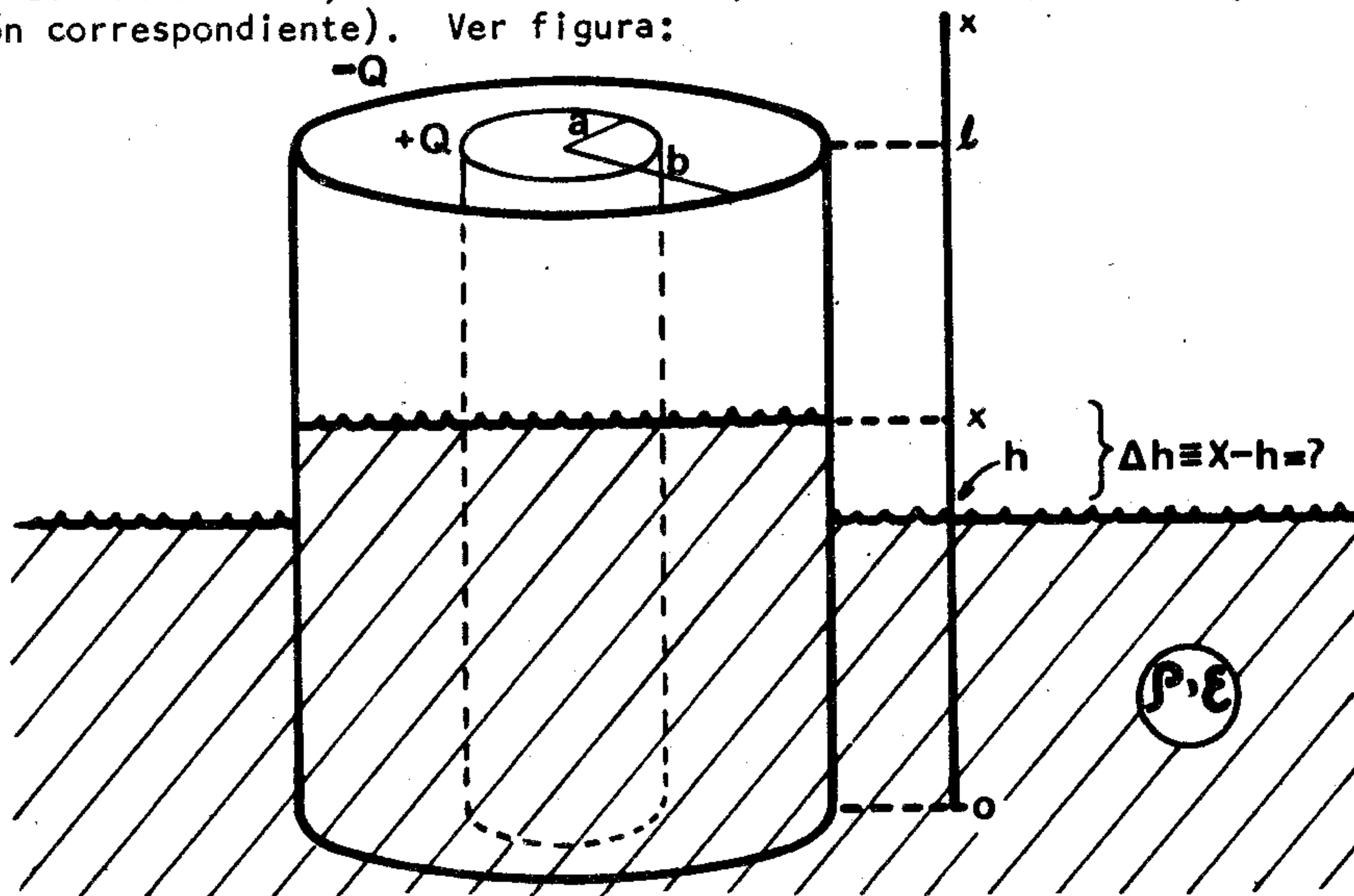
Notemos también que la fuerza es constante, no depende de  $x$ ; esto se debe a que hemos despreciado los efectos de borde del condensador; si los tomásemos en cuenta, obtendríamos una expresión para la fuerza que dependería de  $x$ , y estaría definida en todo el espacio; nuestra expresión  $F_x$  es válida sólo para  $0 < x < a$ , ya que ésta es la hipótesis que hemos considerado implícitamente en los cálculos de  $C_A$  y  $C_B$ .

#### PROBLEMA 11.-

Un condensador cilíndrico de altura  $l$  y cuyas armaduras tienen radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ ), está cargado con una carga  $Q$ , es decir, una armadura tiene carga  $+Q$ , y la otra  $-Q$ . Entre las armaduras existe el vacío. La armadura interna es un cilindro (metálico) macizo.

Se sumerge el condensador en un líquido dieléctrico de densidad  $\rho$  y constante dieléctrica  $\epsilon$ , a una profundidad  $h$ .

Calcule la altura  $a$  que sube el nivel del líquido que queda dentro del condensador, en relación al líquido externo (basta llegar a la ecuación correspondiente). Ver figura:



#### Resolución.

La diferencia de nivel  $\Delta h$  estará dada por el equilibrio entre la fuerza electrostática sobre el líquido y su peso.

La fuerza electrostática es:

$$F_x = - \frac{\partial W_Q}{\partial x}$$

puesto que la carga  $Q$  se mantiene constante;

$$W_Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

Calculemos la capacidad  $C$  del condensador.

Para ello, podemos considerar el condensador como dos condensadores conectados en paralelo: uno será el que corresponde a la parte sin líquido, de altura  $l-x$ , y el otro, a la que lo contiene, de altura  $x$ ; el dibujo correspondiente es el siguiente:

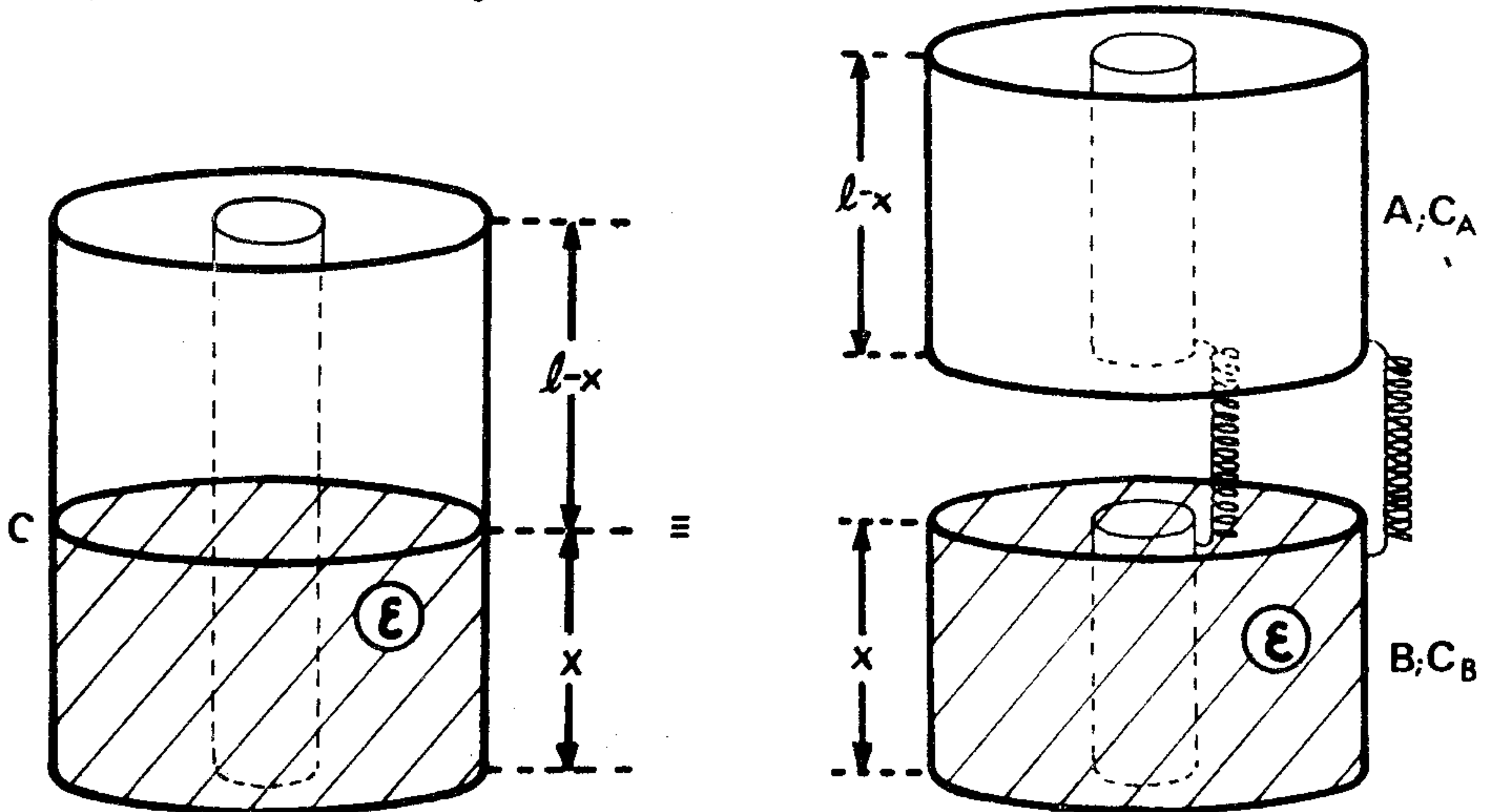


Fig. 33

La capacidad  $C$  de nuestro condensador será:

$$C = C_A + C_B$$

El hecho que podamos separar nuestro condensador en dos conectados en paralelo se debe a que suponemos que despreciamos los efectos de borde y la deformación del campo eléctrico cerca de la superficie del líquido.

Calculemos  $C_B$  aplicando el teorema de Gauss a un cilindro coaxial con las armaduras, de radio  $r$ ;  $a \leq r \leq b$ :

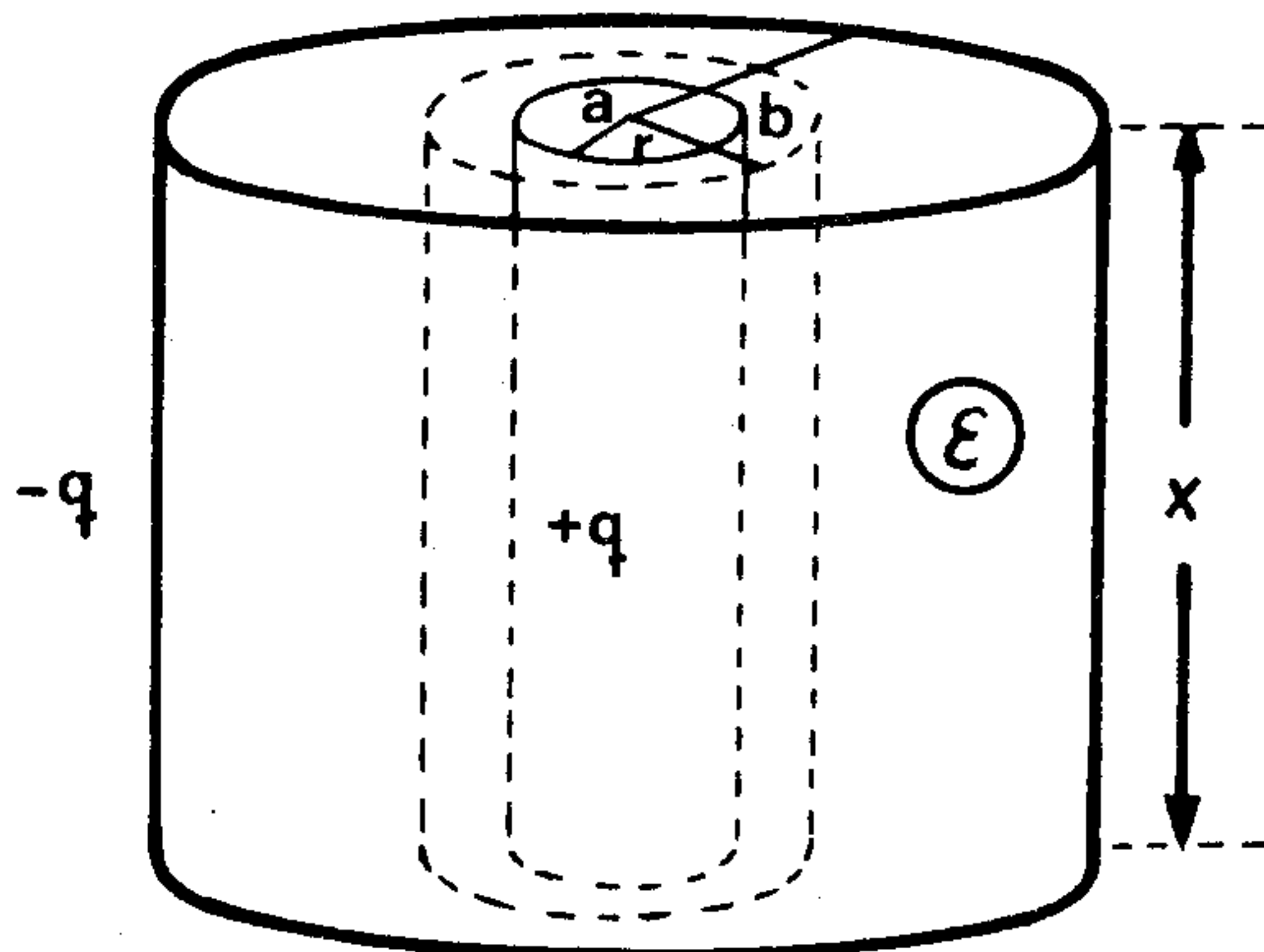


Fig. 34

Supongamos que la armadura interna tiene carga  $+q$  y la externa una carga  $-q$ ; estas cargas las suponemos uniformemente distribuidas sobre las superficies de las armaduras, de tal modo que el campo eléctrico es radial;

$$\oint_{\text{cil}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi \cdot rx = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 xr} \hat{r},$$

en que  $\hat{r}$  es un versor radial.

El valor absoluto de la diferencia de potencial entre las armaduras será:

$$V_1 = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

e integrando a lo largo de una recta radial,  $d\vec{r} = \hat{r} dr$ :

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 x} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 x} \text{Log} \frac{b}{a}$$

y como:

$$C_B = \frac{q}{V_1}, \text{ se tiene:}$$

$$C_B = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 x}{\text{Log} \frac{b}{a}}$$

La capacidad de la parte A será análoga a la de B, y para calcularla, basta hacer los siguientes remplazos en la fórmula de  $C_B$ :

$$\epsilon \longrightarrow 1 \quad (\text{pues en A existe vacío entre las placas})$$

$$x \longrightarrow l - x \quad (\text{pues } l - x \text{ es la altura de A}).$$

Entonces:

$$C_A = \frac{2\pi\epsilon_0 (l - x)}{\text{Log} \frac{b}{a}}$$

La capacidad total será la suma de  $C_A$  y  $C_B$ :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Log} \frac{b}{a}} \left[ l + x (\epsilon - 1) \right]$$

Un chequeo rápido nos dice que si hacemos  $\epsilon = 1$ , es decir, si quitamos el líquido, el resultado es el de la capacidad habitual de un condensador cilíndrico vacío.

La energía será:

$$W_Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$W_Q = \frac{Q^2 \text{Log } \frac{b}{a}}{4\pi\epsilon_0 [\ell + x(\epsilon - 1)]}$$

La fuerza que se ejerce sobre todo el líquido que se ha introducido al condensador será:

$$F_x = - \frac{\partial W_Q}{\partial x}$$

$$F_x = \frac{Q^2 (\epsilon - 1) \cdot \text{Log } \frac{b}{a}}{4\pi\epsilon_0 [\ell + x(\epsilon - 1)]^2}$$

Esta fuerza es equilibrada por el peso de la porción de líquido comprendida entre  $h$  y  $x$ , pues la parte comprendida entre  $0$  y  $h$  es equilibrada por el líquido externo al condensador.

El volumen de esta "rebanada" de líquido es:

$$v = \pi (b^2 - a^2) (x - h),$$

pues el cilindro interno es sólido; el peso será:

$$p = mg = \rho v g$$

$$p = \rho g \pi (b^2 - a^2) (x - h)$$

en que  $g$  es la aceleración de gravedad, y  $\rho$  la densidad del líquido.

La condición de equilibrio es:

$$\rho g \pi (b^2 - a^2) (x - h) = \frac{Q^2 (\epsilon - 1) \text{Log } \frac{b}{a}}{4\pi\epsilon_0 [\ell + x(\epsilon - 1)]^2}$$

Un chequeo rápido nos dice que si hacemos  $\epsilon = 1$ , es decir, quitamos el líquido dentro del cilindro, la ecuación nos da  $x = h$ , como era de esperar.

Desarrollando y ordenando los términos, se llega a la siguiente ecuación de tercer grado para  $x$ :

$$x^3 (\epsilon - 1)^2 + x^2 (\epsilon - 1) [2\ell - h(\epsilon - 1)] + x\ell [\ell - 2h(\epsilon - 1)] - h\ell^2 - \frac{Q^2 (\epsilon - 1) \cdot \text{Log } \frac{b}{a}}{4\pi^2 \epsilon_0 \rho g (b^2 - a^2)} = 0$$

Esta ecuación no puede resolverse sin datos numéricos.

La diferencia de altura con el nivel externo será:

$$\Delta h = x - h.$$

## PROBLEMA 12.-

Tres esferas metálicas idénticas tienen sus centros sobre los vértices de un triángulo equilátero. Las esferas no se tocan entre sí.

Cuando los potenciales son  $(V, 0, 0)$ , las cargas son  $(Q_1, Q_2, Q_2)$ .

- Calcular las cargas cuando los potenciales son  $(V', V', V')$ .
- Calcular los potenciales cuando las cargas son  $(Q_3, 0, 0)$ .



y de aquí:

$$c = \frac{Q_1}{V}, \quad k = \frac{Q_2}{V}$$

Ahora podemos contestar a) y b).

a) Llamemos  $(Q'_1, Q'_2, Q'_3)$  a las cargas cuando los potenciales son  $(V', V', V')$ , introduciendo estos en (2), resulta:

$$\left. \begin{aligned} Q'_1 &= cV' + 2kV' \\ Q'_2 &= cV' + 2kV' \\ Q'_3 &= cV' + 2kV' \end{aligned} \right\}$$

y de aquí:

$$Q'_1 = Q'_2 = Q'_3 = (c + 2k) V' = (Q_1 + 2Q_2) \frac{V'}{V}$$

Este mismo resultado podríamos haberlo obtenido utilizando el teorema de reciprocidad de Green, que dice, en general:

$$\sum_i q_i V'_i = \sum_i q'_i V_i,$$

en que las cantidades  $q_i, V_i, q'_i, V'_i$  son cargas y potenciales distintos para una misma configuración de conductores; la suma se extiende a todos los conductores.

En nuestro caso, podemos hacer:

$$q_i = (Q_1, Q_2, Q_2) \quad ; \quad q'_i = (Q'_1, Q'_2, Q'_3)$$

$$V_i = (V, 0, 0) \quad ; \quad V'_i = (V', V', V'),$$

y aplicando el teorema de reciprocidad de Green, nos da

$$Q'_1 V = V' (Q_1 + 2Q_2),$$

$$Q'_1 = (Q_1 + 2Q_2) \frac{V'}{V}$$

Aquí hemos obtenido una sólo de las incógnitas,  $Q'_1$ ; pero, dada la simetría del sistema, y puesto que los potenciales finales  $V'_i$  son iguales, podemos deducir que:

$$Q'_1 = Q'_2 = Q'_3 ;$$

en el caso general, cuando no hay simetría, el teorema de reciprocidad de Green no nos servirá para resolver problemas, porque da sólo una ecuación; sin embargo, es útil para chequear resultados.

b) Llamemos  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  a los potenciales cuando las cargas son  $(Q_3, 0, 0)$ ; introduciendo esto en (2), tenemos:

Resolución.

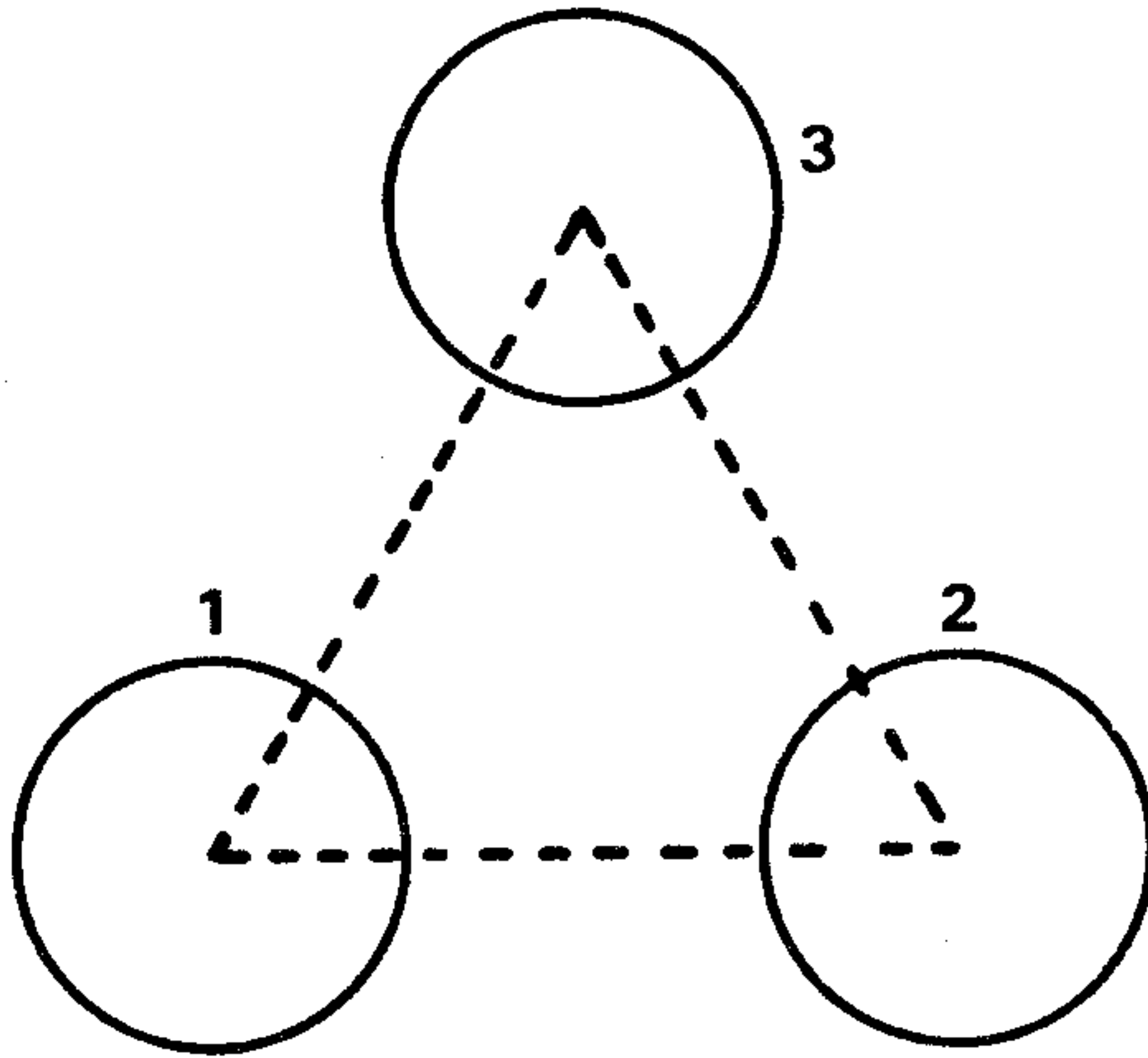


Fig. 35

En general, se cumple que:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + C_{13} V_3 \\ q_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2 + C_{23} V_3 \\ q_3 &= C_{31} V_1 + C_{32} V_2 + C_{33} V_3 \end{aligned} \right\} \text{----- (1),}$$

en que  $q_i$  y  $V_i$  son la carga y el potencial de la esfera (i), respectivamente. Los coeficientes  $C_{ii}$  y  $C_{ij}$  se llaman de capacidad e inducción, respectivamente; estos coeficientes dependen exclusivamente de la geometría del sistema.

Puesto que las esferas son idénticas, se cumplirá:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} \equiv c ;$$

además, se cumplirá:

$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} \equiv k,$$

porque cualquier par de esferas es indistinguible físicamente de cualesquiera de los otros dos pares. (Hemos usado también la relación  $C_{ij} = C_{ji}$  para los coeficientes de inducción).

El sistema de ecuaciones (1) quedará, entonces:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= cV_1 + k(V_2 + V_3) \\ q_2 &= cV_2 + k(V_1 + V_3) \\ q_3 &= cV_3 + k(V_1 + V_2) \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

Si introducimos en (2) los datos del problema, nos queda:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= cV \\ Q_2 &= kV \\ Q_3 &= kV \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_3 &= c \phi_1 + k(\phi_2 + \phi_3) \\ 0 &= c \phi_2 + k(\phi_1 + \phi_3) \\ 0 &= c \phi_3 + k(\phi_1 + \phi_2) \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo este sistema, e introduciendo los valores de  $c$  y  $k$ , nos queda:

$$\phi_1 = \frac{Q_3(c+k)}{c^2 + kc - 2k^2} = \frac{Q_3 V (Q_1 + Q_2)}{Q_1^2 + Q_1 Q_2 - 2Q_2^2}$$

$$\phi_2 = \phi_3 = -\frac{Q_3 k}{c^2 + kc - 2k^2} = -\frac{Q_2 Q_3 V}{Q_1^2 + Q_1 Q_2 - 2Q_2^2}$$

El resultado  $\phi_2 = \phi_3$  era de esperar, dada la simetría del sistema, y puesto que la carga de las esferas 2 y 3 son iguales (valen cero).

### PROBLEMA 13.-

Una distribución de carga en volumen de densidad  $\rho$  constante ocupa un volumen esférico del centro  $O$  y radio  $R$  ( $\rho > 0$ ).

- A) ¿Cuál es la dirección y sentido del campo eléctrico en cualquier punto del espacio? El módulo del campo,  $|\vec{E}|$ , de qué variables depende? Calcule el campo eléctrico en todo el espacio. Haga un gráfico de  $|\vec{E}|$  (aproximado). Calcule la diferencia de potencial entre el centro y borde de la esfera.

- B) Se coloca una carga puntual  $-Q$  en el centro de la esfera ( $Q > 0$ ), y se la deja libre. ¿Queda o no en equilibrio la carga en el centro? Si está en equilibrio, es estable o inestable?

La carga  $-Q$  se desplaza del centro de la esfera, pero siempre quedando dentro de ella; calcule la fuerza que actúa sobre la carga. Dibuje un eje  $Ox$  con origen en el centro de la esfera; suponga que la carga  $-Q$  tiene masa  $m$ , y está libre de moverse a lo largo del eje  $Ox$ , pero sin salirse de la esfera. Escriba la ecuación diferencial del movimiento. Demuestre que es un m.a.s. Calcule su período.

- C) Se aplica un campo externo  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{u}$  constante y uniforme, en que  $\hat{u}$  es el vector unitario a lo largo del eje  $x$ . La carga  $-Q$  está libre de moverse a lo largo de este eje. La distribución de carga no se modifica. Calcule las nuevas posibles posiciones de equilibrio de la carga  $-Q$ ; Determine cuál es estable y cuál es inestable. Discuta acerca del valor de  $E_0$  para que hayan dos, una, o ninguna posiciones de equilibrio. Haga un gráfico de  $E = E(x)$ .

### Resolución.-

- A) Puesto que  $\rho$  es constante, el problema tiene simetría esférica; en consecuencia el campo tiene dirección radial. Como  $\rho$  es positivo, el campo apunta siempre hacia afuera. Por simetría esférica, el módulo del campo,  $|\vec{E}|$  será sólo función de la distancia al centro de la esfera,  $r$ .

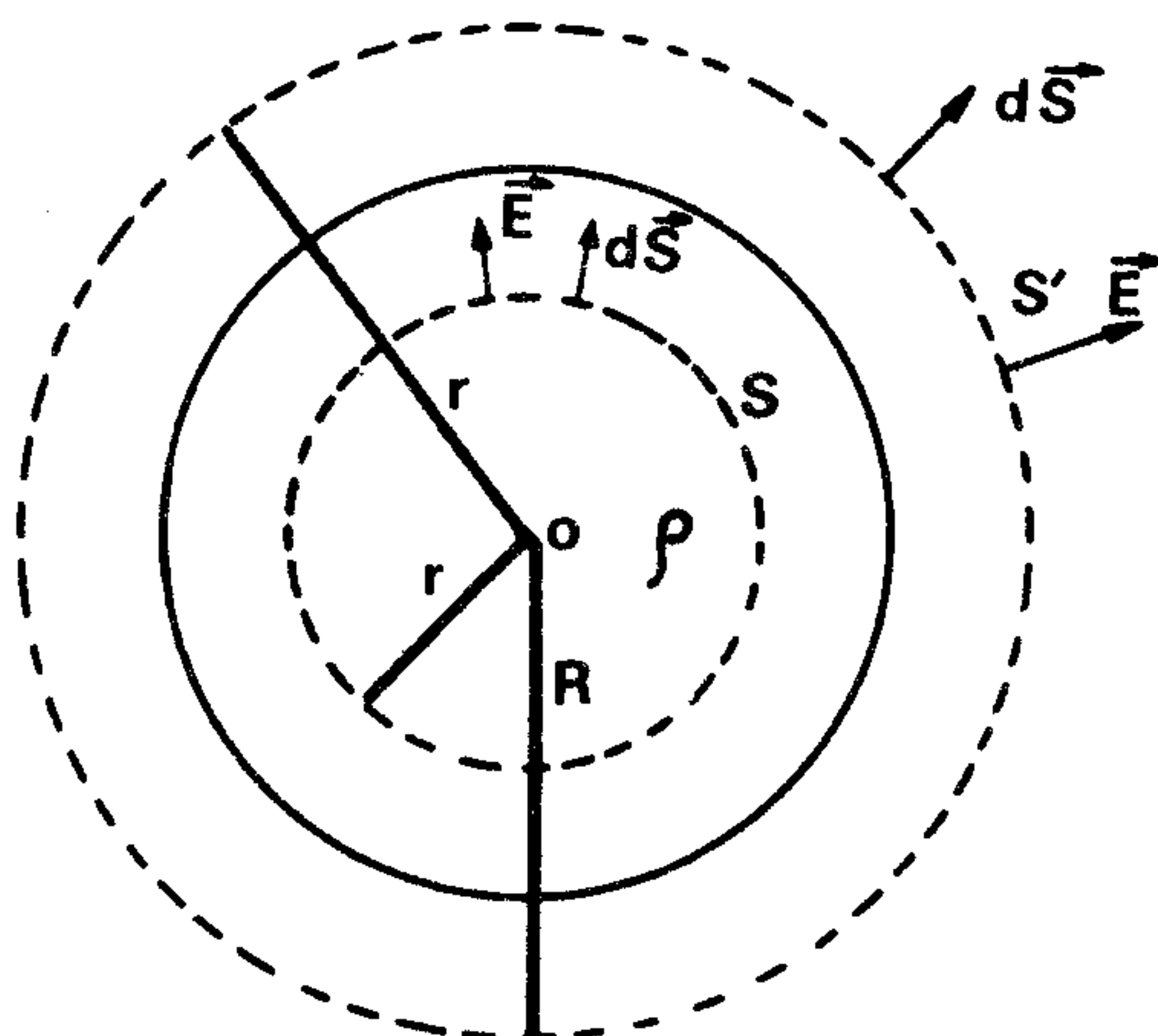


Fig. 36

- a) para  $r \leq R$ :  
apliquemos el teorema de Gauss a la superficie esférica  $S$  de centro  $O$  y radio  $r$ :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}(S)} \frac{\rho d\mathcal{V}}{\epsilon_0},$$

en que  $\mathcal{V}(S)$  es el volumen esférico encerrado por la superficie  $S$ ; como  $\vec{E} = E(r) \hat{r}$ , y  $d\vec{S} = \hat{r} dS$ , resulta:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{luego: } E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$\text{y } \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

- b) para  $r \geq R$ :  
apliquemos el teorema de Gauss a la superficie esférica  $S'$  de radio  $r$ :

$$\oiint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}(S')} \frac{\rho d\mathcal{V}}{\epsilon_0}$$

en que  $\mathcal{V}(S')$  es el volumen esférico encerrado por  $S'$ ;

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$\text{luego: } E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{y } \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

El gráfico correspondiente será: (ver Fig. 37).

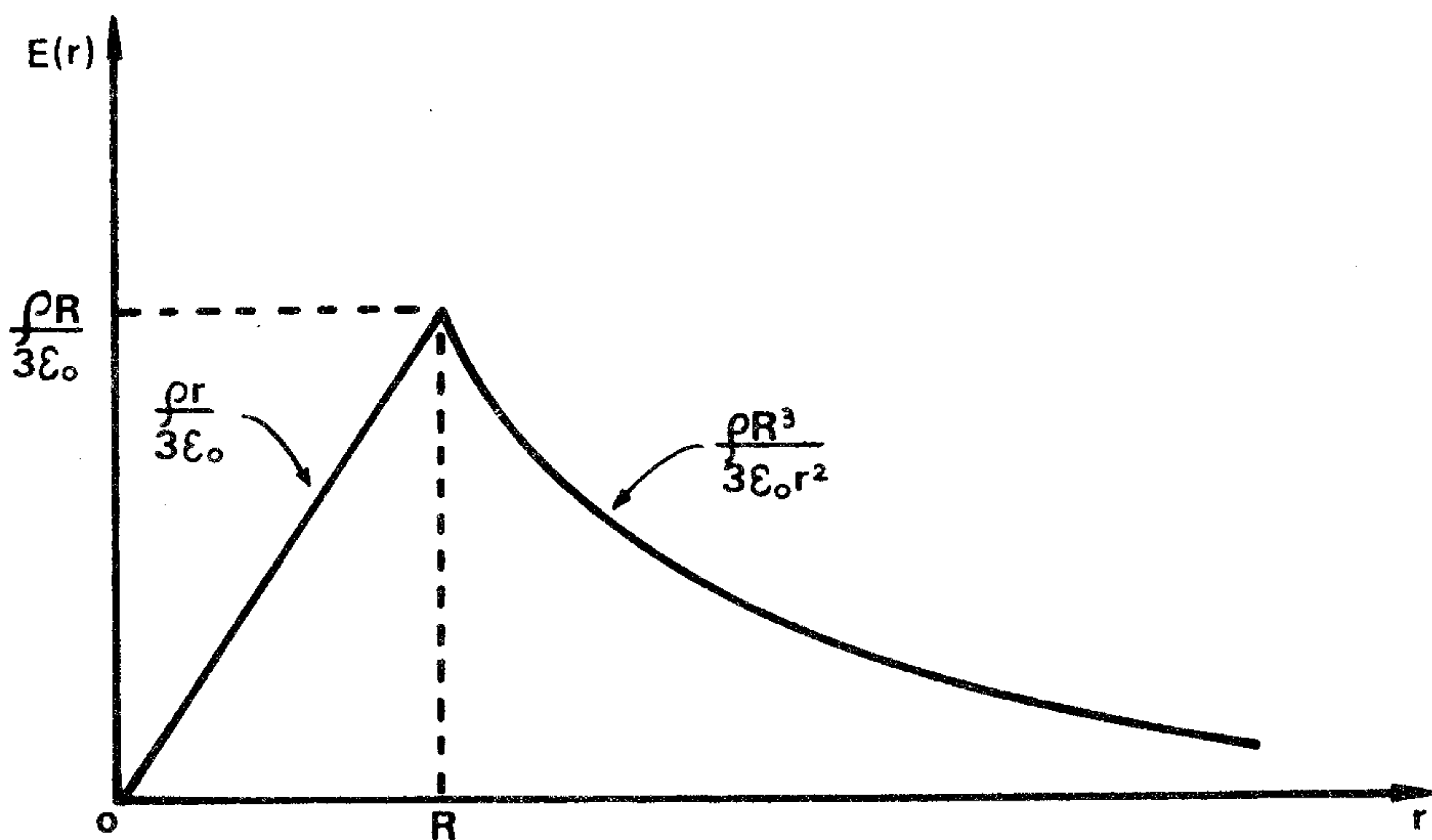


Fig. 37

$$E(0) = 0$$

$$E(\infty) = 0$$

máximo de  $E(r)$  en  $r = R$

La diferencia de potencial entre el centro y borde de la esfera es:

$$V(0) - V(R) = - \int_R^0 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

e integrando a lo largo de una recta radial:

$$V(0) - V(R) = - \int_R^0 \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} dr$$

$$V(0) - V(R) = \frac{\rho R^2}{6 \epsilon_0}$$

- B) La carga  $-Q$  queda en equilibrio en el centro de la esfera, pues allí el campo es cero.  
Para ver si el equilibrio es estable o inestable, basta ver si  $\nabla^2 W$  es positivo o negativo en  $r = 0$ ;  $W$  es la energía potencial de la carga  $-Q$  en un punto cualquiera (interior a la esfera).

$$W(r) = - Q V(r)$$

$$V(r) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C$$

integrando sobre una recta radial:

$$V(r) = - \int \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} dr + C$$

$$V(r) = - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} + C$$



$$W(r) = + \frac{Q \rho r^2}{6\epsilon_0} + K \quad (K = -QC)$$

$$\nabla^2 W(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dW}{dr} \right) \quad \text{pues } W(r) \text{ depende sólo de } r.$$

$$\nabla^2 W = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{Q \rho r^2}{6\epsilon_0} + K \right) \right]$$

$$\nabla^2 W = \frac{Q \rho}{6\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 \cdot 2r]$$

$$\nabla^2 W = \frac{Q \rho}{6\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 6r^2$$

$$\nabla^2 W = \frac{Q \rho}{\epsilon_0} > 0, \quad \text{pues } Q, \rho \text{ y } \epsilon_0 \text{ son cantidades positivas.}$$

Luego el equilibrio es estable.

Si la carga  $-Q$  se desplaza hasta una distancia  $r < R$  del centro, la fuerza que actúa sobre ella será:

$$\vec{F} = -QE$$

$$\vec{F} = -Q \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r},$$

es decir, la fuerza apunta siempre hacia el centro de la esfera (era de esperarse este resultado, dada la estabilidad del equilibrio en el centro).

La fuerza sobre  $-Q$  será:

$$F(x) = \frac{-Q \rho x}{3\epsilon_0}$$

y como  $F = m a$ , se tiene

$$\frac{-Q \rho x}{3\epsilon_0} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

pues hemos supuesto el movimiento sobre el eje  $Ox$ .

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{Q \rho}{3\epsilon_0 m} x = 0; \quad \text{esta es la ecuación diferencial del}$$

movimiento.

El movimiento es armónico simple con centro en 0; la ecuación general de este tipo de movimiento es:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

en que el período  $T$  es  $\frac{2\pi}{\omega}$  ;

en nuestro caso,  $\omega = \sqrt{\frac{Q \rho}{3\epsilon_0 m}}$  ; luego  $T = 2\pi \sqrt{\frac{3\epsilon_0 m}{Q \rho}}$

c) Al aplicar el campo externo  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{i}$ , el campo total será

$$\vec{E} = E_0 \hat{i} + \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \hat{r} \quad \text{para } r \leq R$$

y

$$\vec{E} = E_0 \hat{i} + \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{para } r \gg R$$

Reescribamos estos campos a lo largo del eje Ox:

a) para  $0 \leq x \leq R$ , se cumple:

$$r = x$$

$$\hat{r} = \hat{i};$$

$$\text{luego: } \vec{E} = (E_0 + \frac{\rho x}{3 \epsilon_0}) \hat{i}$$

b) para  $-R \leq x \leq 0$ , se cumple:

$$r = -x$$

$$\hat{r} = -\hat{i}$$

$$\text{luego: } \vec{E} = (E_0 + \frac{\rho x}{3 \epsilon_0}) \hat{i}$$

c) para  $x \geq R$ , se cumple:

$$r = x$$

$$\hat{r} = \hat{i}$$

$$\vec{E} = (E_0 + \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 x^2}) \hat{i}$$

d) para  $x \leq -R$ , se cumple:

$$r = -x$$

$$\hat{r} = -\hat{i}$$

$$\vec{E} = (E_0 - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 x^2}) \hat{i}$$

En resumen:

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} (E_0 + \frac{\rho x}{3 \epsilon_0}) \hat{i}, & -R \leq x \leq R \\ (E_0 + \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 x^2}) \hat{i}, & x \geq R \\ (E_0 - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 x^2}) \hat{i}, & x \leq -R \end{cases}$$

Calculemos las nuevas posiciones de equilibrio; estos puntos son tales que  $\vec{E}(x) = \vec{0}$ .

a) para  $-R < x < R$ ;

$$E_0 + \frac{\rho x_1}{3\epsilon_0} = 0$$

$$x_1 = - \frac{3 \epsilon_0 E_0}{\rho}$$

este punto  $x_1$  existe siempre que quede dentro de la esfera; o sea, tiene que ser:

$$x_1 > -R$$

luego: 
$$- \frac{3 \epsilon_0 E_0}{\rho} > -R$$

o sea: 
$$E_0 < \frac{\rho R}{3 \epsilon_0} ;$$

esta es la condición que debe cumplir  $E_0$  para que haya equilibrio dentro de la esfera; veamos si es estable o inestable:

$$V(x) = - \int \vec{E} \cdot \hat{i} dx + C$$

$$V(x) = - \int (E_0 + \frac{\rho x}{3\epsilon_0}) dx + C$$

$$V(x) = - E_0 x - \frac{\rho x^2}{6 \epsilon_0} + C ;$$

$$W(x) = - Q V(x)$$

luego: 
$$W(x) = Q E_0 x + \frac{Q \rho x^2}{6 \epsilon_0} + K \quad (K = QC)$$

$$\nabla^2 W(x) = \frac{d^2 W(x)}{d x^2} = \frac{\rho Q}{3 \epsilon_0} > 0$$

luego el equilibrio es estable.

b) para  $x > R$ :

$$E_0 + \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 x_2^2} = 0 \Rightarrow x_2 \text{ es imaginario}$$

luego no hay posición de equilibrio para  $x > R$ .

c) para  $x < -R$

$$E_0 - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 x_3^2} = 0$$

$$x_3 = - R \cdot \sqrt{\frac{\rho R}{3 \epsilon_0 E_0}}$$

(se ha escogido evidentemente, el signo negativo de la raíz); este punto  $x_3$  existe siempre que quede fuera de la esfera; o sea:



$$x_3 < -R$$

$$-R \sqrt{\frac{\rho R}{3 \epsilon_0 E_0}} < -R$$

luego:

$$\sqrt{\frac{\rho R}{3 \epsilon_0 E_0}} > 1$$

o sea:

$$E_0 < \frac{\rho R}{3 \epsilon_0} ;$$

que es la misma condición que habíamos encontrado anteriormente para que hubiera equilibrio; veamos si es estable o no:

$$V(x) = - \int \vec{E} \cdot \hat{i} dx + C$$

$$V(x) = - \int \left( E_0 - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 x^2} \right) dx + C$$

$$V(x) = - E_0 x - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 x} + C$$

$$W(x) = - QV(x)$$

$$W(x) = Q E_0 x + \frac{Q \rho R^3}{3 \epsilon_0 x} + K \quad (K = -QC)$$

$$\nabla^2 W(x) = \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = \frac{2 Q \rho R^3}{3 \epsilon_0 x^3}$$

y  $\nabla^2 W(x)$ , evaluado en  $x = x_3 = -R \sqrt{\frac{\rho R}{3 \epsilon_0 E_0}}$ ,

$$\nabla^2 W(x) \Big|_{x=x_3} = - \frac{2}{3} \frac{Q \rho}{\epsilon_0} \left( \frac{3 \epsilon_0 E_0}{\rho R} \right)^{3/2} < 0,$$

luego el equilibrio es inestable.

Hemos visto que para  $E_0 < \frac{\rho R}{3 \epsilon_0}$  existen dos posiciones de equi-

librio, una estable y otra inestable. Obviamente, para  $E_0 = 0$ , existe una sola en el centro de la esfera. Para el caso:

$$E_0 = \frac{\rho R}{3 \epsilon_0}$$

también existe una sola, en  $x = -R$  (verificarlo), pero esta posición es estable hacia un lado e inestable hacia el otro (este tipo de equilibrio también se llama inestable). En el caso:

$$E_0 > \frac{\rho R}{3 \epsilon_0},$$

no hay ninguna posición de equilibrio. Todo esto se verá claramente en el gráfico:

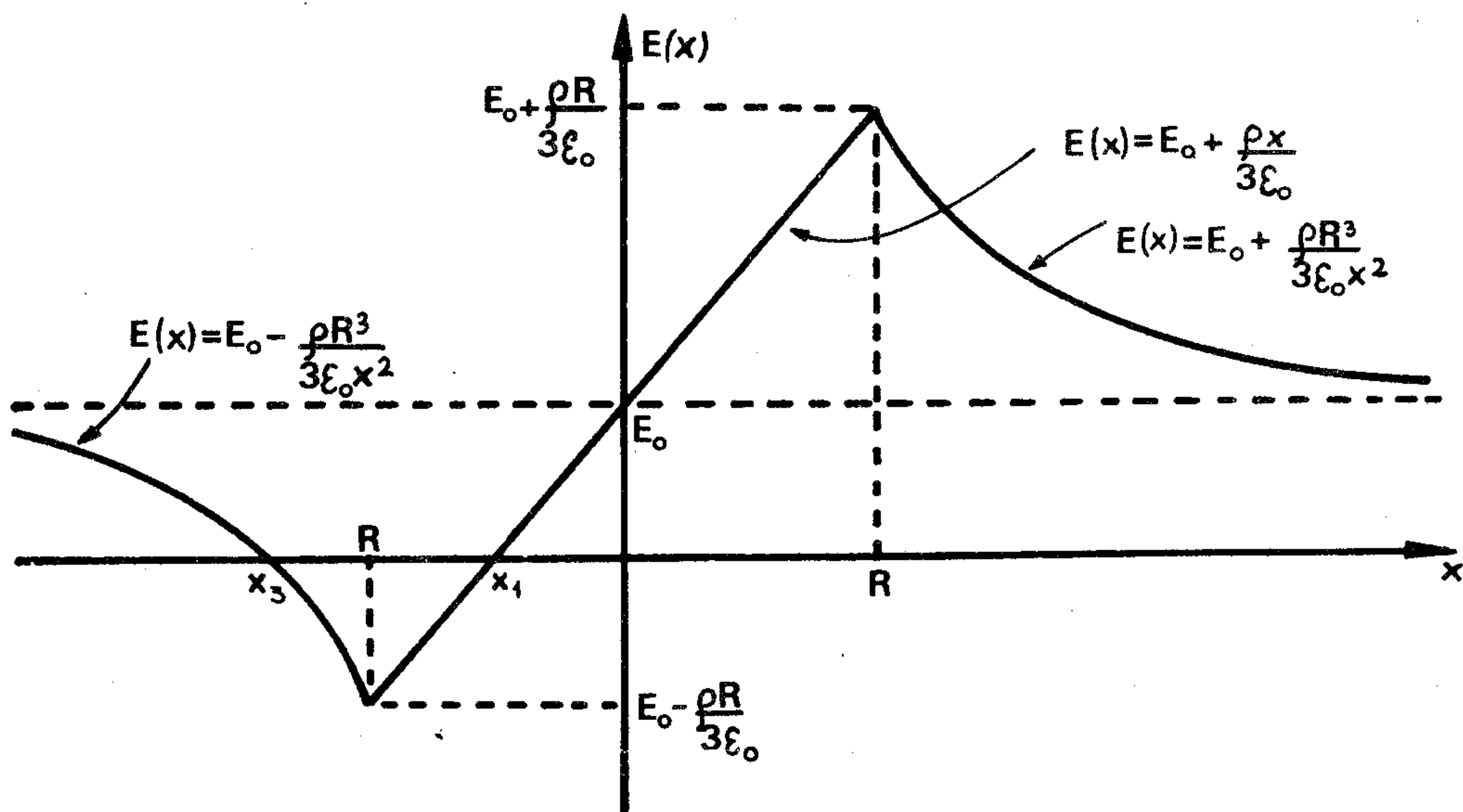


Fig. 38

(Que  $E(x)$  sea negativo, significa que  $\hat{E}$  apunta en el sentido negativo del eje  $0x$ ).

Nótese que se podría haber contestado a todas las preguntas con sólo haber hecho el gráfico; se deja propuesto al alumno lo siguiente: (a partir sólo del gráfico):

- Calcular los puntos  $x_1$  y  $x_3$ ;
- Determinar si son estables o inestables viendo hacia dónde apunta la fuerza a ambos lados de cada uno de ellos;
- En el caso  $E_0 = 0$ , determinar la ecuación del movimiento armónico simple y calcular su período;
- Determinar las condiciones que debe cumplir  $E_0$  para que haya dos, una o ninguna posiciones de equilibrio.

• PROBLEMA 14.-

Se tienen dos planos conductores paralelos infinitos de ecuaciones  $x = d$  y  $x = -d$ , respectivamente. El plano  $x = -d$  está conectado directamente a tierra, y el otro, a través de una batería cuya diferencia de potencial entre sus bornes es  $V_0$ . (Ver figura). La región comprendida entre los planos está rellena con un material dieléctrico cuya constante dieléctrica  $\epsilon$  es función de  $x$ :

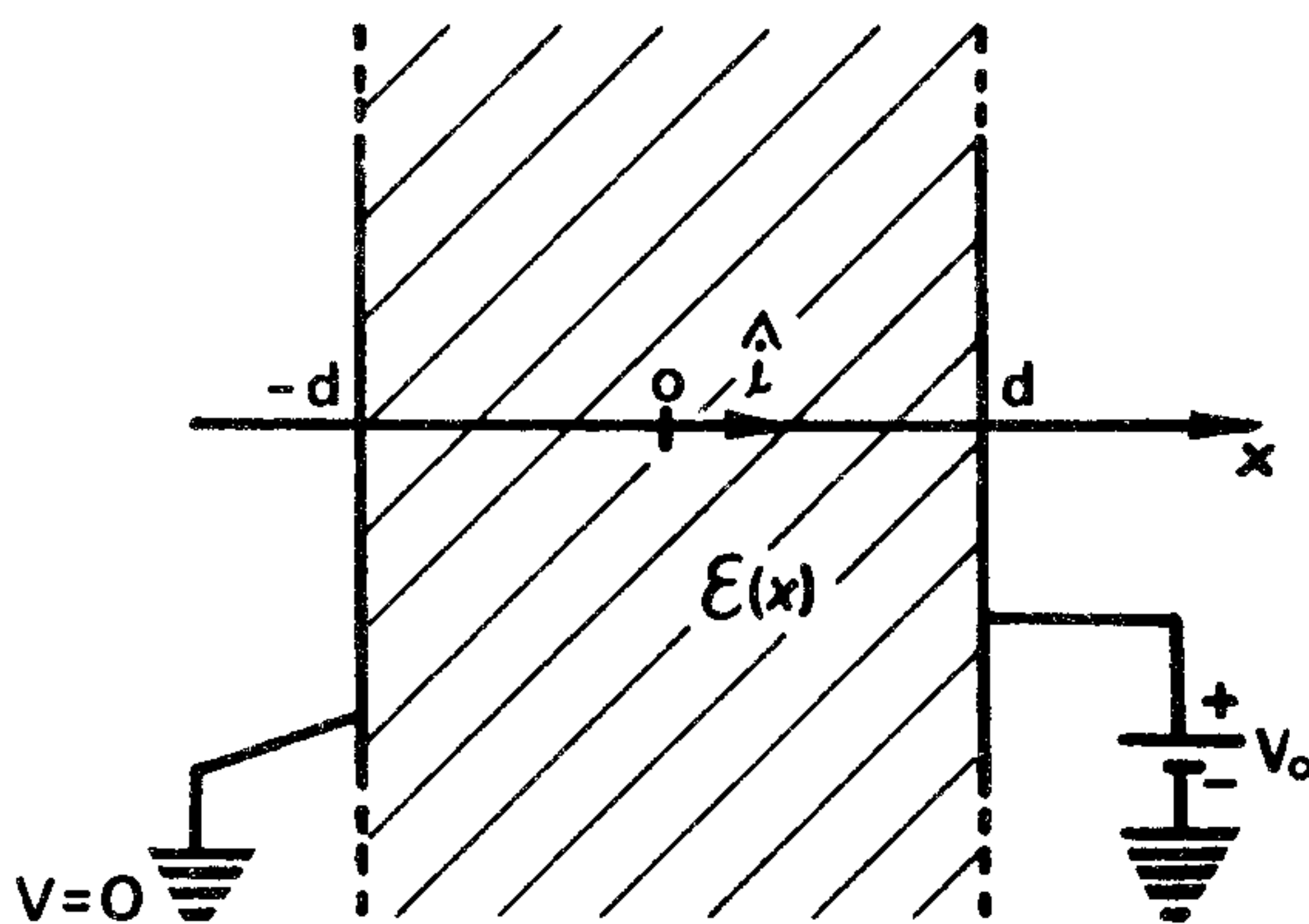
$$\epsilon = \epsilon(x) = \frac{4}{\left(\frac{x}{d}\right)^2 + 1}$$

- Calcule el campo eléctrico en todo el espacio, en función de la densidad de carga  $\sigma$  de los planos.

- b) Calcule la función potencial en todo el espacio; fije la constante de integración, (también en función de  $\sigma$ ).
- c) Calcule la densidad de carga superficial  $\sigma$  en cada uno de los planos en función de  $V_0$ .
- d) Calcule el vector polarización  $\vec{P}$ .
- e) Calcule la densidad de carga de polarización,  $\rho_p$  y la densidad de carga superficial de polarización  $\sigma_p$ , en las dos superficies del dieléctrico; compare  $\sigma_p$  con  $\sigma$ .

Suponga ahora que los planos no son infinitos, sino que tienen área  $A$ , lo suficientemente grande como para despreciar efectos de borde.

- f) Calcule la energía del sistema.
- g) Calcule la fuerza de atracción entre las placas.
- h) Calcule la capacidad del sistema.
- i) Haga un gráfico comparativo (uno sólo) de  $\epsilon_0 E(x)$ ,  $P(x)$ ,  $D(x)$ ; haga otro gráfico de  $\rho_p(x)$ .



Fíg. 39

### Resolución.-

a) Las líneas de campo fluyen de las regiones de mayor a menor potencial; en consecuencia ellas van de la placa  $x = d$  hacia la otra. Por simetría y porque las placas son infinitas y homogéneas, las densidades de carga superficial en ellas,  $\sigma$  y  $-\sigma$ , serán uniformes.

En consecuencia, las líneas de campo serán rectas perpendiculares a los planos en todo el espacio.

Para satisfacer estas dos condiciones (que comiencen en  $x = d$  y terminen en  $x = -d$ , y que sean rectas perpendiculares a estos planos), la única posibilidad es que las líneas vayan a través del dieléctrico en dirección y sentido  $-\hat{i}$ ; no pueden dar la vuelta por el infinito y llegar a  $x = -d$  porque son rectas. Entonces:

$$\vec{E} \text{ en } |x| > d \text{ vale cero}$$

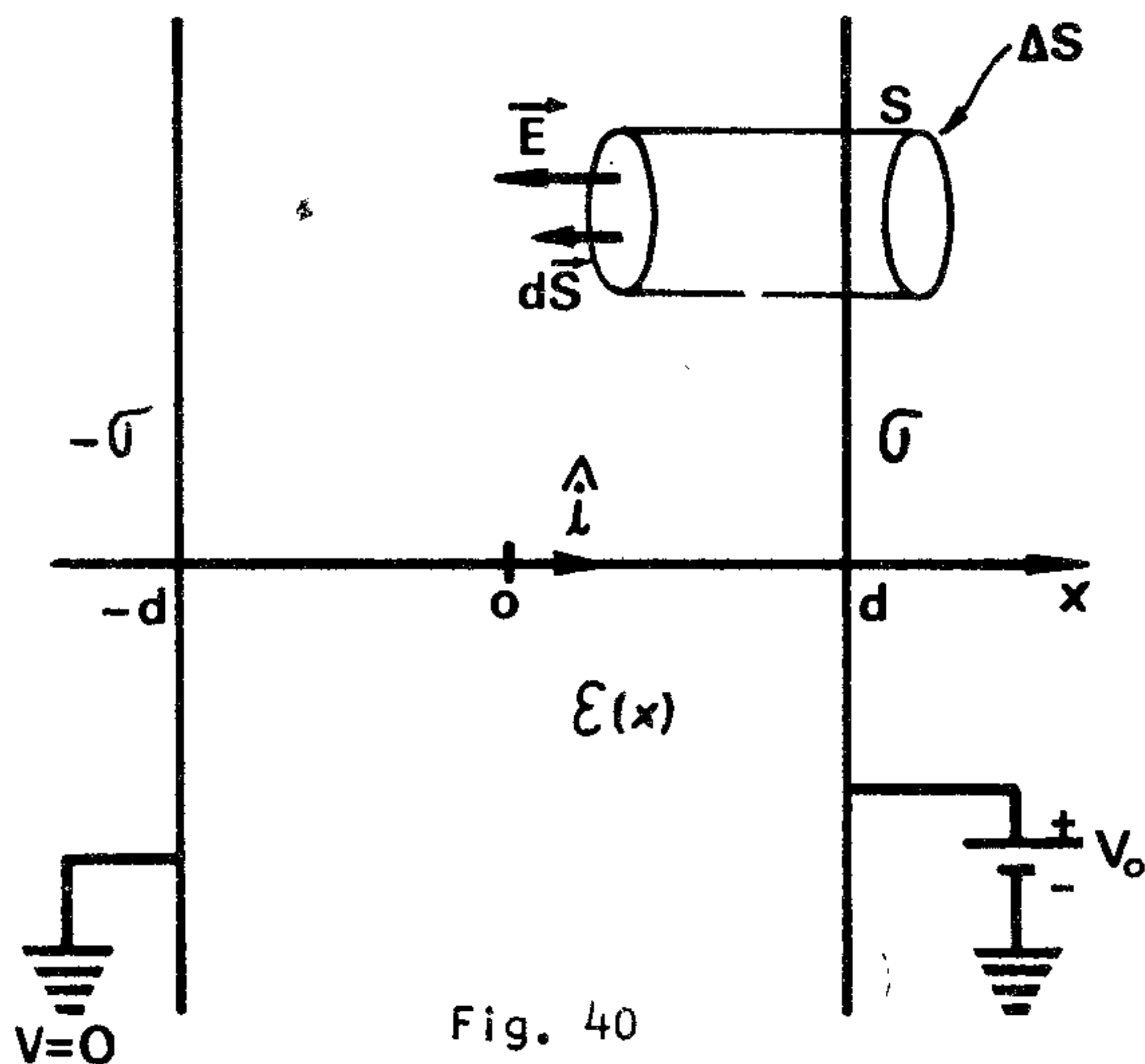


Fig. 40

Aprovechando esto, aplicamos el teorema de Gauss al cilindro dibujado en la figura;

$$\oint_{\text{cil}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{libre}} = \sigma \Delta S$$

$$\epsilon \epsilon_0 E \Delta S = \sigma \Delta S$$

luego:  $\vec{E} = - \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \hat{i}$

o sea:  $\vec{E} = - \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[ \left( \frac{x}{d} \right)^2 + 1 \right] \hat{i}$

b) Toda la región  $x \leq -d$  debe ser equipotencial, pues no hay campo; lo mismo para  $x \geq d$ ; es decir:

$$\begin{cases} V(x \leq -d) = 0 \\ V(x \geq d) = V_0 \end{cases}$$

En  $-d \leq x \leq d$ ,  $V(x) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} + C$ ,

e integrando sobre el eje  $Ox$ ,  $d\vec{r} = \hat{i}dx$ :

$$V(x) = - \int \frac{-\sigma}{4\epsilon_0} \left[ \left( \frac{x}{d} \right)^2 + 1 \right] dx + C$$

$$V(x) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[ \frac{x^3}{3d^2} + x \right] + C$$

Para determinar  $C$ , puede aplicarse la condición de borde:

$$V(-d) = 0$$

luego:  $\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[ \frac{-d^3}{3d^2} - d \right] + C = 0$

luego:  $C = \frac{\sigma d}{3\epsilon_0}$

$$\text{luego: } V(x) = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{x}{d} \right)^2 + 1 \right] + \frac{\sigma d}{3\epsilon_0} \quad (-d \leq x \leq d)$$

c) Para calcular  $\sigma$ , podemos aplicar:

$$V(d) = V_0$$

$$\text{luego: } \frac{\sigma d}{4\epsilon_0} \left[ \frac{1}{3} + 1 \right] + \frac{\sigma d}{3\epsilon_0} = V_0$$

$$\sigma = \frac{3 \epsilon_0 V_0}{2d} \quad (\text{en } x = d)$$

En el plano  $x = -d$ ,  $\sigma$  cambia de signo:

$$\sigma = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{2d} \quad (\text{en } x = -d)$$

(esto es fácil de demostrar tomando un cilindro que sea interceptado por los dos planos, y aplicándole el teorema de Gauss).

$$d) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}$$

$$\vec{P} = \left[ \frac{4}{\left( \frac{x}{d} \right)^2 + 1} - 1 \right] \epsilon_0 \frac{(-1) \sigma}{4 \epsilon_0} \left[ \left( \frac{x}{d} \right)^2 + 1 \right] \hat{i}$$

e introduciendo el valor de  $\sigma$ :

$$\vec{P} = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{8d} \left[ 3 - \left( \frac{x}{d} \right)^2 \right] \hat{i}$$

$$e) \quad \rho_p = - \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\rho_p = - \frac{\partial P_x}{\partial x}$$

$$\rho_p = - \frac{dP}{dx}$$

$$\rho_p = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{4 d^3} x;$$

$$\sigma_p = P_n = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

i) en  $x = d$ ,  $\hat{n} = \hat{i}$ ; entonces:

$$\sigma_p(d) = \vec{P} \cdot \hat{i} \Big|_{-d}$$

$$\sigma_p(d) = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{8d} \left[ 3 - \left( \frac{d}{d} \right)^2 \right]$$



$$\sigma_p(d) = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{8d} \cdot 2$$

$$\sigma_p(d) = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{4d} = - \frac{\sigma}{2}$$

ii) en  $x = -d$ ,  $\hat{n} = -\hat{i}$ ; entonces:

$$\sigma_p(d) = - \hat{p} \cdot \hat{i} \Big|_{-d}$$

$$\sigma_p(-d) = \frac{3 \epsilon_0 V_0}{8d} \left[ 3 - \left( \frac{-d}{d} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_p(-d) = + \frac{3 \epsilon_0 V_0}{4d} = \frac{\sigma}{2}$$

f)  $W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$

en nuestro caso:

$$V_1 = 0; \quad q_1 = A \sigma (-d)$$

$$V_2 = V_0 \quad q_2 = A \sigma (d)$$

$$W = \frac{1}{2} V_0 A \cdot \frac{3 \epsilon_0 V_0}{2d}$$

$$W = \frac{3 \epsilon_0 V_0^2 A}{4d}$$

(podríamos haber calculado  $W$  por otras dos maneras, por lo menos:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\mathcal{V} \text{ en que } \mathcal{V} \text{ es toda la región entre las placas;}$$

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

g) Cuando hay campo hacia un solo lado de una placa, se cumple:

$$F = \frac{1}{2} QE$$

en que  $Q$  es la carga total de la placa, y  $E$  es el campo que existe en ese lugar; la fuerza está dirigida hacia adentro (las placas se atraen)

$$F = \frac{1}{2} \sigma A \cdot \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[ \left( \frac{d}{d} \right)^2 + 1 \right]$$

$$F = \frac{9 \epsilon_0 V_0^2 A}{16 d^2}$$

h) La capacidad del condensador será:

$$C = \frac{Q}{V}$$

en que  $Q$  = valor absoluto de la carga de una placa, y  $V$  es el valor absoluto de la diferencia de potencial entre ellos:

$$C = \frac{AQ}{V}$$

$$C = \frac{3 \epsilon_0 A}{2d}$$

i)

$$\epsilon_0 \vec{E}(x) = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{8d} \left[ \left( \frac{x}{d} \right)^2 + 1 \right] \hat{u}$$

$$\epsilon_0 E(x) = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{8d} \left[ \left( \frac{x}{d} \right)^2 + 1 \right]$$

$$P(x) = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{8d} \left[ 3 - \left( \frac{x}{d} \right)^2 \right]$$

$$\vec{D}(x) = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{8d} \left[ \left( \frac{x}{d} \right)^2 + 1 + 3 - \left( \frac{x}{d} \right)^2 \right] \hat{u}$$

$$\vec{D} = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{2d} \hat{u}$$

$$D(x) = - \frac{3 \epsilon_0 V_0}{2d} \quad (\text{es una constante})$$

Gráfico de:

$\epsilon_0 E(x)$ ,  $P(x)$ ,  $D(x)$ :

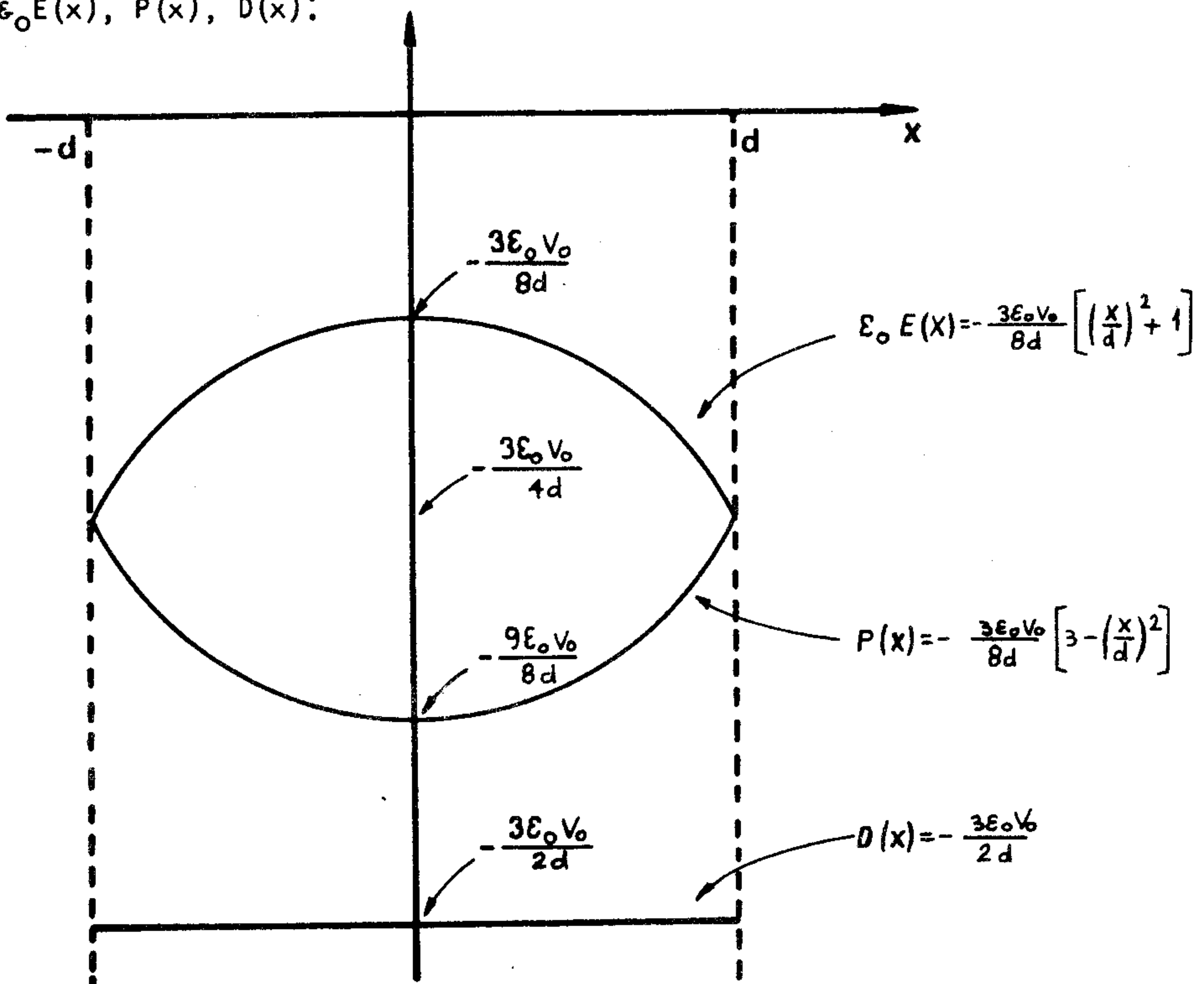


Fig. 41

(El hecho que  $\epsilon_0 E(x)$ ,  $P(x)$ ,  $D(x)$  sean negativos quiere decir que apuntan hacia la izquierda).

Gráfico de  $\rho_p(x)$ :

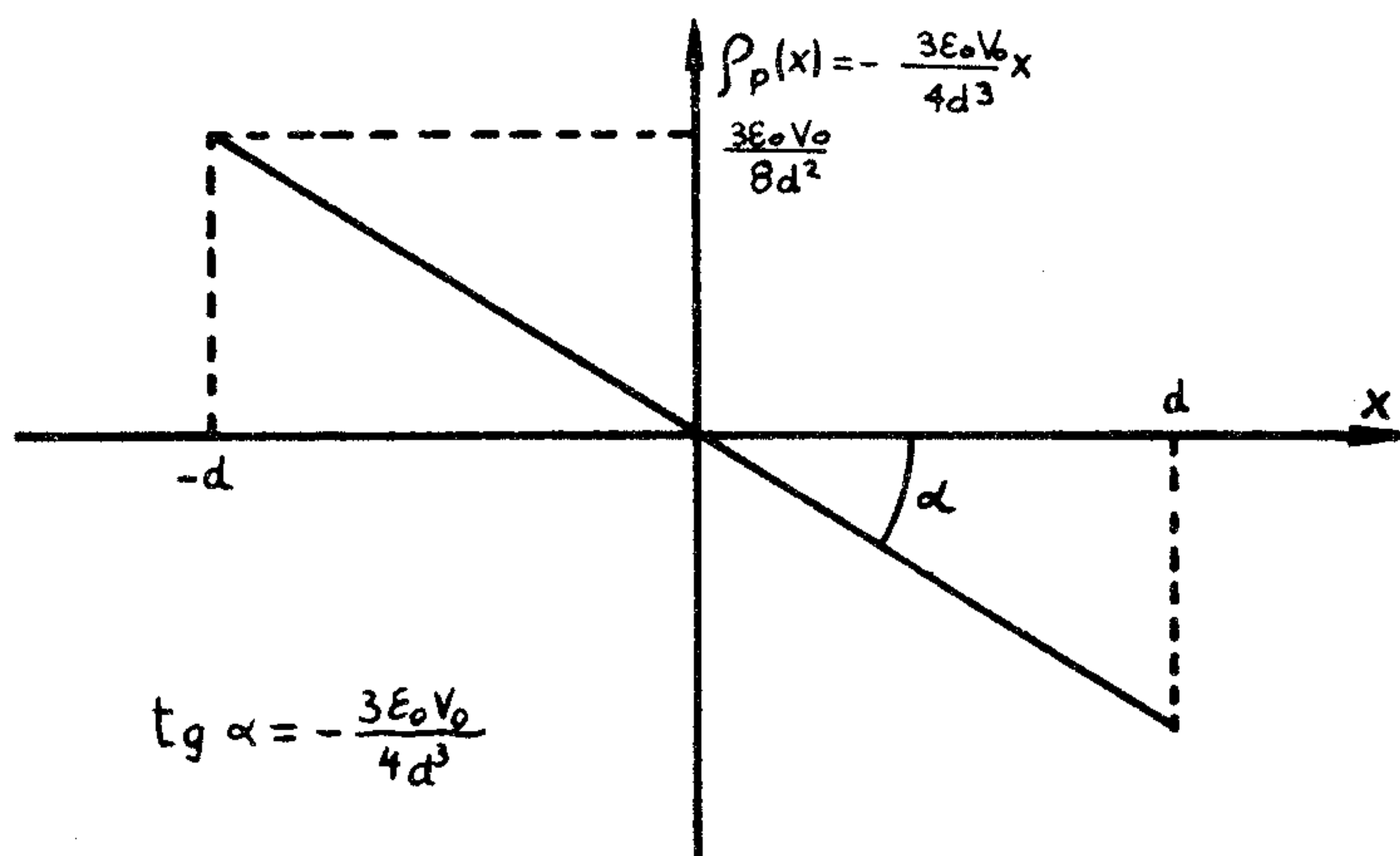


Fig. 42

PROBLEMA 15.-

Tres condensadores de capacidades  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  están conectados en serie. El sistema está conectado a una batería, de modo que cada condensador está cargado con una carga  $Q$ .

Se desconecta la batería y los tres condensadores entre sí, (que permanecen cargados) y se vuelven a conectar en paralelo.

Calcule la variación de energía del sistema; ¿qué se hizo la diferencia de energía?

Resolución.-

La figura correspondiente al primer caso es:

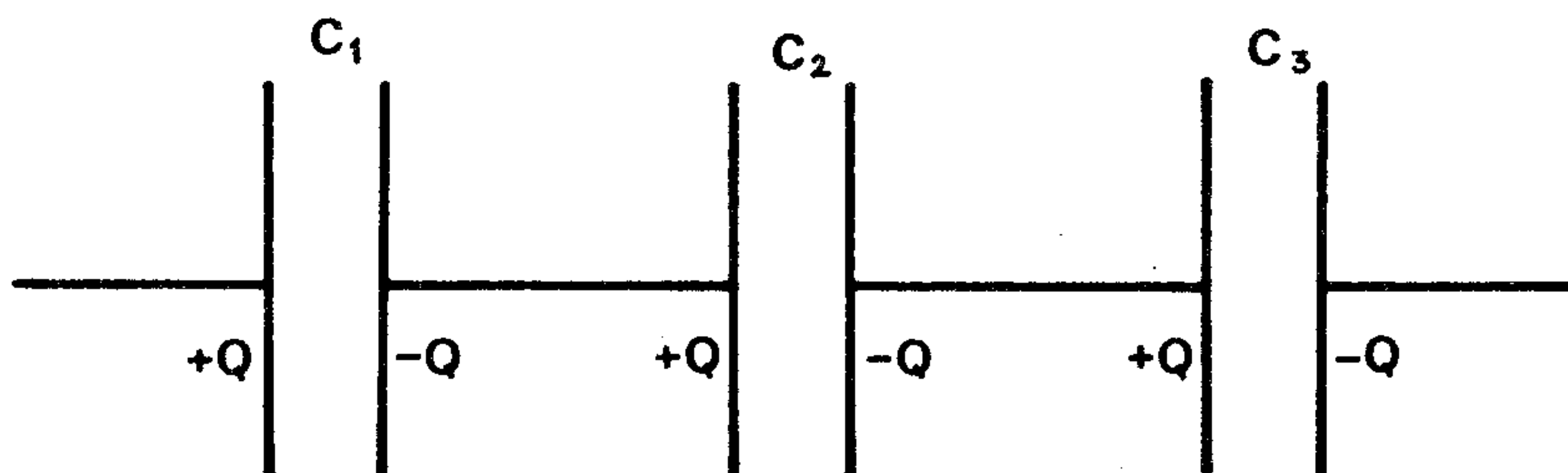


Fig. 43

La energía de este sistema es:

$$W_1 = \frac{1}{2} Q^2 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$



En el segundo caso, la figura es:

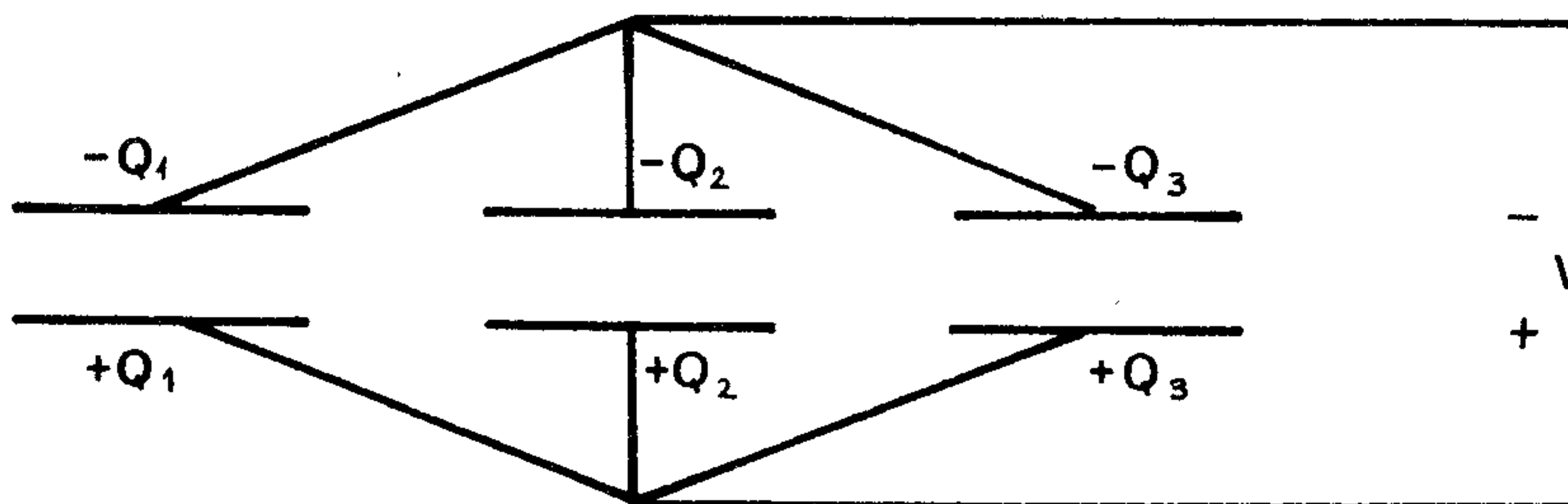


Fig. 44

La energía de este sistema es:

$$W_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{Q_3^2}{C_3} \right)$$

Pero se cumplen las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_1 V \\ Q_2 &= C_2 V \\ Q_3 &= C_3 V \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 &= 3 Q \end{aligned} \right\}$$

en que  $V$  es la diferencia de potencial común entre los bornes de los condensadores; la cuarta ecuación es simplemente la expresión de la conservación de carga entre el primer y segundo caso.

De aquí:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{3 Q}{C}$$

en que  $C = C_1 + C_2 + C_3$  es la capacidad total de la segunda configuración.

Luego

$$\left\{ \begin{aligned} Q_1 &= 3 Q \frac{C_1}{C} \\ Q_2 &= 3 Q \frac{C_2}{C} \\ Q_3 &= 3 Q \frac{C_3}{C} \end{aligned} \right.$$

Entonces:

$$W_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{9 Q^2 C_1^2}{C^2 C_1} + \frac{9 Q^2 C_2^2}{C^2 C_2} + \frac{9 Q^2 C_3^2}{C^2 C_3} \right)$$

$$W_2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$\Delta W = W_2 - W_1$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} Q^2 \left( \frac{9}{C_1 + C_2 + C_3} - \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_3} \right)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} Q^2 \left( \frac{9 C_1 C_2 C_3 - (C_1 + C_2 + C_3)(C_2 C_3 + C_3 C_1 + C_1 C_2)}{(C_1 + C_2 + C_3) C_1 C_2 C_3} \right)$$

Desarrollando y reordenando los términos se llega a:

$$\Delta W = \frac{1}{2} Q^2 \left( \frac{C_1 (C_2 - C_3)^2 + C_2 (C_1 - C_3)^2 + C_3 (C_2 - C_1)^2}{(C_1 + C_2 + C_3) C_1 C_2 C_3} \right) < 0$$

Esta diferencia de energía se ha perdido en forma de ondas electromagnéticas; recordemos que en ninguna parte tenemos resistencias, de modo que las corrientes que circulan por los cables al reconectar los condensadores es infinitamente grande, aunque dura un lapso de tiempo infinitamente pequeño; es probable, entonces, que "salten chispas" al reconectar, lo que da cuenta de la generación de ondas electromagnéticas. En la práctica, la resistencia no es nunca cero, y la energía que pierden los condensadores se transformará entonces en calor.

#### • PROBLEMA 16.-

Una esfera de radio  $R$  y de material no polarizable ( $\epsilon = 1$ ) está cargada con densidad de carga uniforme, de tal modo que su carga total es  $q$ ;

- Calcule la energía del sistema;
- Suponga que la esfera se trata de un electrón; la energía de éste (obtenida por consideraciones relativistas) es del orden de  $10^{-13}$  Joule; obtenga un orden de magnitud de su radio.

Resolución.-

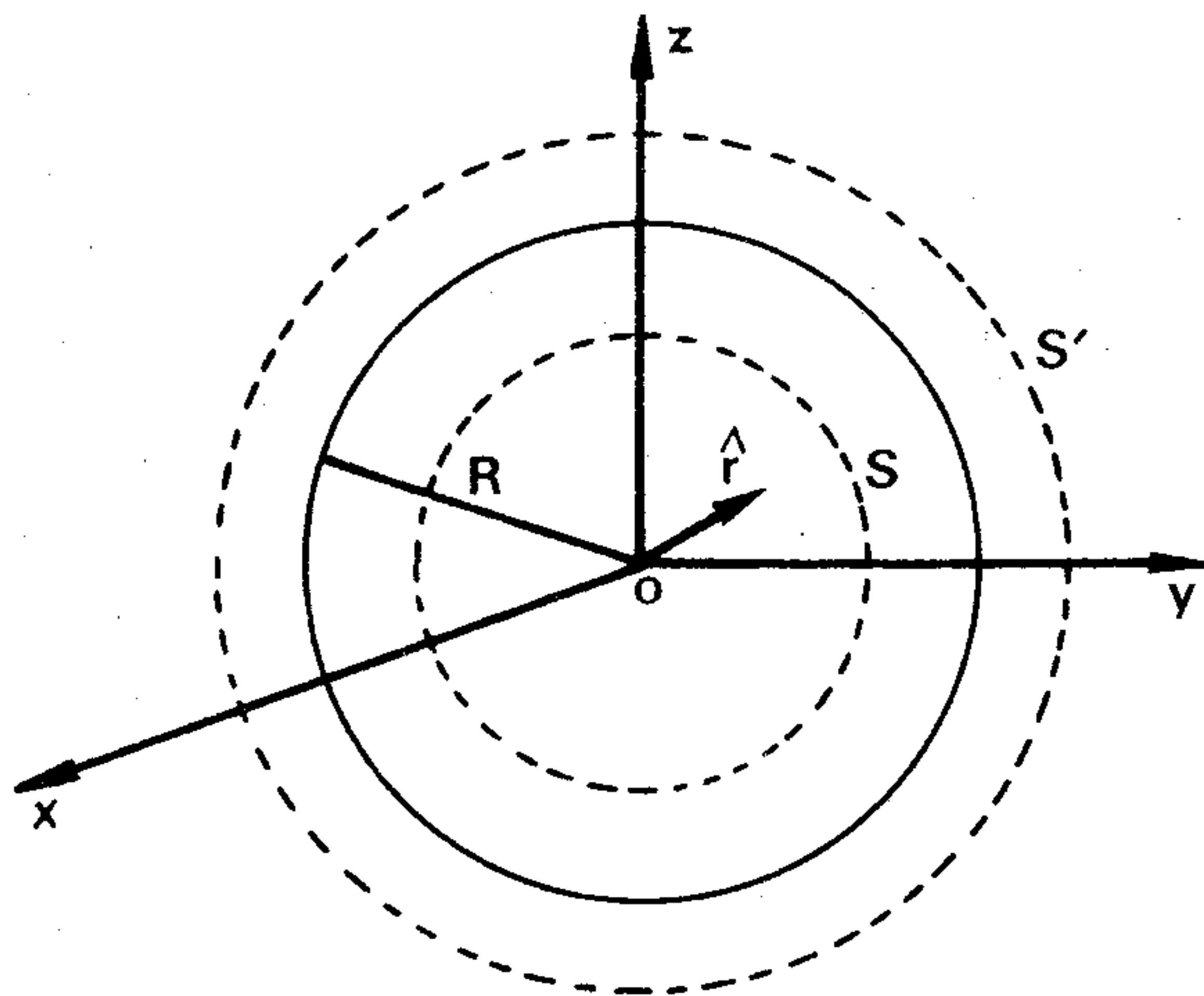


Fig. 45

- Sea la esfera de centro  $O$  y radio  $R$ ; aplicando el teorema de Gauss a una esfera concéntrica de radio  $r$ , se obtiene:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{para } r \leq R)$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \rho \pi r^3 \quad (\text{pues } E \text{ es sólo función de } r \text{ y es radial})$$

$$\text{pero } \rho = \frac{q}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

luego:  $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r} = \frac{1}{3\epsilon_0} \cdot \frac{3 q r}{4\pi R^3} \hat{r} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r} \quad (r \leq R)$

para  $r \geq R$ :

$$\oiint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

luego:  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

La energía del sistema será:

$$W = \iiint_{\mathcal{E}} \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} d\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{E}} \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} d\mathcal{E}$$

en que  $\mathcal{E}$  es toda la región en que existe campo eléctrico, (todo el espacio)

Sea  $W_1$  la energía de la región  $r \leq R$ , y  $W_2$  la de la región  $r \geq R$ ; se cumple:

$$W = W_1 + W_2.$$

Calculemos  $W_1$  y  $W_2$ :

$$W_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{r \leq R} E^2 d\mathcal{E}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 \cdot \iiint r^4 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 \cdot 4\pi \frac{R^5}{5}$$

$$W_1 = \frac{q^2}{40\pi\epsilon_0 R}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{r \geq R} E^2 d\mathcal{E}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=R}^{\infty} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{R}$$

$$W_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Finalmente:

$$W = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 R} \cdot \left( \frac{1}{40} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

b) Para el electrón se sabe que:

$$W \approx 10^{-13} \text{ [Joule.]}$$

$$q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ [Coulomb]}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{\text{Farad}}{\text{m}} \right]$$

pero

$$R = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 W}$$

$$R \approx \frac{3 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19})^2}{20 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-13}} \text{ [metros]}$$

$$R \approx 1,38 \cdot 10^{-15} \text{ [m]}$$

$$R \approx 10^{-5} \text{ A}^\circ = 1 \text{ [Fermi]}$$

#### PROBLEMA 17.-

Se tiene  $n$  conductores a potenciales  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En el espacio entre los conductores hay una distribución de carga tal que la carga total es finita. Demostrar que si una función satisface la ecuación de Poisson en todo el espacio, y además toma los valores  $V_i$  sobre la superficie (o interior) de los  $n$  conductores, ella es única.

#### Resolución.-

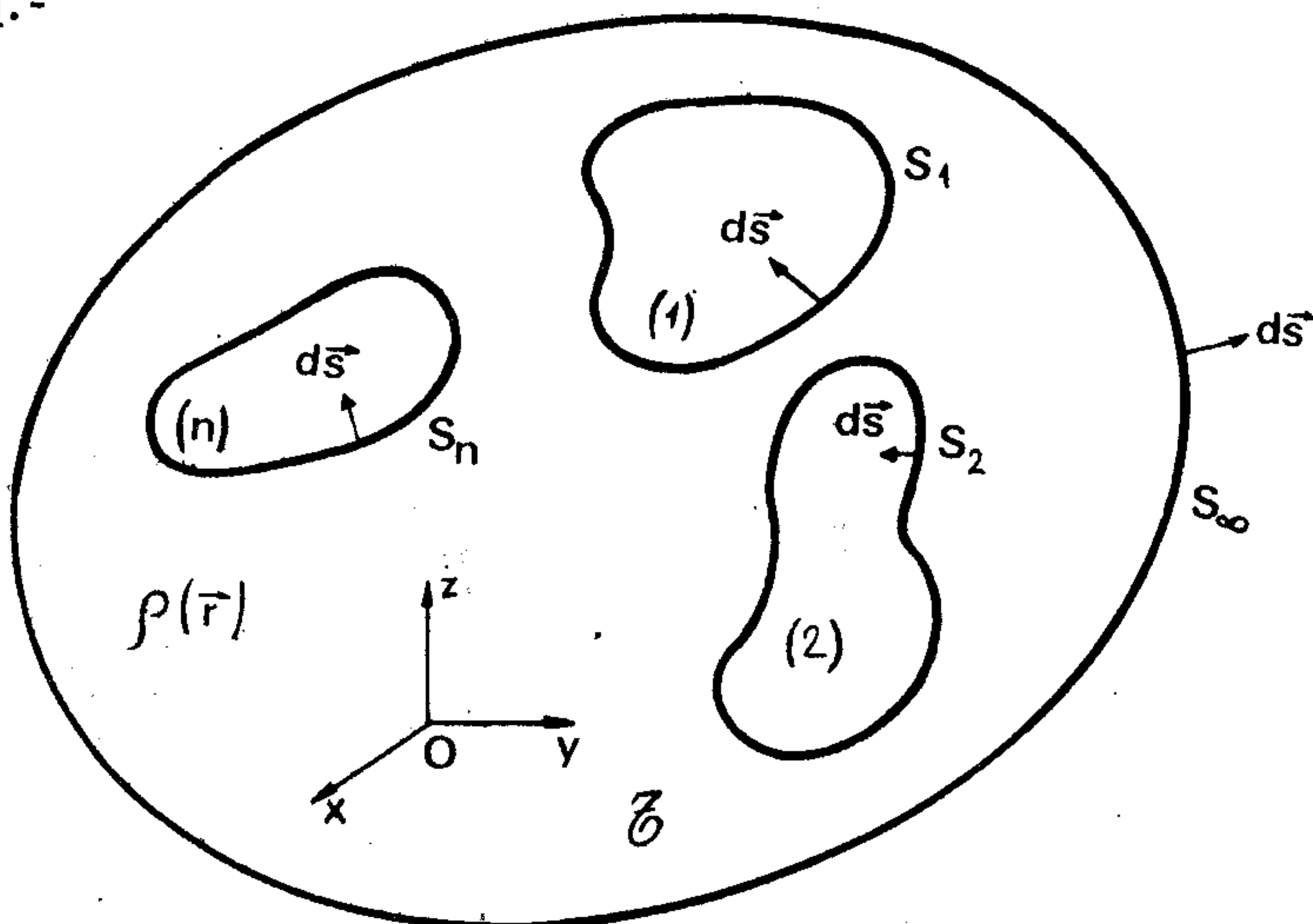


Fig. 46

Sean  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  las superficies que rodean a los conductores. Dentro de los conductores no hay carga ni campo, de modo que el potencial dentro del conductor  $i$ -ésimo es  $V_i$ .

Sea  $\mathcal{V}$  la región en la cual existe campo eléctrico; esta región es todo el espacio salvo el interior de los conductores; en consecuencia la podemos considerar limitada por una superficie esférica de radio infinito,  $S_\infty$  y por las superficies  $S_i$  que rodean a los conductores (los elementos diferenciales vectoriales  $d\vec{S}$  que hay dibujados son los que emergen del volumen  $\mathcal{V}$ ).

Sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  dos funciones definidas en el volumen  $\mathcal{V}$  tales que satisfacen la ecuación de Poisson y que toman los valores  $V_i$  sobre las superficies  $S_i$ ; es decir:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_1 = - \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} \\ \nabla^2 \phi_2 = - \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} \\ \phi_1(S_i) = \phi_2(S_i) = V_i, \quad \forall i = 1, \dots, n; \end{cases}$$

como el operador laplaciano es lineal, se tendrá:

$$\nabla^2 (\phi_1 - \phi_2) = 0$$

Sea  $\psi = \phi_1 - \phi_2$ ;

evidentemente se cumple (por hipótesis);

$$\psi(S_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Probaremos que  $\psi = 0$  en todo el espacio.

Se cumple:  $\nabla^2 \psi = 0$ ;

una identidad nos dice que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) &= (\nabla \psi)^2 + \psi \nabla^2 \psi \\ &= (\nabla \psi)^2 \quad (\nabla^2 \psi = 0 \text{ en todo el espacio}) \end{aligned}$$

integramos esta ecuación en el volumen  $\mathcal{V}$ :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \psi)^2 d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) d\mathcal{V}$$

pero el teorema de la divergencia nos dice que:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) d\mathcal{V} = \oint_S \psi (\nabla \psi) \cdot d\vec{S}$$

en que  $S$  es la superficie que encierra al volumen  $\mathcal{V}$ ; en nuestro caso:

$$S = S_\infty + \sum_{i=1}^n S_i$$

luego:

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \psi)^2 d\mathcal{V} = \oint_{S_\infty} \psi (\nabla \psi) \cdot d\vec{S} + \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \psi (\nabla \psi) \cdot d\vec{S}$$

pero  $\psi(S_i) = 0$ , luego:



$$\sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \psi \nabla \psi \cdot d\vec{S} = 0$$

por otra parte, puesto que la carga total de la distribución es finita, en el límite, cuando nos alejamos mucho, se cumple: ( $r \rightarrow \infty$ )

$\psi$  decrece con  $\frac{1}{r}$ , o más rápido (pues  $\varnothing_1$  y  $\varnothing_2$  lo hacen)

$d\vec{S}$  es proporcional a  $r^2$

$\nabla \psi$  decrece con  $\frac{1}{r^2}$ , o más rápido

en consecuencia,

$$\oint_{S_\infty} \psi (\nabla \psi) \cdot d\vec{S} = 0, \text{ aún en el peor de los casos, puesto}$$

que, en  $S_\infty$ ,  $r = \infty$

Luego, finalmente:

$$\iiint_V (\nabla \psi)^2 d\tau = 0$$

Como  $(\nabla \psi)^2$  es no negativo, no queda otra que:

$$\nabla \psi = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \psi = \text{constante (en todo el espacio)}$$

pero  $\psi(S_i) = 0$ , entonces:

$$\text{constante} = 0$$

luego:  $\psi = 0$  en todo el espacio, luego  $\varnothing_1 = \varnothing_2$

#### PROBLEMA 18.-

Se tiene una esfera metálica de radio  $R$  conectada a tierra (potencial cero), y se acerca una carga  $q > 0$  hasta una distancia  $D$  del centro ( $D > R$ ).

- Calcule la densidad superficial de carga  $\sigma$  que se induce en la esfera.
- Calcule a partir de  $\sigma$  la carga total inducida.
- Calcule la fuerza entre carga y esfera de dos maneras distintas: utilizando la densidad superficial  $\sigma$  ya calculada.
- Demuestre que el sistema carga-imagen produce un campo eléctrico tangencial nulo sobre la superficie de la esfera.

#### Resolución.-

Tomemos coordenadas de acuerdo al siguiente esquema: (Ver figura 47).

- Mediante el método de imágenes sabemos que la carga imagen  $q'$  está a una distancia  $b$  del centro, en que:

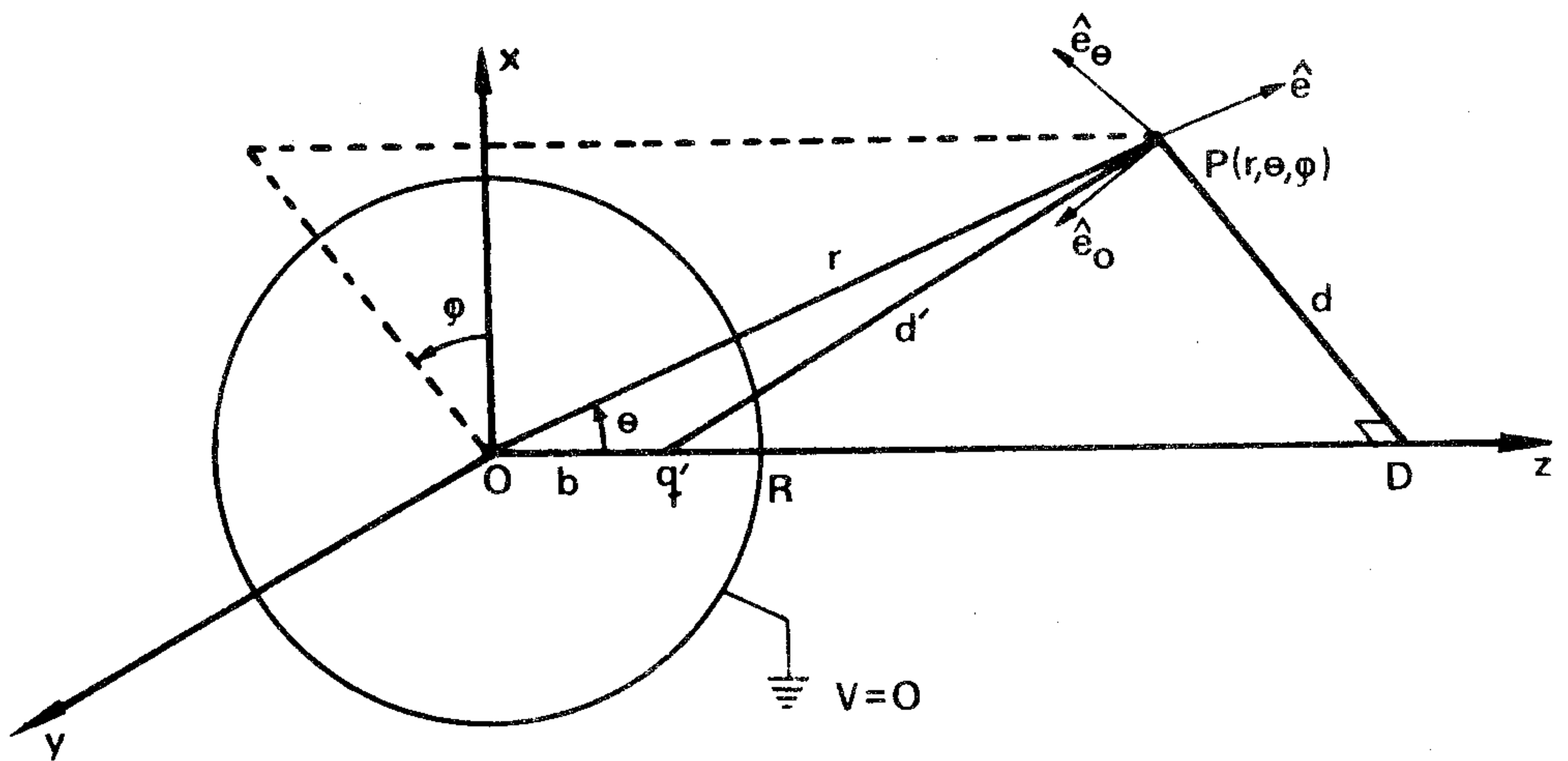


Fig. 47

$$\begin{cases} b = \frac{R^2}{D} \\ q' = -\frac{b}{R} q = -\frac{R}{D} q \end{cases}$$

El potencial en un punto P (r, θ, φ) exterior a la esfera será:

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q'}{d'} + \frac{q}{d} \right] ;$$

por simple geometría se sabe que:

$$\begin{cases} d'^2 = b^2 + r^2 - 2br \cos \theta \\ d^2 = D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta \end{cases}$$

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q'}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}} + \frac{q}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta}} \right]$$

y el campo eléctrico en este punto es

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

pero como V no depende de φ, se tiene:

$$\vec{E} \equiv E_r \hat{r} + E_\theta \hat{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta .$$

Nos interesa el campo eléctrico radial  $E_r$ :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q'(r-b \cos \theta)}{(r^2 + b^2 - 2br \cos \theta)^{3/2}} + \frac{q(r-D \cos \theta)}{(r^2 + D^2 - 2Dr \cos \theta)^{3/2}} \right] .$$

Por otra parte, el campo eléctrico sobre una superficie metálica cargada es:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{r} ;$$

en nuestro caso:

$$\vec{E}(R, \theta, \phi) = \frac{\sigma(R, \theta, \phi)}{\epsilon_0} \hat{r} = E_r(R, \theta, \phi) \hat{r}$$

y de aquí, se tiene:

$$\sigma(R, \theta, \phi) = \epsilon_0 E_r(R, \theta, \phi)$$

y luego:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{q'(R-b \cos \theta)}{(R^2 + b^2 - 2bR \cos \theta)^{3/2}} + \frac{q(R - D \cos \theta)}{(R^2 + D^2 - 2DR \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

introduciendo los valores de  $q'$  y  $b$ , y reordenando los términos, se llega a:

$$\sigma(\theta) = \frac{q(R^2 - D^2)}{4\pi R(R^2 + D^2 - 2DR \cos \theta)^{3/2}}$$

b) La carga total será:

$$Q = \iint_{\text{esfera}} \sigma ds$$

$$Q = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sigma(\theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$Q = \frac{q(R^2 - D^2)}{4\pi R} R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(R^2 + D^2 - DR \cos \theta)^{3/2}}$$

$$Q = \frac{qR(R^2 - D^2)}{2} \left( \frac{-1}{DR \sqrt{D^2 + R^2 - 2DR \cos \theta}} \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$Q = \frac{q(D^2 - R^2)}{2D} \left[ \frac{1}{D+R} - \frac{1}{D-R} \right]$$

$$Q = -q \frac{R}{D} = q',$$

que es el resultado que esperábamos.

c) Al exterior de la esfera, todo sucede como si ella se remplazara por la carga imagen  $q'$ ; la fuerza será:

$$F = \frac{q q'}{4\pi \epsilon_0 (D - b)^2}$$

$$F = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q^2 R D}{(D^2 - R^2)^2}$$

Calculemos ahora esta fuerza a partir del conocimiento de  $\sigma$ ;

cada elemento de superficie  $dS$  de la esfera tiene una carga  $dQ = \sigma dS$ ; éste ejerce una fuerza  $d\vec{F}$  sobre la carga  $q$ :

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q \sigma(\theta) dS (D\hat{k} - \hat{r})}{(D^2 + R^2 - 2DR \cos \theta)^{3/2}}$$



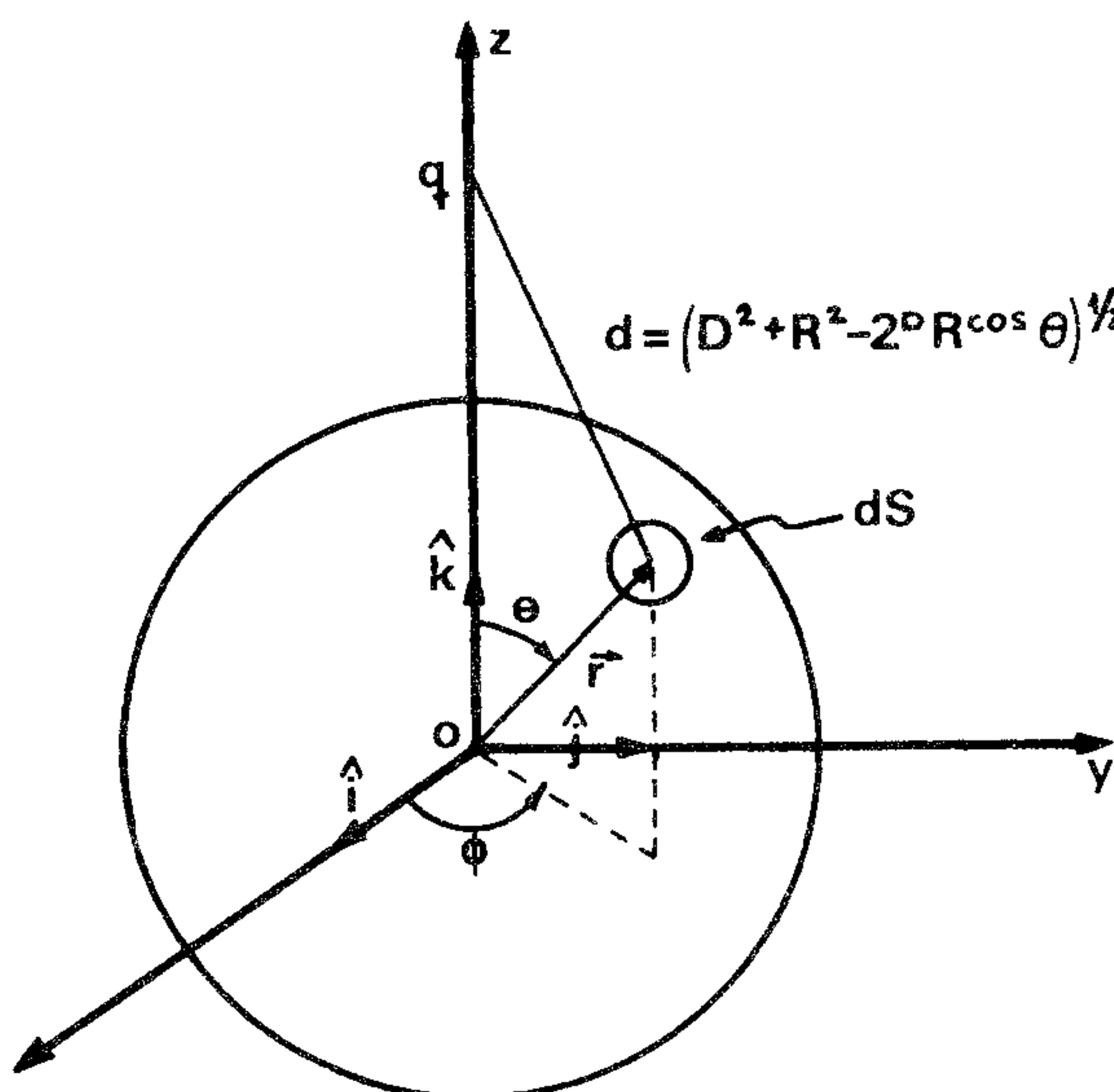


Fig. 48

$$d \vec{F} = \frac{q d S (R^2 - D^2)}{4 \pi \epsilon_0} \frac{(D \hat{k} - \hat{i} R \sin \theta \cos \phi - \hat{j} R \sin \theta \sin \phi - \hat{k} R \cos \theta)}{4 \pi R (D^2 + R^2 - 2DR \cos \theta)^3}$$

y la fuerza total será:

$$\vec{F} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d \vec{F} ;$$

las componentes de  $\vec{F}$  según  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  se anulan puesto que

$$\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{Bmatrix} d\phi = 0 ;$$

luego:

$$\vec{F} = \frac{q^2 (R^2 - D^2) \hat{k}}{4 \pi \epsilon_0 \cdot 4 \pi R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{(D - R \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta}{(R^2 + D^2 - 2DR \cos \theta)^3}$$

$$\vec{F} = \frac{q^2 R (R^2 - D^2) \hat{k}}{8 \pi \epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{(D - R \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(R^2 + D^2 - 2DR \cos \theta)^3} ;$$

la integral puede llevarse a cabo fácilmente haciendo el cambio de variable:

$$\xi = \cos \theta$$

de modo que queda:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{(D - R \xi) d\xi}{(D^2 + R^2 - 2DR \xi)^3} ;$$

esta integral es del tipo

$$I = \int_{-1}^1 \frac{a + bx}{(c + dx)^3} dx = a \int_{-1}^1 \frac{dx}{(c + dx)^3} + b \int_{-1}^1 \frac{xdx}{(c+dx)^3}$$

y cuyo resultado es

$$I = \left( -\frac{a}{2d(c+dx)^2} + \frac{bc}{2d^2(c+dx)^2} - \frac{b}{d^2(c+dx)} \right) \Big|_{-1}^1 ;$$

evaluando esta expresión entre los límites y ordenando, resulta

$$I = \frac{2(ac - bd)}{(c^2 - d^2)^2} ,$$

y sustituyendo los valores originales para a, b, c y d:

$$\begin{aligned} a &= D & , & & b &= -R \\ c &= D^2 + R^2 & & & d &= -2DR, \end{aligned}$$

resulta finalmente:

$$I = \frac{2D}{(D^2 - R^2)^3} ,$$

y de aquí resulta  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{q^2 R (R^2 - D^2)}{8\pi\epsilon_0} \frac{2D}{(D^2 - R^2)^3} \hat{k} \\ \vec{F} &= - \frac{q^2 R D}{4\pi\epsilon_0 (D^2 - R^2)^2} \hat{k} , \end{aligned}$$

que es el resultado que ya conocíamos.

d) El campo eléctrico tangencial sobre la superficie de la esfera es  $E_\theta$ :

$$E_\theta = - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_{r=R} ;$$

es decir, nos basta demostrar que  $\frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = 0 ;$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(-\frac{1}{2})q' (2br \sin \theta)}{(b^2 + r^2 - br \cos \theta)^{3/2}} + \frac{(-\frac{1}{2})q (2D r \sin \theta)}{(D^2 + r^2 - 2D r \cos \theta)^{3/2}} \right] ;$$

sustituyendo los valores de  $q'$  y  $b$ , y evaluando la expresión sobre la superficie de la esfera, es decir, haciendo  $r = R$ , resulta inmediatamente que

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = 0 ,$$

lo que era de esperar, pues esta es una de las condiciones fundamentales para que sea aplicable el método de imágenes.

#### PROBLEMA 19.-

Calcular la resistencia de un tronco de cono de altura  $h$  y radios basales  $a$  y  $b$ , en los siguientes casos:

a) La resistividad  $\rho$  es constante;

b)  $\rho = \rho_0 \frac{z}{h}$  ;

c)  $\rho = \rho_0 \frac{x^2 + y^2}{b^2}$  .

(En b y c, se elige un sistema de coordenadas tal que el eje z coincida con el eje del tronco de cono, y el origen está en el vértice del cono del cual se obtuvo el tronco).

Resolución.-

Hagamos el esquema del tronco de cono

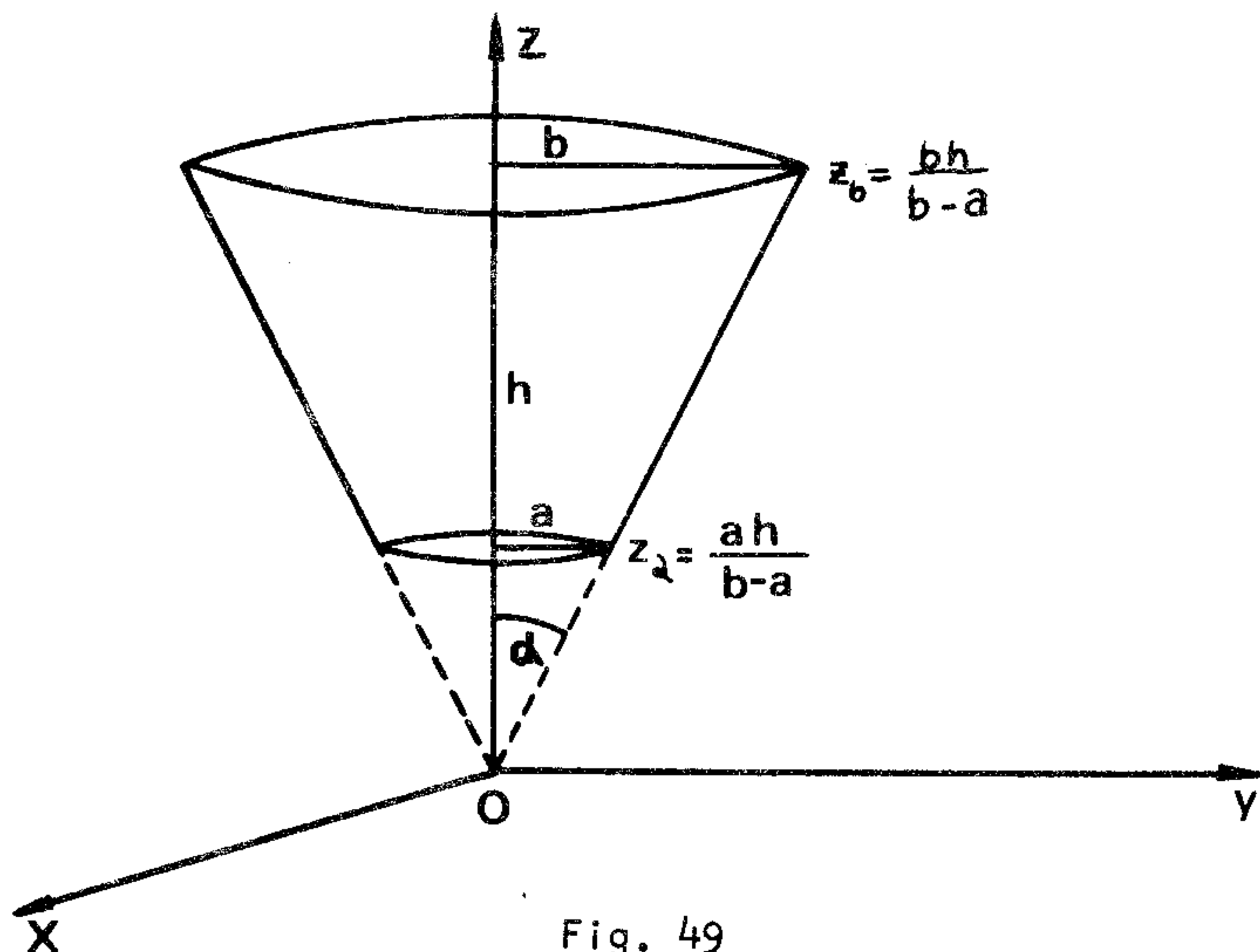


Fig. 49

El problema del cálculo de la resistencia del tronco entre las bases es muy complicado si se quiere resolver en forma exacta; para hacerlo tendríamos que resolver la ecuación de Poisson con simetría cilíndrica en torno al eje z, impidiendo que fuera del tronco de cono exista campo eléctrico, y con la condición de que el potencial sobre las superficies basales sea constante.

Sin embargo, podemos resolver el problema en forma aproximada. Para esto, supongamos que las líneas de corriente  $\vec{j}$  (y por lo tanto  $\vec{E}$ ) son radiales; por simetría cilíndrica (aún en los casos b) y c)), las superficies equipotenciales son casquetes esféricos limitados por la superficie del tronco de cono. En coordenadas esféricas, estos casquetes están descritos por las ecuaciones  $r = \text{cte}$ ,  $0 \leq \theta \leq \alpha$ ,  $\phi = \phi$ :

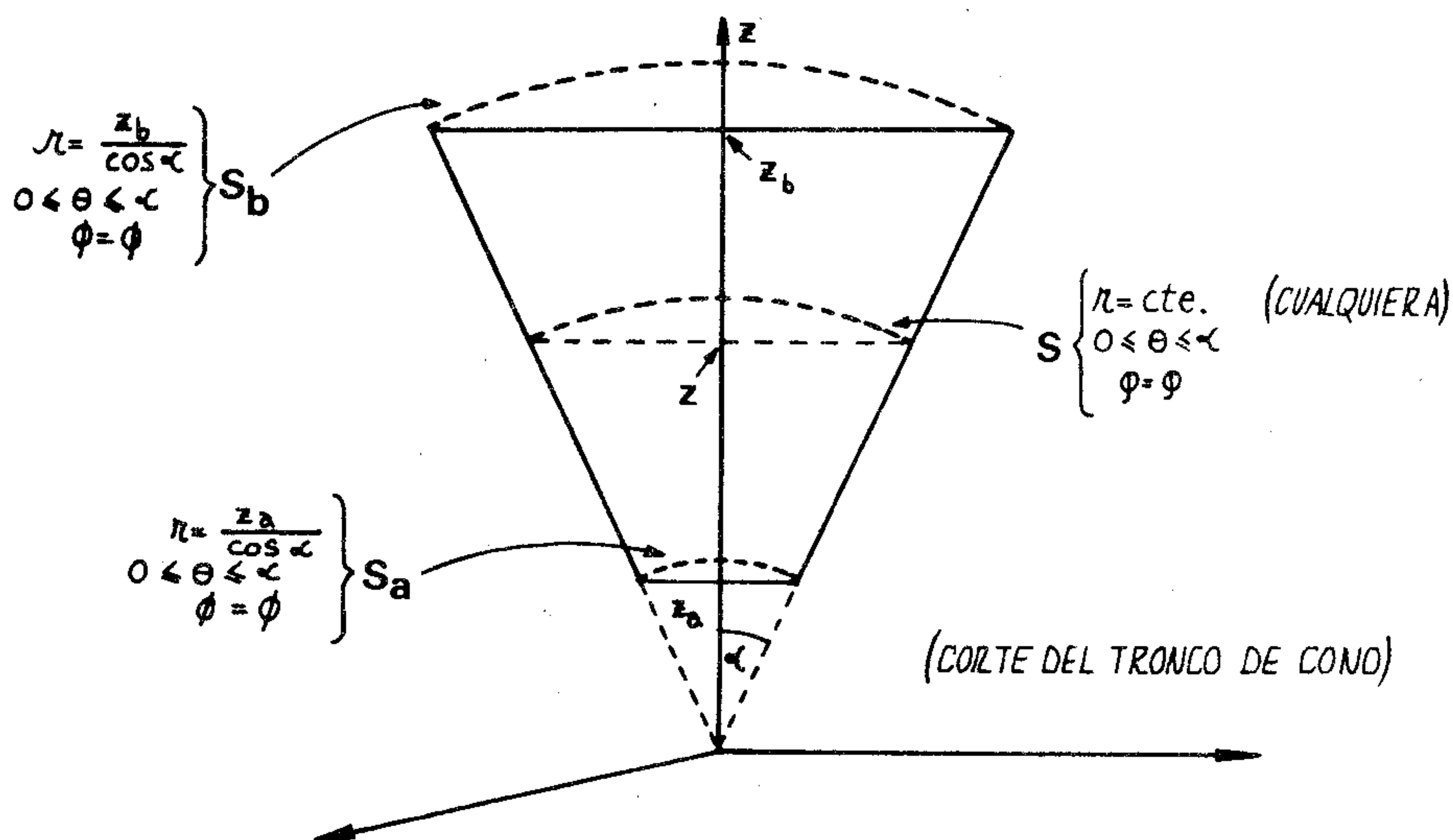
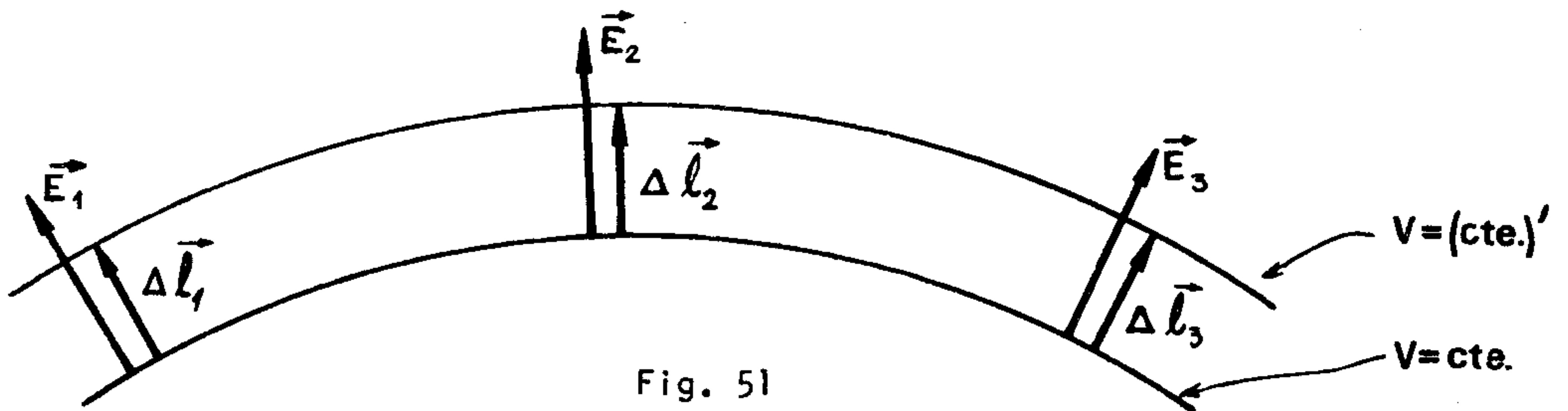


Fig. 50

Todos estos casquetes son paralelos entre sí, pues son casquetes de esferas concéntricas; en consecuencia, el módulo del campo eléctrico en todos los puntos de un mismo casquete es el mismo; en efecto, sabemos que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es perpendicular a toda superficie equipotencial; sea  $\Delta V$  la diferencia de potencial entre dos casquetes:



$$\Delta V = - \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 = - \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 = - \vec{E}_3 \cdot \Delta \vec{l}_3 = \dots$$

pero por ser  $\vec{E}$  radial y  $\Delta \vec{l}_i$  también, tenemos:

$$\vec{E}_i \cdot \Delta \vec{l}_i = E_i \Delta l_i ;$$

luego:

$$E_1 \Delta l_1 = E_2 \Delta l_2 = E_3 \Delta l_3 = \dots$$

pero como se trata de casquetes de esferas concéntricas,

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = \dots$$

luego:

$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots$$

Todo lo que hemos dicho hasta ahora puede resumirse así:

$$\vec{J}(r, \theta, \phi) = J(r, \theta, \phi) \hat{r}$$

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = E(r) \hat{r}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

$$\vec{J}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\rho(r, \theta, \phi)} E(r) \hat{r}$$

Para el cálculo de la resistencia procedemos así: sabemos que la corriente  $i$  que fluye por el cono es independiente de la superficie que se tome para calcularla:

$$i = \iint_{S_a} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_b} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \dots$$

(ver figura 2 para notación de  $S_a$ ,  $S_b$  y  $S$ ); para la superficie  $S$ , tenemos

$$d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

luego

$$i = \iiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_S \frac{1}{\rho(r, \theta, \phi)} E(r) \hat{r} \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$i = \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{E(r) r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{\rho(r, \theta, \phi)}$$

$$i = r^2 E(r) \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{\rho(r, \theta, \phi)}$$

de aquí obtenemos  $E(r)$  dado  $\rho = \rho(r, \theta, \phi)$ ; luego, aplicando que

$$Ri^2 = \iiint_{\text{tronco}} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau = \iiint_{\text{tronco}} \frac{1}{\rho} E^2 d\tau,$$

obtenemos  $R$ .

a)  $\rho = \text{cte.} = \rho$

$$i = \frac{r^2 E(r)}{\rho} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi$$

$$i = \frac{r^2 E(r)}{\rho} 2\pi (1 - \cos \alpha)$$

$$\text{luego: } E(r) = \frac{i\rho}{2\pi (1 - \cos \alpha)} \frac{1}{r^2}$$

$$Ri^2 = \iiint_{\text{tronco}} \frac{1}{\rho} \frac{i^2 \rho^2}{4\pi^2 (1 - \cos \alpha)^2} \frac{1}{r^4} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

El tronco está determinado por:

$$0 \leq \theta \leq \alpha$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

y por las superficies basales  $z = z_a$  y  $z = z_b$ , que en coordenadas esféricas se escriben:

$$r \cos \theta = z_a = \frac{a \cdot h}{b - a}$$

$$\text{y } r \cos \theta = z_b = \frac{b \cdot h}{b - a}$$

$$\text{luego } \frac{z_a}{\cos \theta} \leq r \leq \frac{z_b}{\cos \theta};$$

entonces:

$$R = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=\frac{z_a}{\cos \theta}}^{\frac{z_b}{\cos \theta}} \frac{\rho}{4\pi^2 (1 - \cos \alpha)^2} \frac{1}{r^2} \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$R = \frac{2\pi p}{4\pi^2 (1-\cos\alpha)^2} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=\frac{z_a}{\cos\theta}}^{\frac{z_b}{\cos\theta}} \frac{dr}{r^2} \sin\theta d\theta$$

$$R = \frac{p}{2\pi (1-\cos\alpha)^2} \int_0^{\alpha} \left( \frac{1}{z_a} - \frac{1}{z_b} \right) \cos\theta \sin\theta d\theta$$

$$R = \frac{p(b-a)^2}{\pi ab h} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{4(1-\cos\alpha)^2},$$

Esta fórmula se reduce al resultado bien conocido  $R_c = \frac{p h}{\pi a^2}$

cuando hacemos tender el tronco de cono a un cilindro; es decir, manteniendo  $a$  fijo, hacemos  $\alpha \rightarrow 0$ , ( $b \rightarrow a$ ), en efecto:

$$R_c = \lim_{\alpha \rightarrow 0} R(\alpha);$$

por simple geometría, se ve que:

$$b - a = h \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{luego: } R_c = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{ph^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha}{4\pi ah (a + h \operatorname{tg} \alpha) (1 - \cos \alpha)^2}$$

$$R_c = \frac{ph}{4\pi a^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2}$$

$$R_c = \frac{ph}{4\pi a^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha (1 - \cos \alpha)^2}$$

$$R_c = \frac{ph}{4\pi a^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^4 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2}$$

$$R_c = \frac{ph}{4\pi a^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4\sin^3 \alpha \cos \alpha}{2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha} \quad (1^\circ \text{Hopital})$$

$$R_c = \frac{ph}{2\pi a^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$R_c = \frac{ph}{2\pi a^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (1^\circ \text{Hopital})$$

$$R_c = \frac{ph}{\pi a^2}.$$

$$b) \quad p = p_0 \frac{z}{h} = \frac{p_0}{h} r \cos \theta$$

$$i = \frac{rhE(r)}{p_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha} \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{\cos \theta}$$



$$i = \frac{2\pi rh E(r)}{p_o} \text{Log}(\sec \alpha)$$

luego:  $E(r) = \frac{p_o i}{2\pi rh \text{Log}(\sec \alpha)}$

Entonces:  $R i^2 = \iiint_{\text{tronco}} \frac{h}{p_o r \cos \theta} \frac{p_o^2 i^2}{[2\pi h \text{Log}(\sec \alpha)]^2} \frac{1}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

$$R = \frac{p_o h}{[2\pi h \text{Log}(\sec \alpha)]^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=\frac{z_a}{\cos \theta}}^{\frac{z_b}{\cos \theta}} \frac{1}{r} \text{tg} \theta d\theta d\phi$$

$$R = \frac{p_o h}{[2\pi h \text{Log}(\sec \alpha)]^2} 2\pi \text{Log} \left( \frac{z_b}{z_a} \right) \int_0^{\alpha} \text{tg} \theta d\theta$$

$$R = \frac{p_o \text{Log} \left( \frac{b}{a} \right)}{2\pi h \text{Log}(\sec \alpha)}$$

En este caso, no podemos hacer tender  $\alpha \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow a$ ) sin obtener un resultado infinito, pues si se toma este límite, el origen de coordenadas se aleja infinitamente, y en consecuencia, la resistividad crece infinitamente; la resistencia sería, entonces, infinita; esto puede verificarse fácilmente.

c)  $\rho = p_o \frac{x^2 + y^2}{b^2} = p_o \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2}$

Puede verse de inmediato que la resistencia será, en este caso, nula. La razón es que la resistividad decrece con  $r$  hasta anularse en el eje del cono; la corriente se irá toda por esta región del cono, y será infinita:

$$i = \frac{b^2 r^2 E(r)}{p_o} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha} \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$i = \frac{2\pi b^2 E(r)}{p_o} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \infty$$

y la resistencia es, por lo tanto, nula.

Hay otra forma de calcular la resistencia del tronco de cono, que es más simple pero más alejada de la realidad. Consiste en dividir el tronco de cono en "rebanadas" yuxtapuestas; la resistencia total del cono será la suma de las resistencias de todas las rebanadas, puesto que están conectadas en serie. Para calcular la resistencia de cada rebanada, la dividimos en trocitos; estos están conectados en paralelo, y por lo tanto podemos utilizar este hecho para el cálculo de la resistencia en la forma habitual. En este caso tomamos coordenadas cilíndricas ( $r, \theta, z$ ):

Sean  $\Delta R$  y  $\Delta z$  la resistencia y la altura de cada rebanada, respectivamente; sea  $r_t$  el radio de cada rebanada; cada rebanada la dividimos en trocitos de altura  $\Delta z$  y de base  $\Delta S_i = r_i \Delta r_i \Delta \theta_i$ :

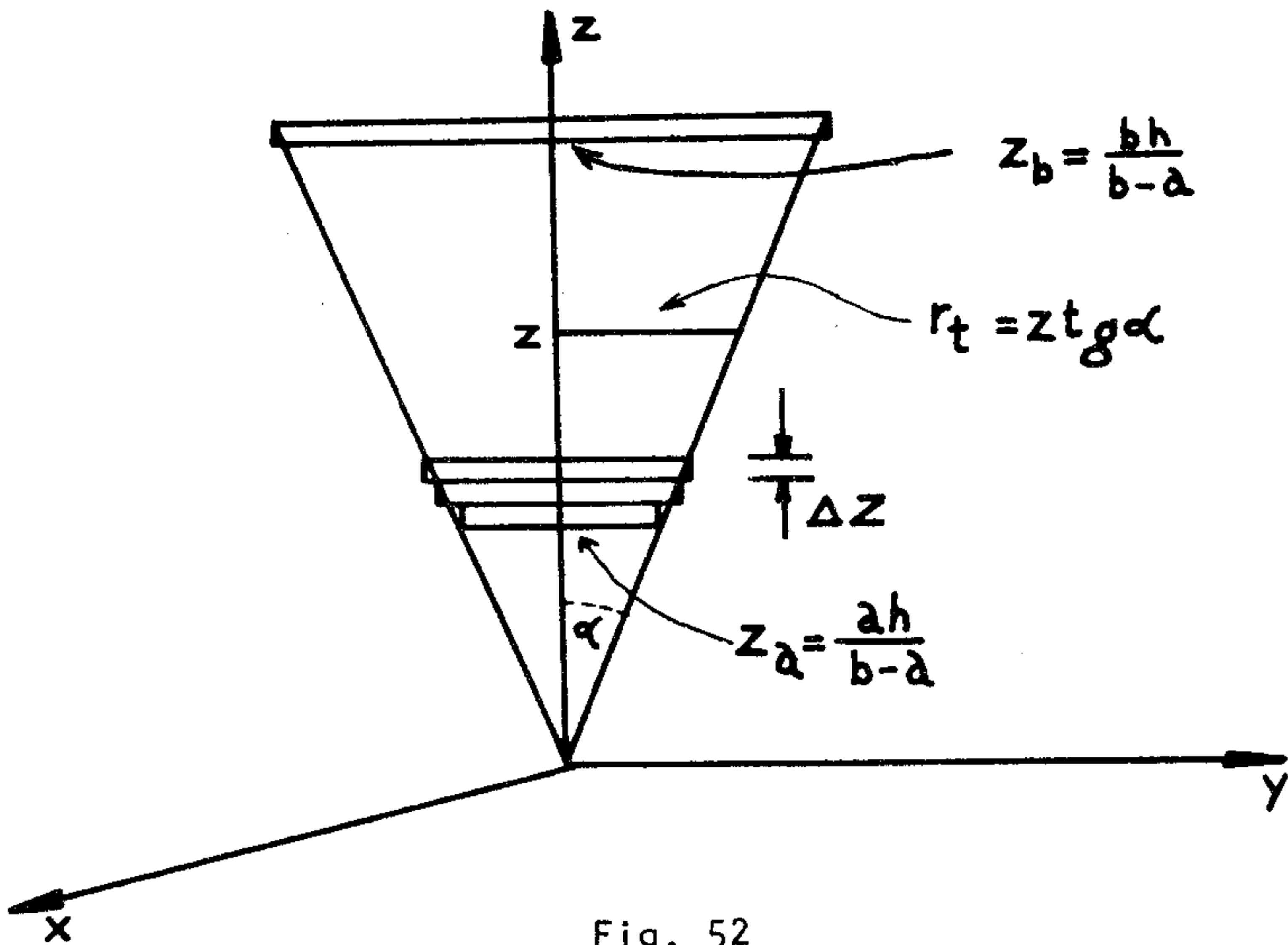


Fig. 52

La resistencia de este trocito es  $\Delta R_i = \rho \frac{\Delta z}{\Delta S_i}$

$$\Delta R_i = \frac{\rho \Delta z}{r_i \Delta r_i \Delta \theta_i} ;$$

dado que estos trocitos están conectados en paralelo, se tiene

$$\frac{1}{\Delta R} = \sum_i \frac{1}{\Delta R_i} = \sum_i \frac{r_i \Delta r_i \Delta \theta_i}{\rho \Delta z}$$

$$\frac{1}{\Delta R} = \iiint_{\text{rebanada}} \frac{r \, dr \, d\theta}{\rho \Delta z}$$

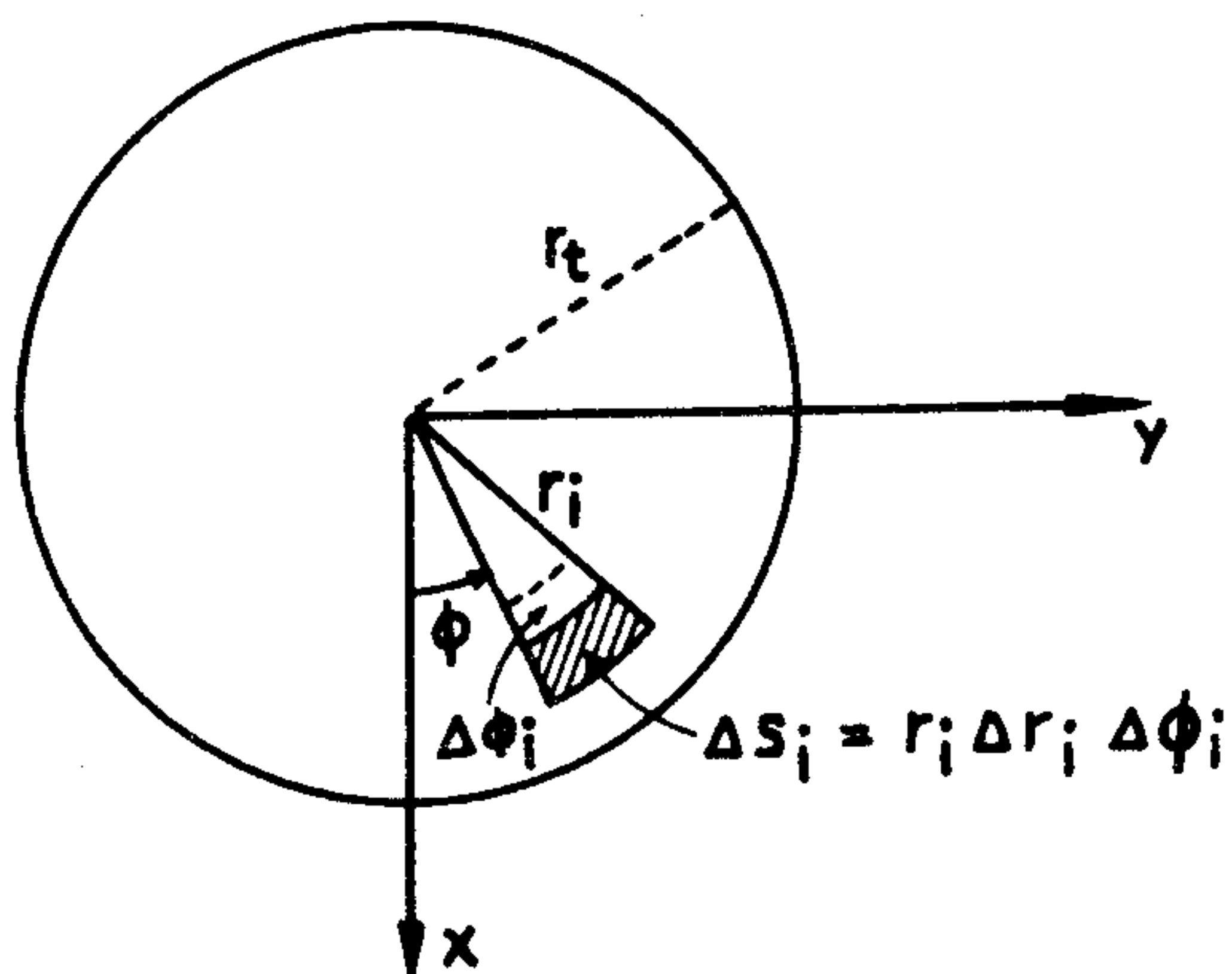


Fig. 53

$$\frac{1}{\Delta R} = \frac{1}{\Delta z} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_t} \frac{r \, dr \, d\theta}{\rho(r, \theta, z)} ;$$

de aquí obtenemos  $\Delta R$ , y luego, integrando sobre  $z$ , obtenemos la resistencia total del tronco.



a)  $\rho = \text{cte} = \rho$

$$\frac{1}{\Delta R} = \frac{1}{\rho \Delta z} \int_{\varnothing=0}^{2\pi} \int_{r=0}^t r dr d\varnothing$$

$$\frac{1}{\Delta R} = \frac{\pi r_t^2}{\rho \Delta z} = \frac{\pi z^2 \text{tg}^2 \alpha}{\rho \Delta z}$$

$$\Delta R = \frac{\rho \Delta z}{\pi z^2 \text{tg}^2 \alpha} ;$$

luego:

$$R = \int_{\frac{a \cdot h}{b-a}}^{\frac{b \cdot h}{b-a}} \frac{\rho dz}{\pi z^2 \text{tg}^2 \alpha}$$

$$R = \frac{\rho (b-a)^2}{\pi a b h \text{tg}^2 \alpha} ;$$

pero, por geometría, se ve que

$$b-a = h \text{tg} \alpha$$

luego:

$$R = \frac{\rho h}{\pi a b} .$$

Este resultado se reduce al del cilindro en el caso en que  $\alpha \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow a$ ).

b)  $\rho = \rho_0 \frac{z}{h}$

$$\frac{1}{\Delta R} = \int_{\varnothing=0}^{2\pi} \int_{r=0}^t \frac{r dr d\varnothing h}{\rho_0 z \Delta z}$$

$$\frac{1}{\Delta R} = \frac{h}{\rho_0 z \Delta z} \quad r_t^2 = \frac{\pi h z \text{tg}^2 \alpha}{\rho_0 \Delta z}$$

$$R = \int_{\frac{a \cdot h}{b-a}}^{\frac{b \cdot h}{b-a}} \frac{\rho_0 dz}{z \pi h \text{tg}^2 \alpha}$$

$$R = \frac{\rho_0}{\pi h \text{tg}^2 \alpha} \text{Log} \left( \frac{b}{a} \right)$$

c)  $\rho = \rho_0 \frac{x^2 + y^2}{b^2} = \rho_0 \frac{r^2}{b^2}$

También en este caso veremos que la resistencia es cero, por la misma razón dada anteriormente.

$$\frac{1}{\Delta R} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_t} \frac{b^2 r dr d\theta}{\Delta z \rho_0 r^2}$$

$$\frac{1}{\Delta R} = \frac{2\pi b^2}{\rho_0 \Delta z} \int_0^{r_t} \frac{dr}{r}$$

$$\frac{1}{\Delta R} = \frac{2\pi b^2}{\rho_0 \Delta z} \text{Log} \frac{r_t}{0} = \infty ;$$

luego  $\Delta R = 0$ , y la resistencia total es cero.

Este método de calcular la resistencia del tronco de cono no da resultados tan buenos como el método anterior; esto es porque el suponer que la resistencia pueda calcularse sumando las resistencias de las rebanadas, implica necesariamente que estamos suponiendo que el campo eléctrico es siempre perpendicular a las bases del tronco; las líneas de corriente serían, entonces, también perpendiculares a las bases; la corriente no podría ocupar todo el volumen del tronco de cono sin que las líneas de  $\vec{J}$  fueran discontinuas, y esto no corresponde a la realidad física.

#### PROBLEMA 20.-

Un cable submarino tiene una resistencia  $R$  por unidad de longitud y no está aislado, de modo que la corriente fluye en parte hacia el mar, que tiene una resistividad  $r$ . El potencial del cable  $V$  disminuye, por lo tanto; suponga que existe un eje  $Ox$  a lo largo del cable, de modo que en  $x = 0$  el potencial del cable es  $V_0$ , y en  $x = \ell$  el potencial es cero.

Encuentre la variación del potencial y de la corriente en el cable con  $x$ ; de aquí encuentre la ecuación diferencial para  $V(x)$  y resuélvala.

#### Resolución.-

Supongamos que en el punto  $x = x$ , el potencial sea  $V$ , y en  $x + \Delta x$ , sea  $V - \Delta V$  (puesto que disminuye):

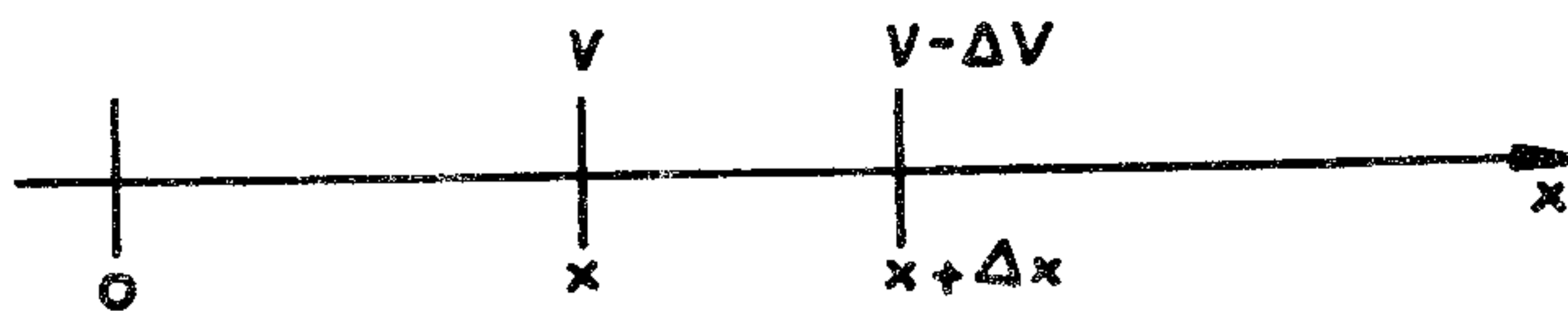


Fig. 54

La caída de potencial entre estos dos puntos debe ser igual a la resistencia de este trozo de cable multiplicada por la corriente:

$$(V - \Delta V) - V = (R \Delta x) i$$

luego:

$$\Delta V = - R i \Delta x$$

entonces:

$$\frac{dV}{dx} = - R i$$

Debido a que la corriente escapa hacia el mar, la corriente  $i$  del cable será también función de  $x$ ; para calcular la variación de  $i$  con la distancia  $x$ , consideremos que, en un intervalo  $\Delta x$  de cable, situado en torno al punto  $x$ , fluye hacia el mar una corriente  $\Delta i$ ; el potencial en este punto del cable es  $V$ , y la corriente llega a través del mar a una región donde el potencial es cero.

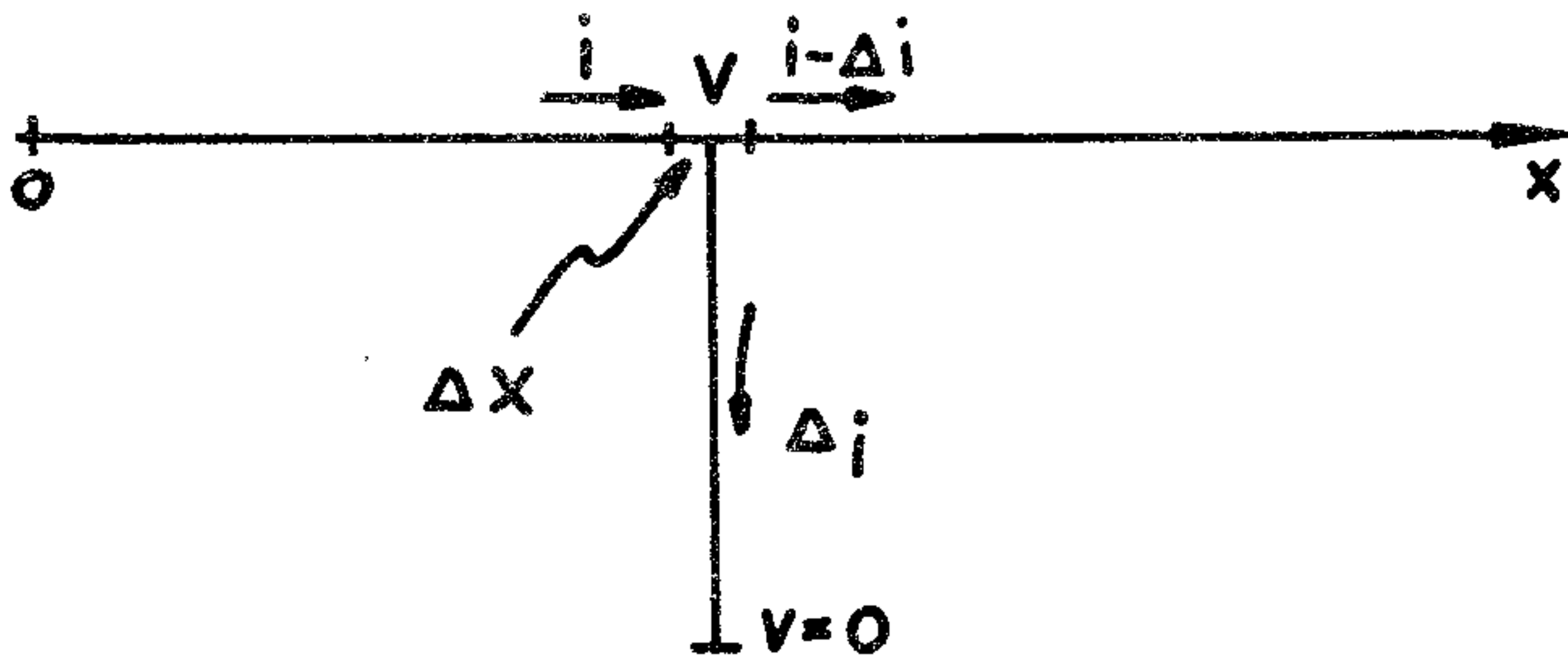


Fig. 55

Consideremos primero el caso del flujo de corriente radial a través de una "rebanada" de material conductor de espesor  $\Delta x$  (mar); la corriente  $\Delta i$  fluye desde un centro metálico de radio  $r_a$  y potencial  $V_a$  (cable) hacia el exterior hasta un anillo de radio  $r_b$  donde el potencial es  $V_b$ :

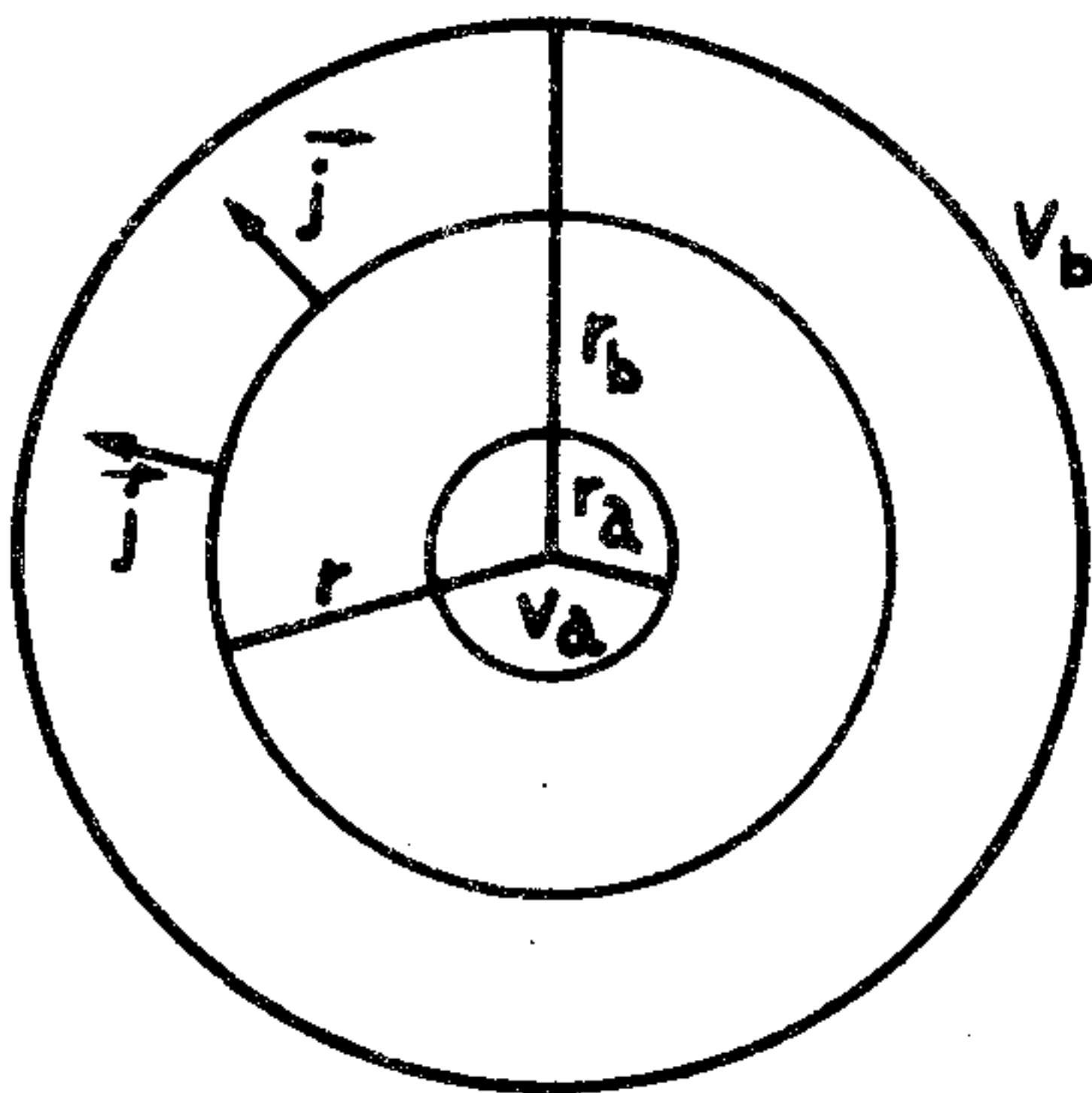


Fig. 56

Dado que la resistividad  $\rho$  de la rebanada es constante, la corriente fluye isotrópicamente en dirección radial; calculemos la corriente  $\Delta i$  a una distancia  $r$  del centro:

$$\Delta i = \vec{j} \cdot \Delta \vec{S}$$

$$\Delta i = j \cdot 2\pi r \Delta x$$

$$\Delta i = \sigma E(r) 2\pi r \Delta x$$

$$\Delta i = -\sigma 2\pi \Delta x \ r \frac{dV}{dr} ;$$

integrando esta relación entre  $r_a$  y  $r_b$  se tiene:

$$V_b - V_a = \int_{r_a}^{r_b} \frac{-\Delta i}{2\pi \Delta x \sigma} \frac{dr}{r}$$

$$V_b - V_a = \frac{\Delta i}{2\pi \sigma \Delta x} \text{Log} \left( \frac{r_a}{r_b} \right)$$

Volviendo a nuestro caso del cable submarino,  $V_b = 0$  y  $V_a = V$ ;  $r_a$  es el radio del cable y  $r_b$  es la distancia a partir del cable a la cual el potencial se hace cero:

$$-V = \frac{\Delta i}{2\pi\sigma \Delta x} \text{Log} \left( \frac{r_a}{r_b} \right)$$

y de aquí:

$$\frac{di}{dx} = - \frac{2\pi}{\text{Log} \left( \frac{r_a}{r_b} \right)} \cdot V\sigma$$

$$\frac{di}{dx} = -K \frac{V}{r}$$

donde  $r = \frac{1}{\sigma}$  es la resistividad del mar, y la constante adimensional K, que depende del radio del cable y de la distancia a la cual el potencial (en el mar) se anula, se define como:

$$K = \frac{2\pi}{\text{Log} \left( \frac{r_a}{r_b} \right)} ;$$

el valor de la constante K no puede calcularse sin más datos, y la supondremos conocida.

Tenemos entonces las siguientes relaciones:

$$\frac{dV}{dx} = -Ri ;$$

$$\frac{di}{dx} = -K \frac{V}{r}$$

derivando la primera con respecto a  $x$  e introduciendo la segunda, se tiene:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -R \frac{di}{dx} = K \frac{K}{r} V ,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} - K \frac{R}{r} V = 0 .$$

Esta ecuación diferencial se integra de inmediato a:

$$V(x) = A \exp\left(\sqrt{\frac{KR}{r}} x\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{KR}{r}} x\right)$$

donde A y B se determinan por las condiciones de borde:

$$\begin{cases} V(x=0) = V_0 \\ V(x=l) = 0 \end{cases}$$

o sea:

$$\begin{cases} A + B = V_0 , \\ \sqrt{\frac{KR}{r}} l e^{\sqrt{\frac{KR}{r}} l} - \sqrt{\frac{KR}{r}} l e^{-\sqrt{\frac{KR}{r}} l} + B e^{\sqrt{\frac{KR}{r}} l} = 0 ; \end{cases}$$

de aquí se obtiene:

$$\begin{cases} A = \frac{-V_0 e^{-\sqrt{\frac{KR}{r}} l}}{e^{\sqrt{\frac{KR}{r}} l} - e^{-\sqrt{\frac{KR}{r}} l}} \\ B = \frac{V_0 e^{\sqrt{\frac{KR}{r}} l}}{e^{\sqrt{\frac{KR}{r}} l} - e^{-\sqrt{\frac{KR}{r}} l}} \end{cases}$$

e introduciendo estos valores en la expresión para  $V(x)$  se obtiene:

$$V(x) = \frac{V_0}{e^{\sqrt{\frac{KR}{r}} l} - e^{-\sqrt{\frac{KR}{r}} l}} \left[ e^{\sqrt{\frac{KR}{r}} (l-x)} - e^{-\sqrt{\frac{KR}{r}} (l-x)} \right]$$

$$V(x) = V_0 \operatorname{cosech} \left( \sqrt{\frac{KR}{r}} l \right) \sinh \left[ \sqrt{\frac{KR}{r}} (l-x) \right].$$

#### PROBLEMA 21.-

Resuelva el siguiente circuito:

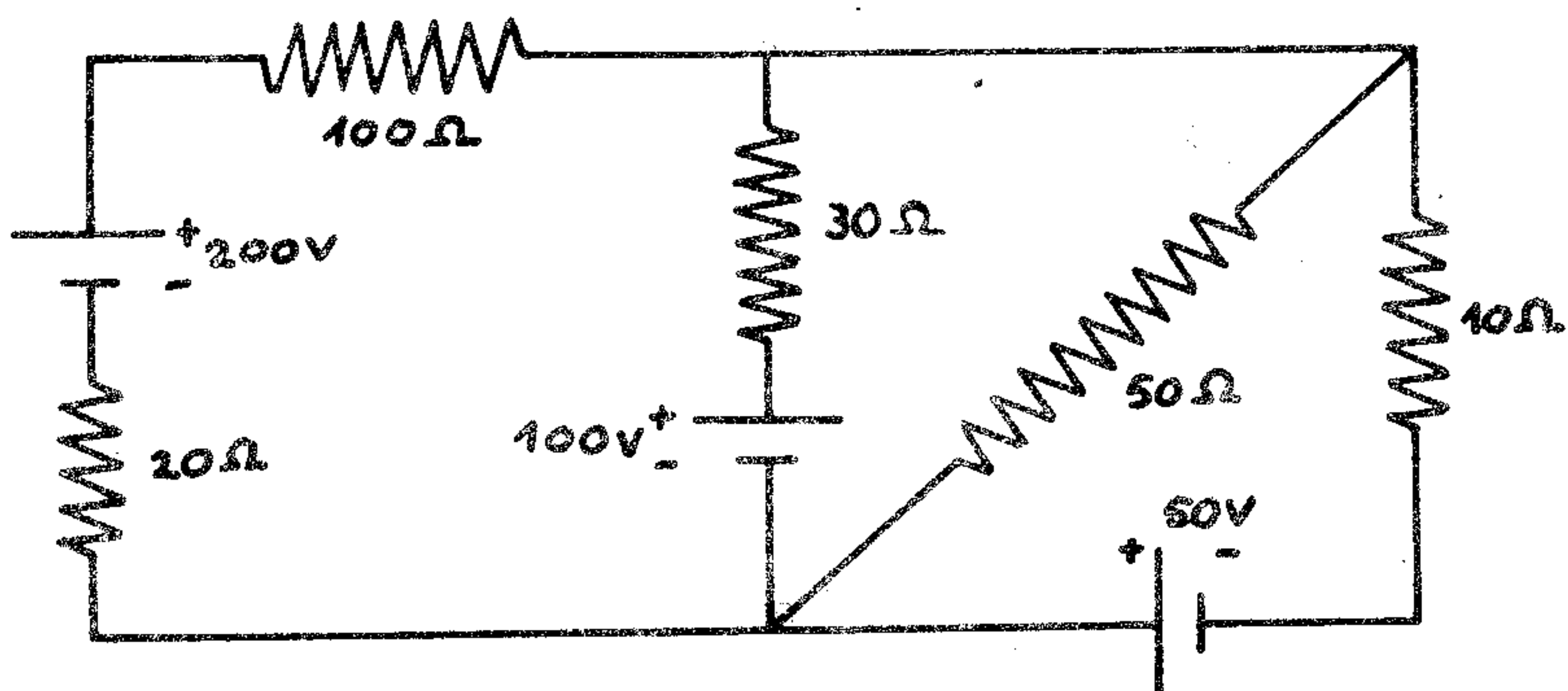


Fig. 57

#### Resolución.-

Resolveremos el problema por dos métodos.

a) Método de las mallas o de las corrientes de circulación.

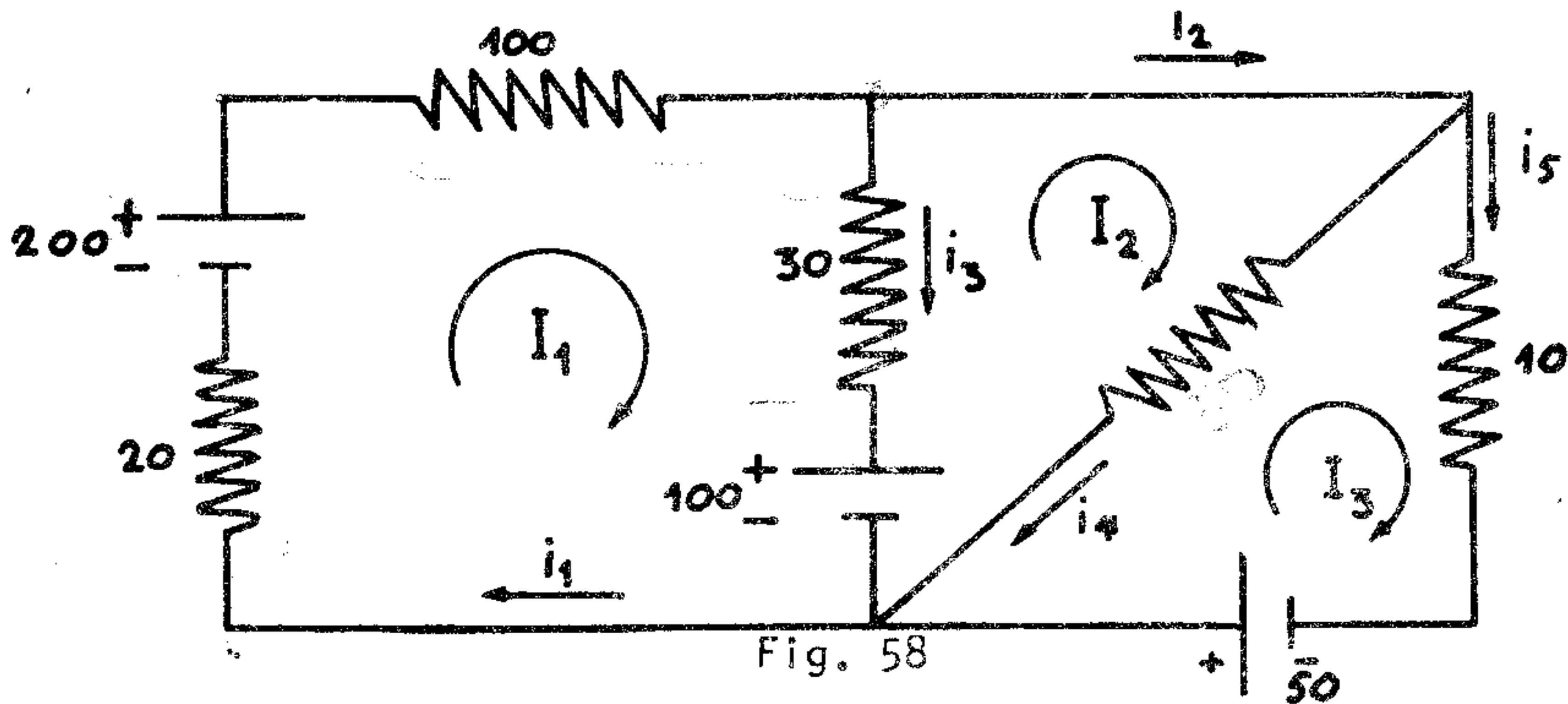
El circuito tiene 5 ramas y 3 nodos; por lo tanto existen

$$N_r - N_n + 1 = 3$$

ecuaciones de mallas independientes. Estas ecuaciones provienen de igualar a cero la suma algebraica de las caídas de potencial de todas las ramas de cada una de las tres mallas independientes que se escojan; la elección de estas 3



mallas es arbitraria, pero éstas deben ser independientes entre sí. Nosotros elegimos como mallas independientes las tres "ventanas" del circuito (en un circuito plano, las "ventanas" son siempre mallas independientes):



(no hemos escrito las unidades de las resistencias y de las caídas de tensión, pero se subentiende aquí y en el resto del problema que éstas son ohms y volts, respectivamente).

Las ecuaciones que se obtienen son, entonces:

$$\begin{cases} 20I_1 - 200 + 100I_1 + 30(I_1 - I_2) + 100 = 0 \\ 30(I_2 - I_1) + 50(I_2 - I_3) - 100 = 0 \\ 50(I_3 - I_2) + 10I_3 - 50 = 0 \end{cases}$$

o bien, reduciendo términos y simplificando:

$$\begin{cases} 15I_1 - 3I_2 = 10 \\ -3I_1 + 8I_2 - 5I_3 = 10 \\ -5I_2 + 6I_3 = 5 \end{cases} ,$$

de donde se obtiene:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{5}{3} = 1,66... \\ I_2 = 5 \\ I_3 = 5 \end{cases}$$

(se subentiende aquí y en el resto del problema que las unidades son amperes).

Del dibujo del circuito se obtiene que las corrientes por cada rama son:

$$\begin{cases} i_1 = I_1 = 1,66... \\ i_2 = I_2 = 5 \\ i_3 = I_1 - I_2 = -\frac{10}{3} = -3,33... \\ i_4 = I_2 - I_3 = 0 \\ i_5 = 5 \end{cases}$$

El valor negativo que obtuvimos para la corriente  $i_3$  significa simplemente que ésta va en el sentido contrario al que se dibujó (los sentidos de las corrientes, indicados por flechas en el dibujo, se toman arbitrariamente para resolver el problema).

La caída de tensión en cada resistencia será la resistencia multiplicada por la corriente que circula a través de ella.

b) Método de Thévenin.

Este método está basado en el teorema de Thévenin; éste dice que si un par cualquiera de terminales emerge de un circuito arbitrario constituido por resistencias y fuentes de tensión y de corriente, entonces el comportamiento del circuito, visto desde este par de terminales, es idéntico al de un circuito simple formado por una fuente de tensión de voltaje  $\mathcal{E}_0$  conectado en serie con una resistencia  $R$ ; el valor de  $\mathcal{E}_0$  es igual a la caída de tensión que mide entre los terminales del circuito primitivo, y el de  $R$  es igual a la resistencia vista desde los terminales cuando se corto-circuitan las fuentes de voltaje y se abren las fuentes de corriente del circuito primitivo.

Apliquemos este teorema para calcular la corriente  $i_1$  que circula por la resistencia de  $100\ \Omega$  del circuito; para poder aplicar el teorema, necesitamos tener un par de terminales que emerjan del circuito, y para esto, quitamos la resistencia de  $100\ \Omega$ ; con esto, queda un par de terminales, a y b, que emergen de un circuito formado, en este caso, por resistencias y fuentes de tensión. Supongamos que la caída de tensión entre estos terminales ("arbitrarios") sea  $\mathcal{E}_0$ , y que cae en el sentido en que se indica en la figura 59, para calcular  $\mathcal{E}_0$ , aplicamos el método de las mallas.

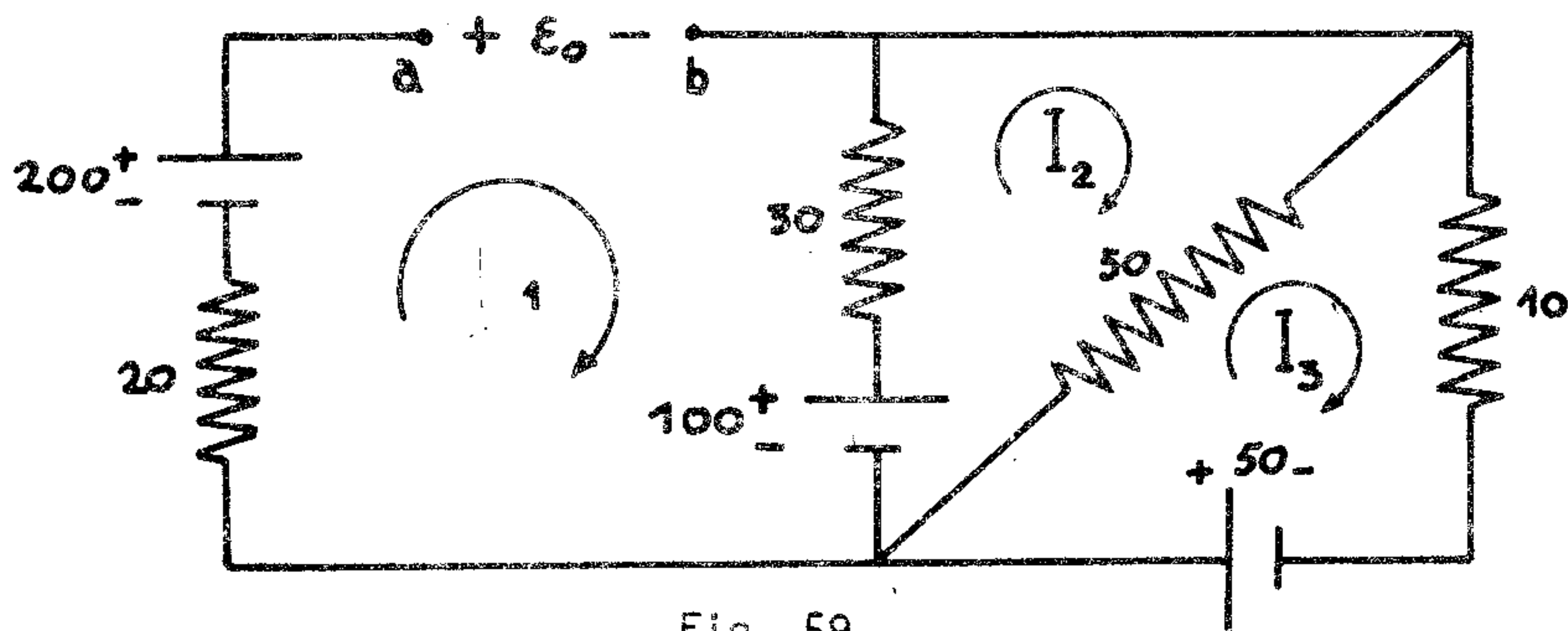


Fig. 59

las ecuaciones que se obtienen son:

$$\left. \begin{aligned} -200 + \mathcal{E}_0 - 30 I_2 + 100 &= 0 \\ -100 + 30 I_2 + 50(I_2 - I_3) &= 0 \\ -50 + 50(I_3 - I_2) + 10 I_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Hay dos cosas a notar: en primer lugar, puede verse que no aparece una corriente de malla  $I_1$ , como en el método de la parte a), pues el teorema de Thévenin exige que para el cálculo de  $\mathcal{E}_0$ , los terminales estén abiertos; la corriente de malla  $I_1$  es, entonces, igual a cero; esto no impide, sin embargo, que podamos aplicar el método de las mallas para el cálculo de  $\mathcal{E}_0$ ; en segundo lugar, como consecuencia de esta primera observación, las corrientes, de mallas  $I_2$  e  $I_3$  no serán iguales a las que calculamos en la parte a).

El sistema de ecuaciones escrito más arriba puede reescribirse como:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 - 30 I_2 &= 100 \\ 8 I_2 - 5 I_3 &= 10 \\ -5 I_2 + 6 I_3 &= 5 \end{aligned} \right\} ,$$

de donde se obtiene:

$$\varepsilon_0 = \frac{4850}{23} \approx 21,1$$

(los valores de  $I_2$  e  $I_3$  no nos interesan en absoluto). Calculemos ahora la resistencia vista desde los terminales a y b cuando se corto-circuitan las fuentes de tensión; el dibujo correspondiente es:

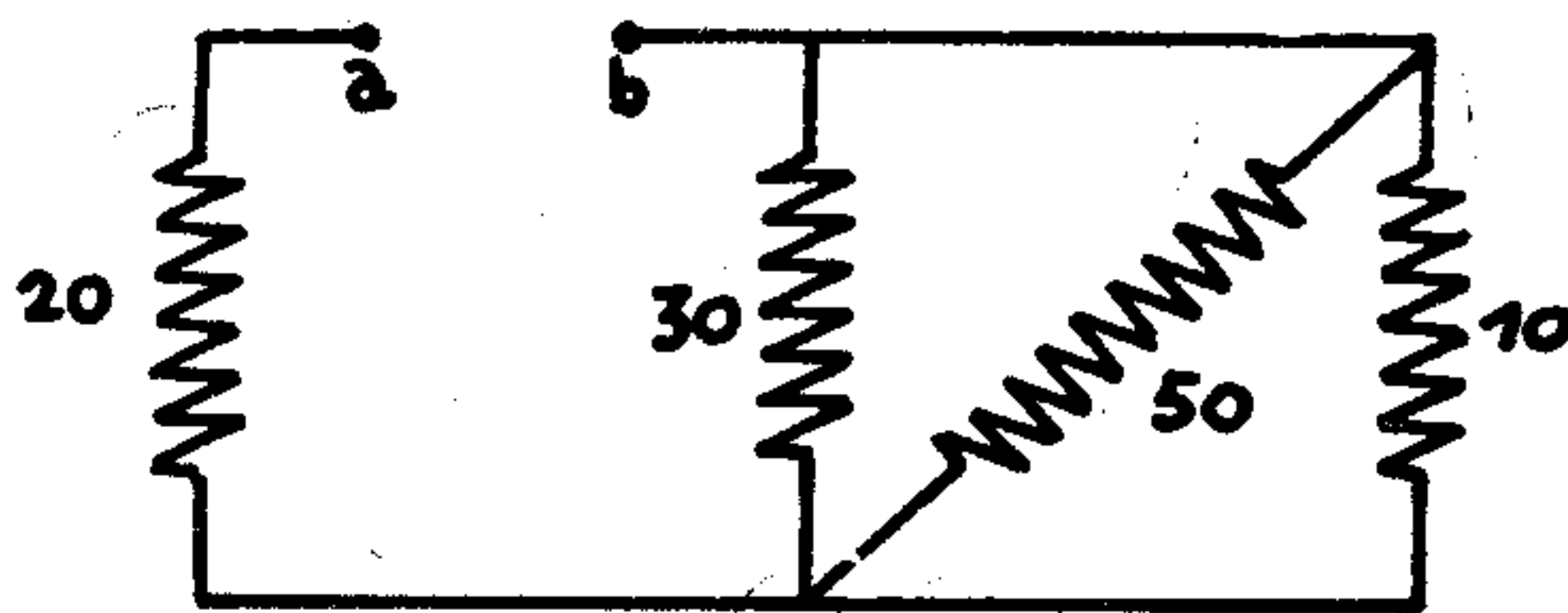


Fig. 60

Las resistencias de 30, 50 y 10  $\Omega$  están en paralelo, y el conjunto de estas tres está en serie con la de 20  $\Omega$ ; la resistencia total será entonces:

$$R = 20 + \frac{1}{1/30 + 1/50 + 1/10}$$

$$R = \frac{610}{23} \approx 26,5$$

El teorema de Thévenin nos dice, entonces, que todo el circuito, visto desde los terminales a y b, es equivalente a:

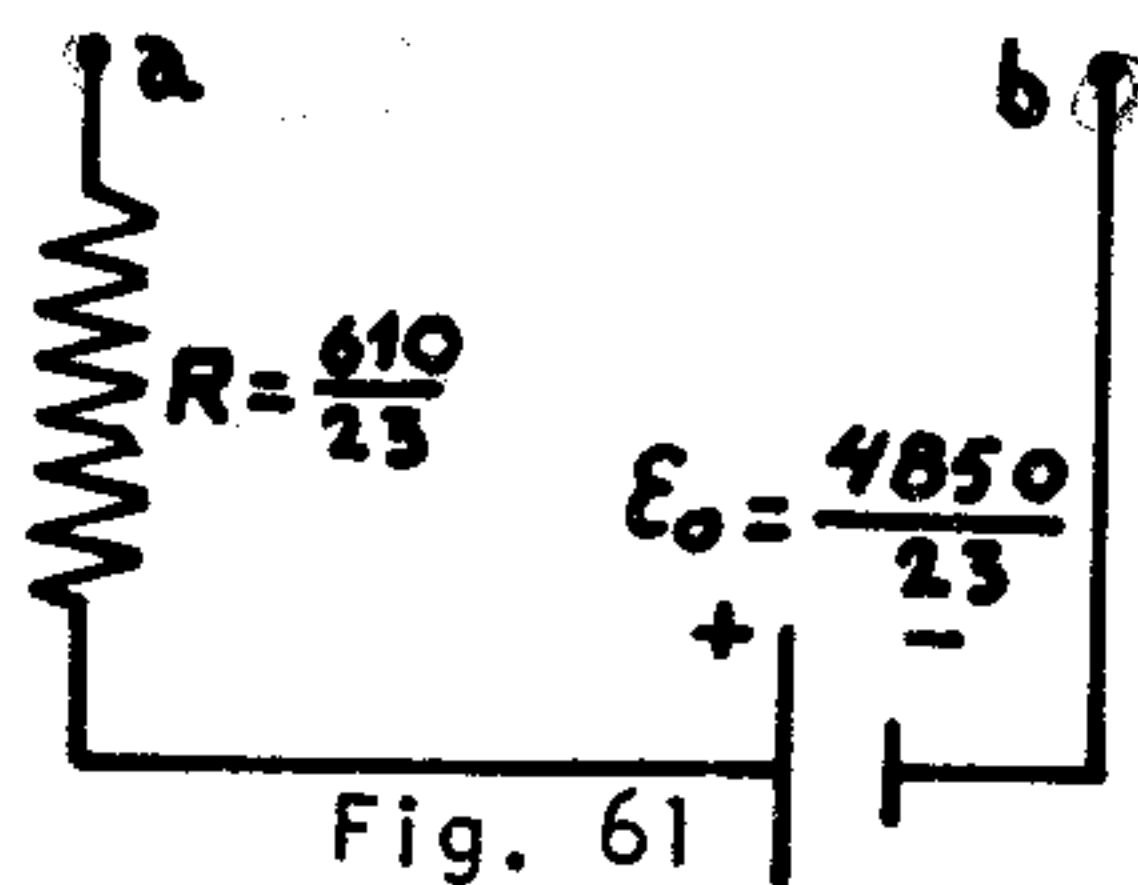


Fig. 61

Volvamos a colocar entre los terminales a y b la resistencia de 100  $\Omega$  que habíamos sacado, y calculemos la corriente que circulará por ella:

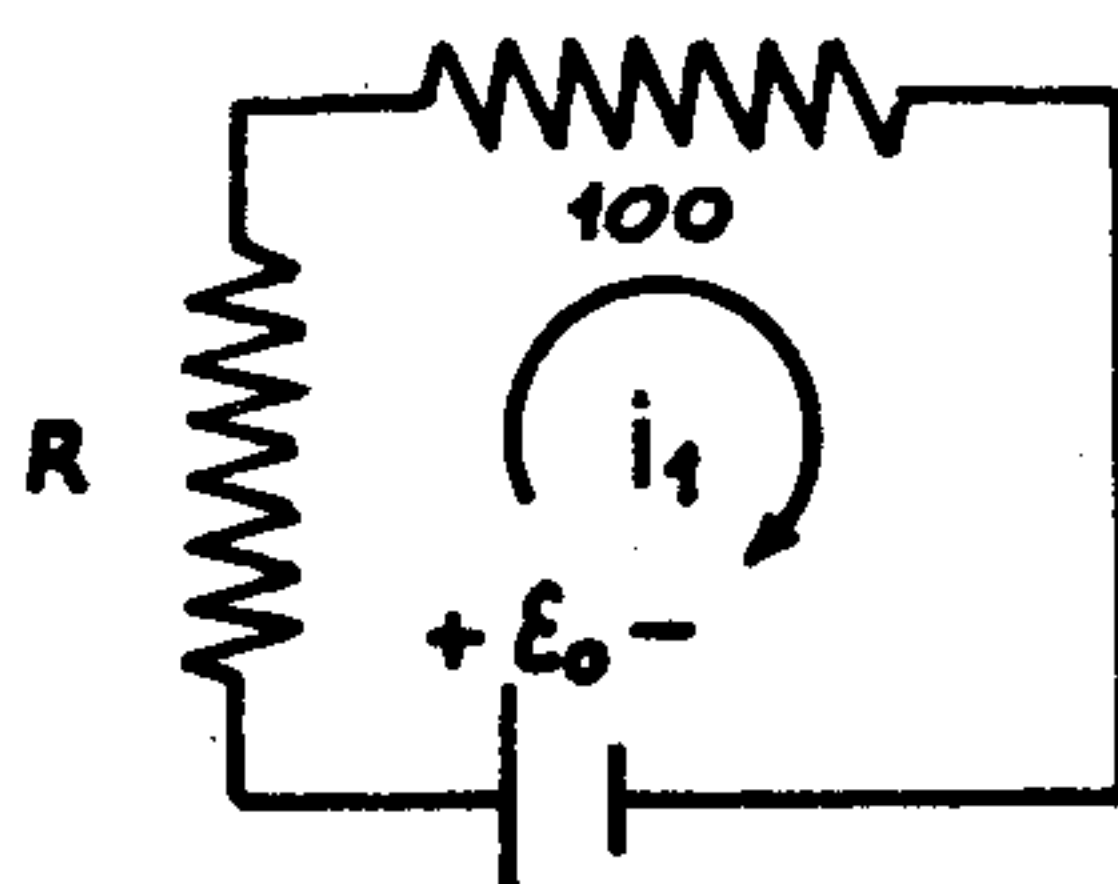


Fig. 62



$$i_1 = \frac{\varepsilon_0}{R + 100}$$

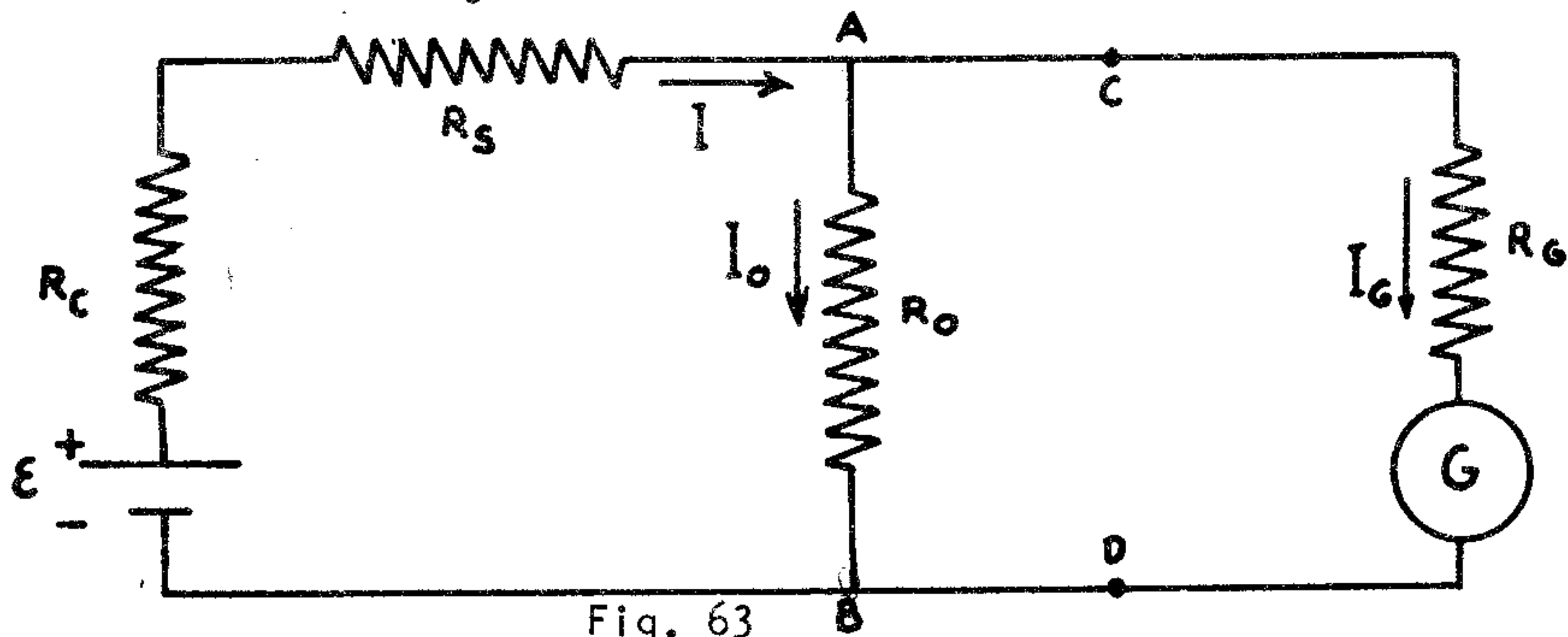
$$i_1 = \frac{4850}{23 \left( \frac{610}{23} + 100 \right)}$$

$$i_1 = \frac{5}{3} = 1,66...$$

que es el resultado que habíamos obtenido antes. De esta forma se procede para calcular las corrientes que circulan por las demás resistencias. Este método es un poco largo si se quiere resolver un circuito completo, pero es muy práctico cuando se quiere conocer la corriente a través de una sola resistencia, especialmente si el circuito es algo grande.

### PROBLEMA 22.-

Considere el siguiente circuito:



- a) Pruebe que la corriente que entra al nudo A se reparte por las ramas  $AR_OB$  y  $AR_GB$  en forma inversamente proporcional a las resistencias de las ramas. De aquí deduzca:

$$I_G = I \frac{R_O}{R_O + R_G}$$

- b) Encuentre la resistencia equivalente del circuito, vista desde los terminales de la batería. De aquí calcule  $I$  y luego  $I_G$ .

- c) Saque la rama  $R_G$ . Calcule la diferencia de potencial en circuito abierto entre los terminales C y D. Calcule la resistencia vista desde los terminales CD con la fuente  $\varepsilon$  en corto-circuito. De aquí dibuje el circuito Thévenin equivalente (del circuito hacia la izquierda de CD). Conecte la rama  $R_G$  y calcule  $I_G$ ; verifique que coincide con la calculada en b).

Nota: El elemento  $\text{---}(\text{G})\text{---}$  es un galvanómetro ideal (no tiene resistencia interna).

### Resolución.-

- a) La diferencia de potencial entre C y D,  $V_{CD}$ , puede ser calculada por cualesquiera de las dos ramas:  $R_O$  o  $R_G$ :

$$V_{CD} = R_O I_O = R_G I_G$$

luego:

$$\frac{I_O}{I_G} = \frac{R_G}{R_O}$$

Sumémosle 1 a cada uno de los miembros de esta igualdad:

$$\frac{I_O}{I_G} + 1 = \frac{R_G}{R_O} + 1$$

$$\frac{I_O + I_G}{I_G} = \frac{R_G + R_O}{R_O} ;$$

pero

$$I = I_O + I_G$$

luego:

$$I_G = I \frac{R_O}{R_O + R_G}$$

b) Calculemos I en función de datos conocidos:

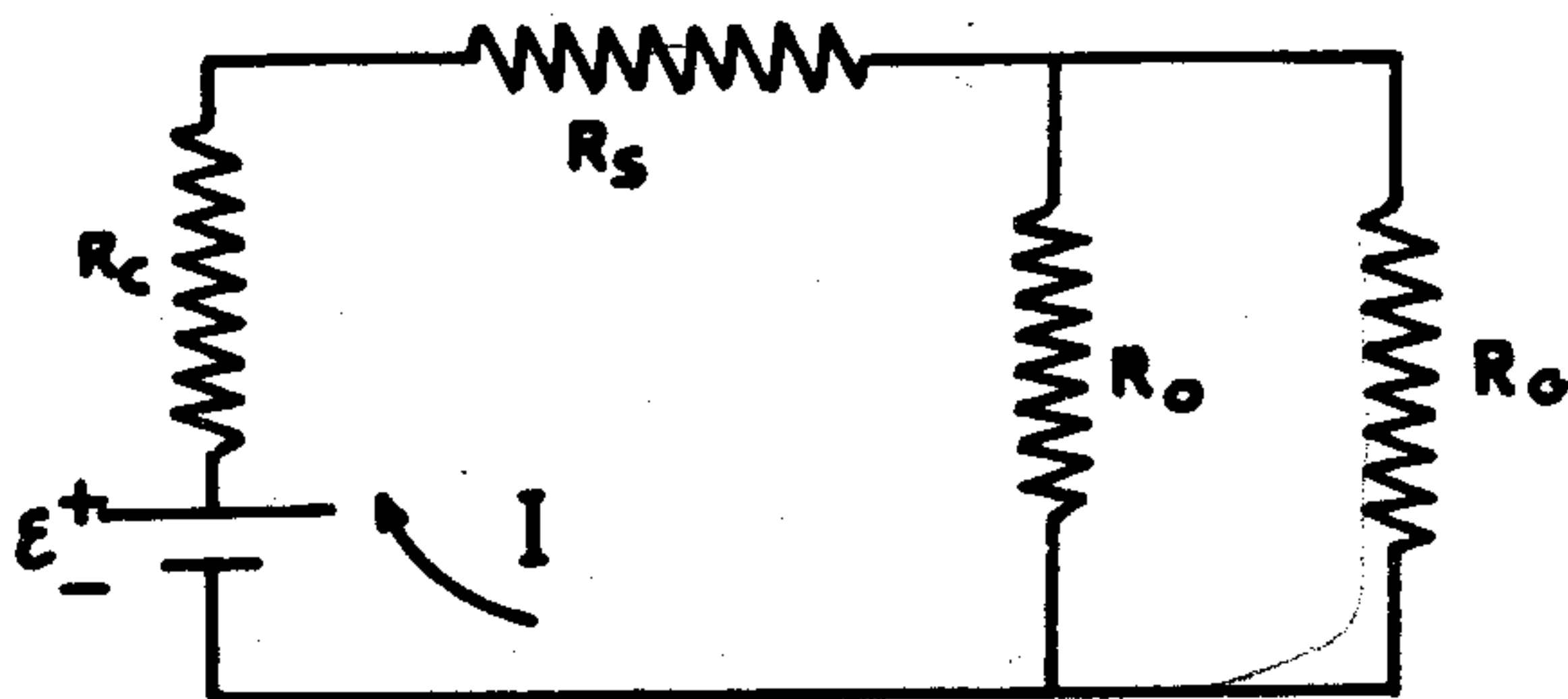


Fig. 64

Las resistencias  $R_O$  y  $R_G$  están conectadas en paralelo, y son equivalentes a una sola,  $R_{eq}$ :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_O} + \frac{1}{R_G}$$

luego:

$$R_{eq} = \frac{R_O R_G}{R_O + R_G}$$

y la resistencia total R será:

$$R = R_C + R_S + \frac{R_O R_G}{R_O + R_G}$$

y la corriente total I será:

$$I = \frac{\epsilon}{R}$$

$$I = \frac{\epsilon (R_O + R_G)}{(R_O + R_G) (R_C + R_S) + R_O R_G} ,$$

y de aquí:

$$I_G = I \frac{R_O}{R_O + R_G} = \frac{\varepsilon R_O}{(R_O + R_G)(R_C + R_S) + R_O R_G}$$

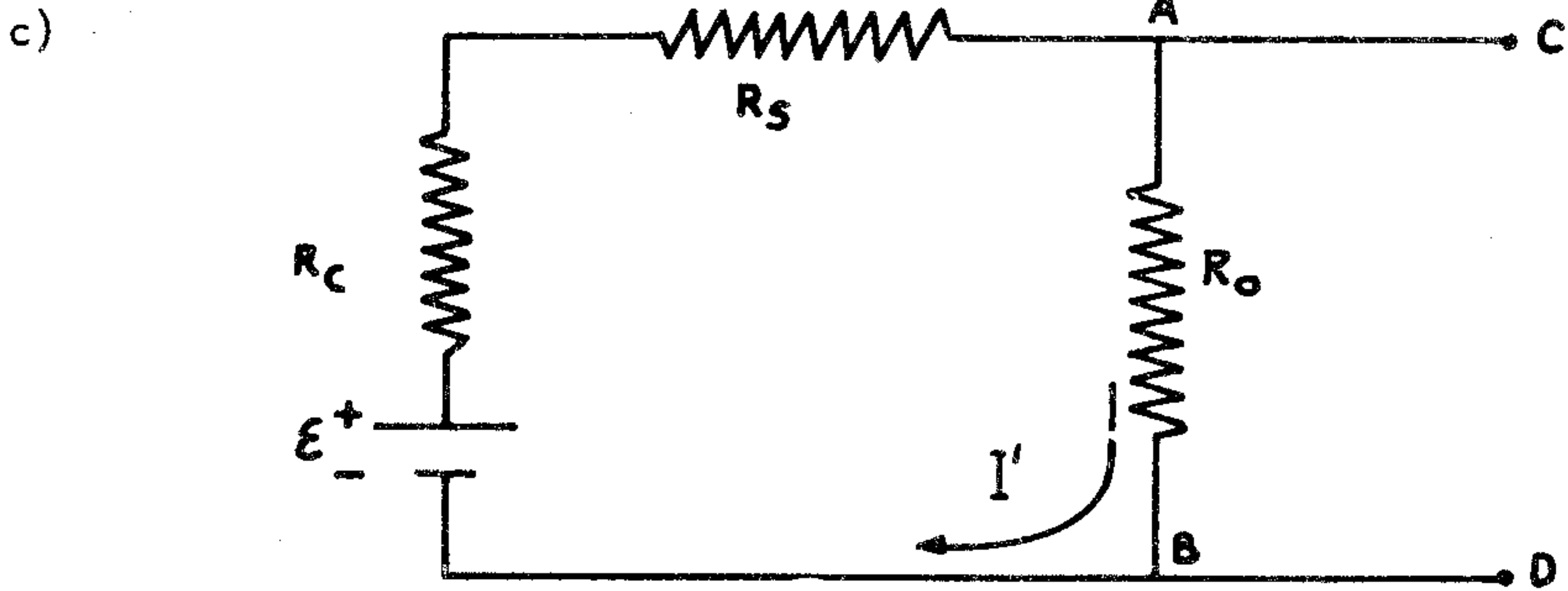


Fig. 65

La diferencia de potencial entre C y D en circuito abierto es

$V_{CD}$  :

$$V_{CD} = V_{AB} = R_O I'$$

pero:

$$\varepsilon = (R_C + R_S + R_O) I'$$

de donde:

$$I' = \frac{\varepsilon}{R_C + R_S + R_O},$$

y de aquí:

$$V_{CD} = \frac{\varepsilon R_O}{R_C + R_S + R_O}.$$

Para el cálculo de la resistencia  $R'$  vista desde los terminales CD, hagamos un esquema de las resistencias (la fuente  $\varepsilon$  está en cortocircuito, así que no la dibujamos):

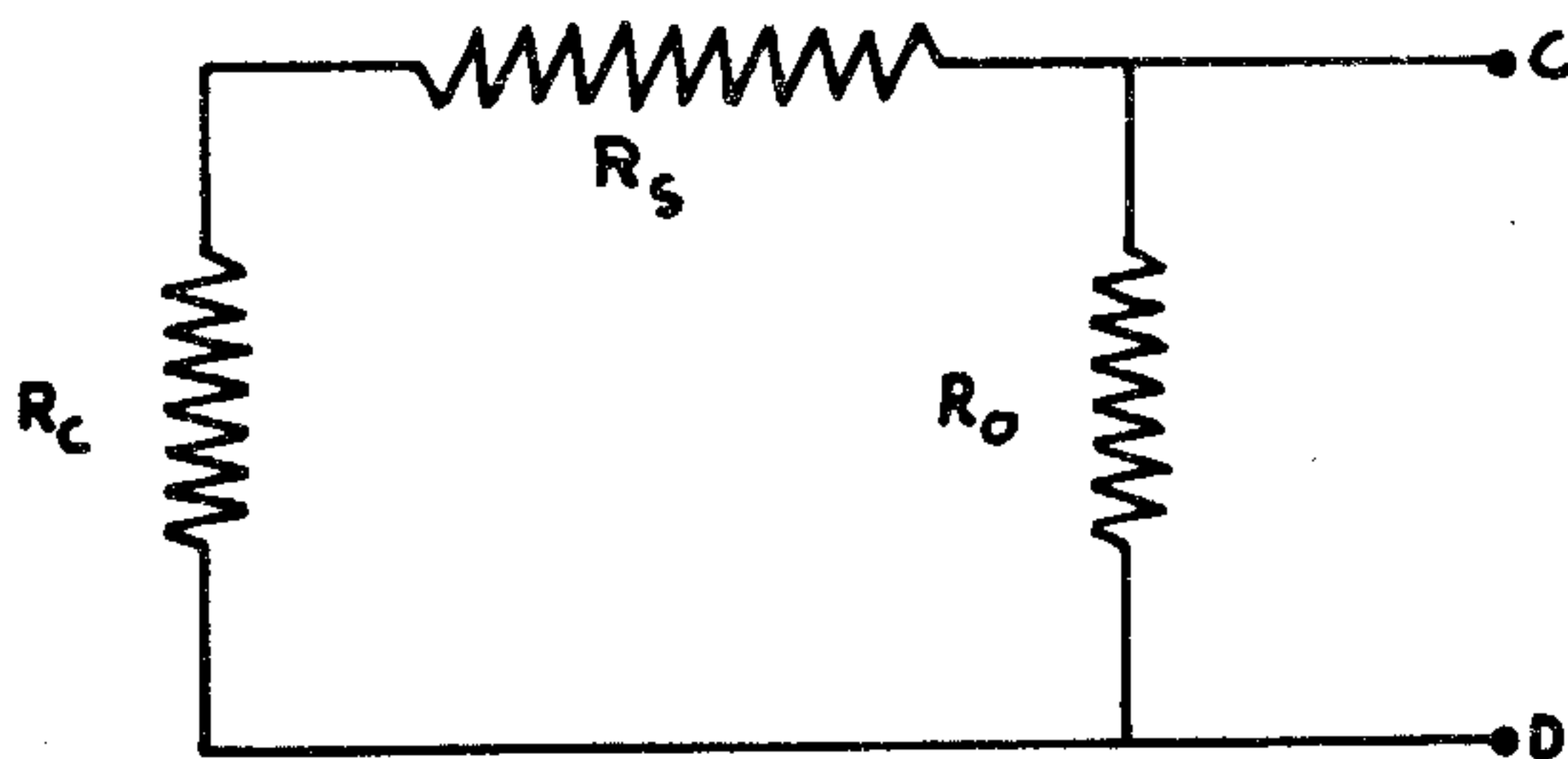


Fig. 66

Las resistencias  $R_C$  y  $R_S$  están en serie, y el conjunto de ellas dos está en paralelo con  $R_O$ , de modo que la resistencia  $R'$  será tal que

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_C + R_S} + \frac{1}{R_O}$$

luego:

$$R' = \frac{R_O (R_C + R_S)}{R_O + R_C + R_S}$$

El circuito Thévenin equivalente, con la rama  $R_G$  reconectada será:

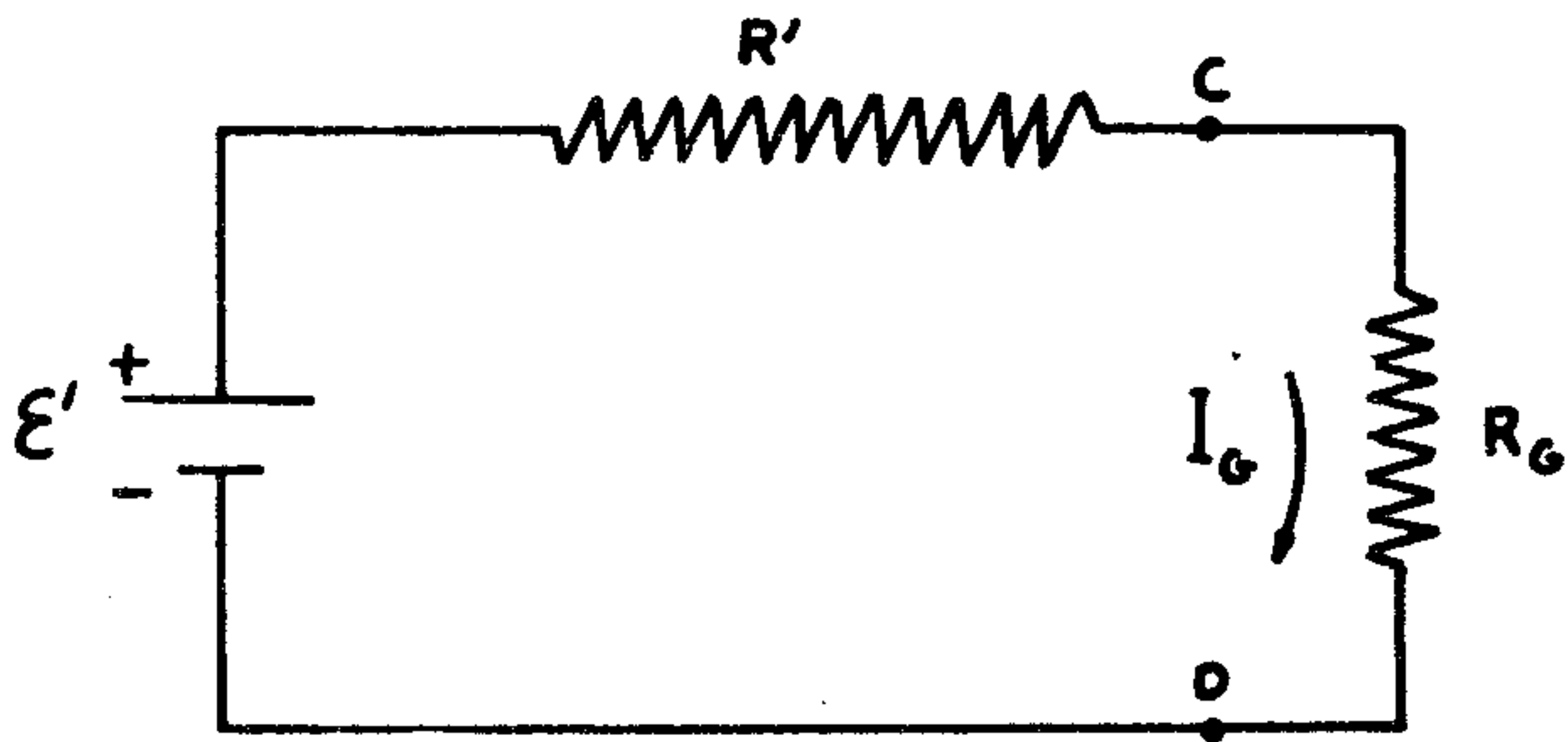


Fig. 67

de donde

$$R' = \frac{R_O (R_C + R_S)}{R_O + R_C + R_S}$$

y

$$\varepsilon' = V_{CD} = \frac{\varepsilon R_O}{R_C + R_S + R_O},$$

de donde:

$$I_G = \frac{\varepsilon'}{R' + R_G}$$

o sea:

$$I_G = \frac{\varepsilon R_O}{(R_C + R_S)(R_O + R_G) + R_O R_G},$$

que coincide con el resultado de la parte b).

### PROBLEMA 23.-

Calcule la potencia entregada por la fuente del circuito

- mediante el método de las mallas;
- aplicando sucesivamente los teoremas de Thévenin y Norton;
- suponiendo  $V_{ee'} = 1$ , calcule  $V_{xa'}$  e  $i_1$ , y amplifique de modo de obtener  $V_{xa'} = 26$  (método de escalera).

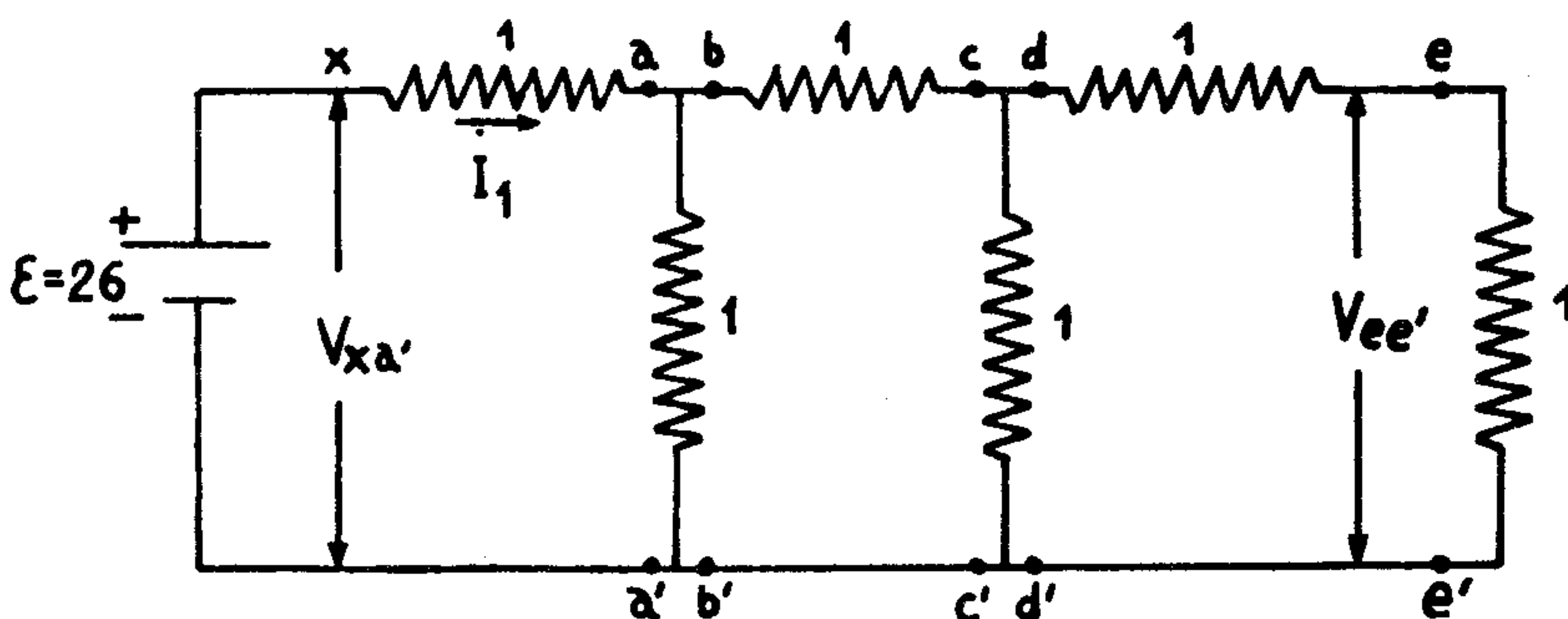


Fig. 68

(Las unidades de corriente, voltaje y resistencia son ampère, volt y ohm, respectivamente).

Resolución.

- a) Aplicamos el método de las mallas tomando como mallas independientes las tres "ventanas" del circuito:

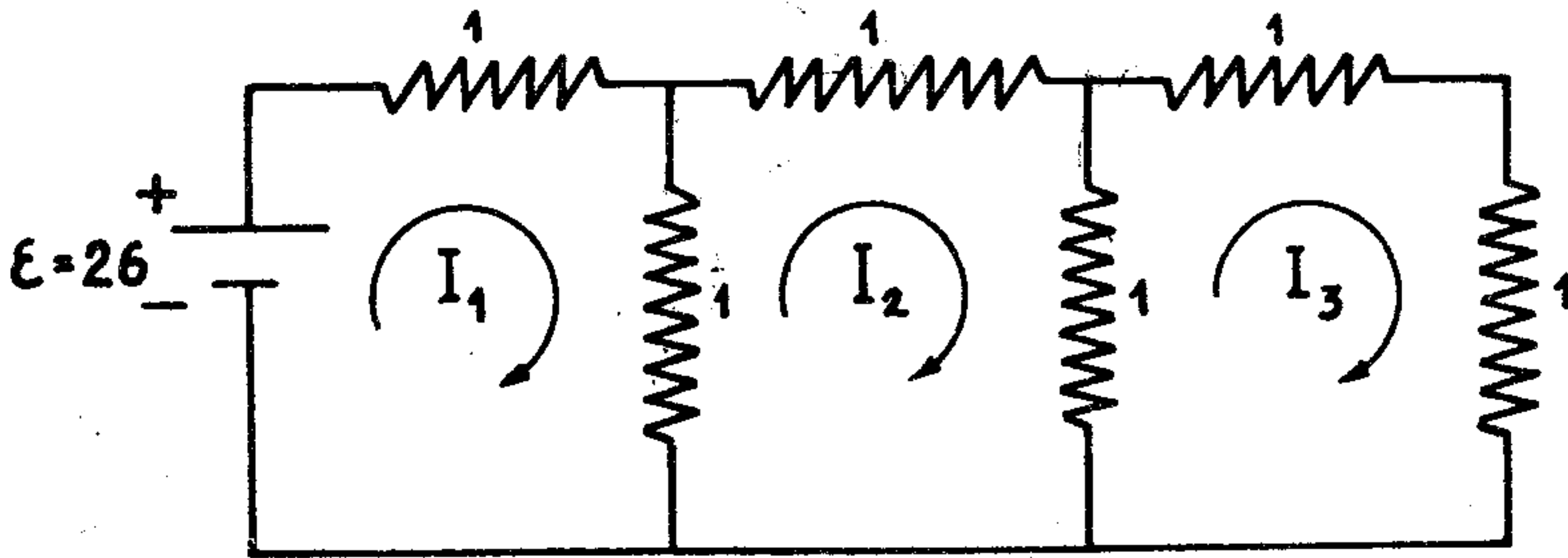


Fig. 69

las ecuaciones que se obtienen son:

$$\left. \begin{aligned} -26 + I_1 + I_1 - I_2 &= 0 \\ I_2 - I_1 + I_2 + I_2 - I_3 &= 0 \\ I_3 - I_2 + I_3 + I_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

o bien:

$$\left. \begin{aligned} 2I_1 - I_2 &= 26 \\ -I_1 + 3I_2 - I_3 &= 0 \\ -I_2 + 3I_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

de donde se obtiene

$$I_1 = 16;$$

luego la potencia entregada por la fuente es:

$$P = 26 \cdot 16 = 416 \text{ Watts.}$$

- b) Los teorema de Thévenin y Norton conducen a que los dos circuitos siguientes son equivalentes desde los terminales a y b:

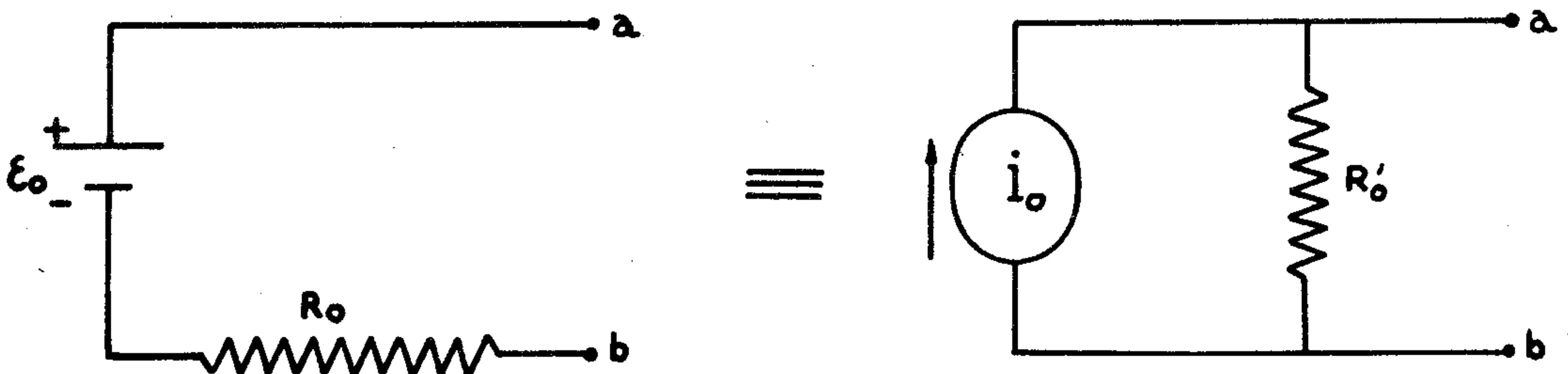


Fig. 70

de donde:

$$\begin{cases} R_o = R'_o \\ i_o = \frac{\varepsilon_o}{R_o} \end{cases}$$

(el símbolo  $\uparrow i_o$  representa una fuente de corriente  $i_o$  en la dirección dada por la flecha).

El circuito que tenemos es:

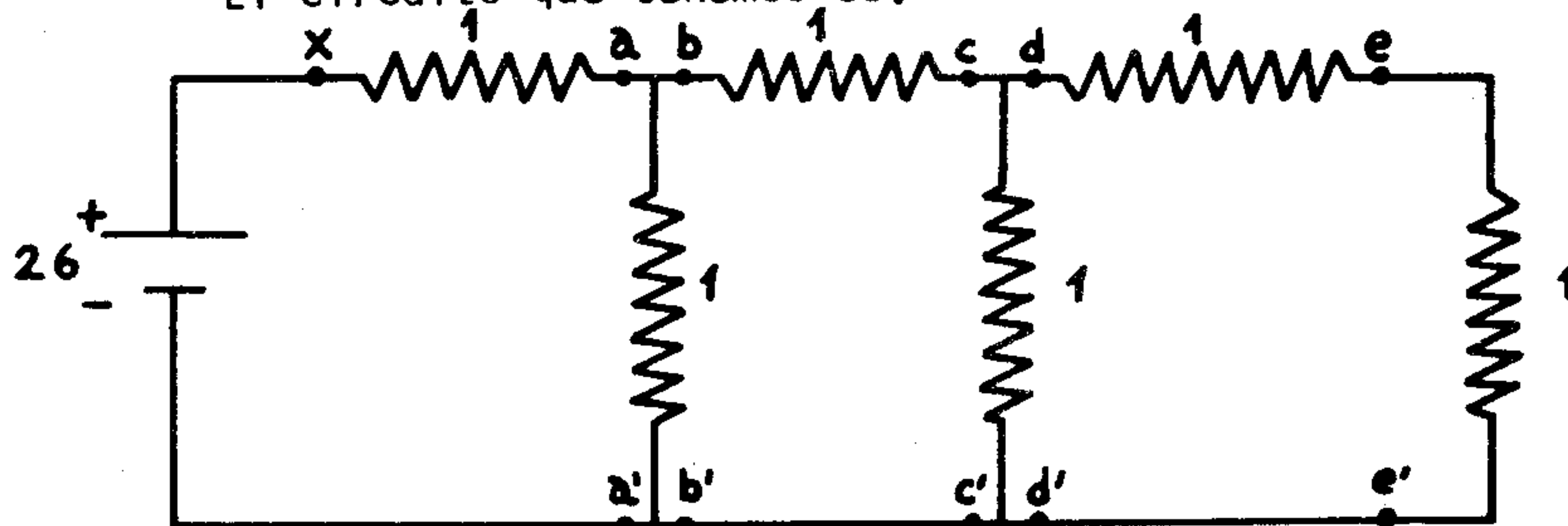


Fig. 71

y aplicamos la equivalencia entre los circuitos mencionada más arriba, hacia la izquierda de los bornes a y a', para darnos:

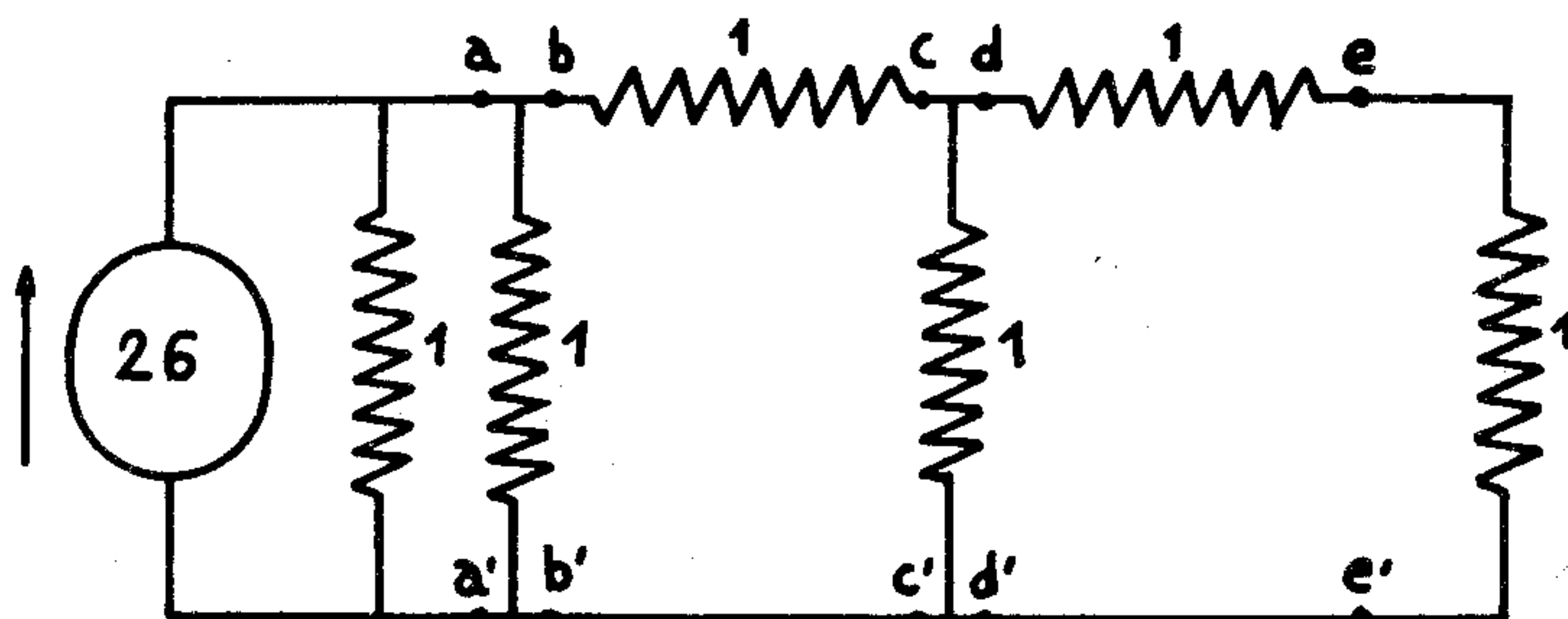


Fig. 72

Las dos resistencias de un ohm de más a la izquierda están en paralelo, y podemos calcular su resistencia equivalente:

$$R_{eq} = \frac{1}{1/1 + 1/1} = \frac{1}{2}$$

luego el circuito que tenemos es:

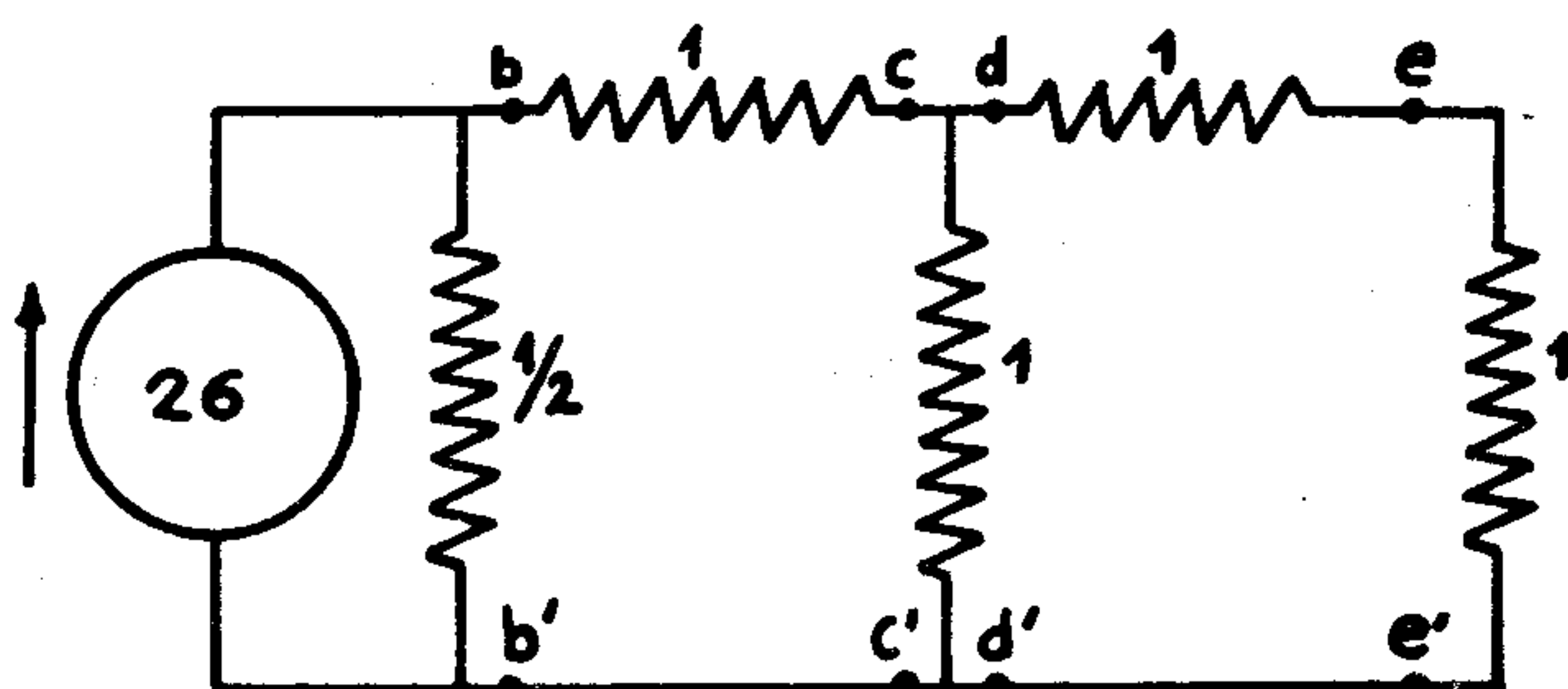


Fig. 73



La parte del circuito a la izquierda de b y b' puede ser remplazado por su equivalente para darnos:

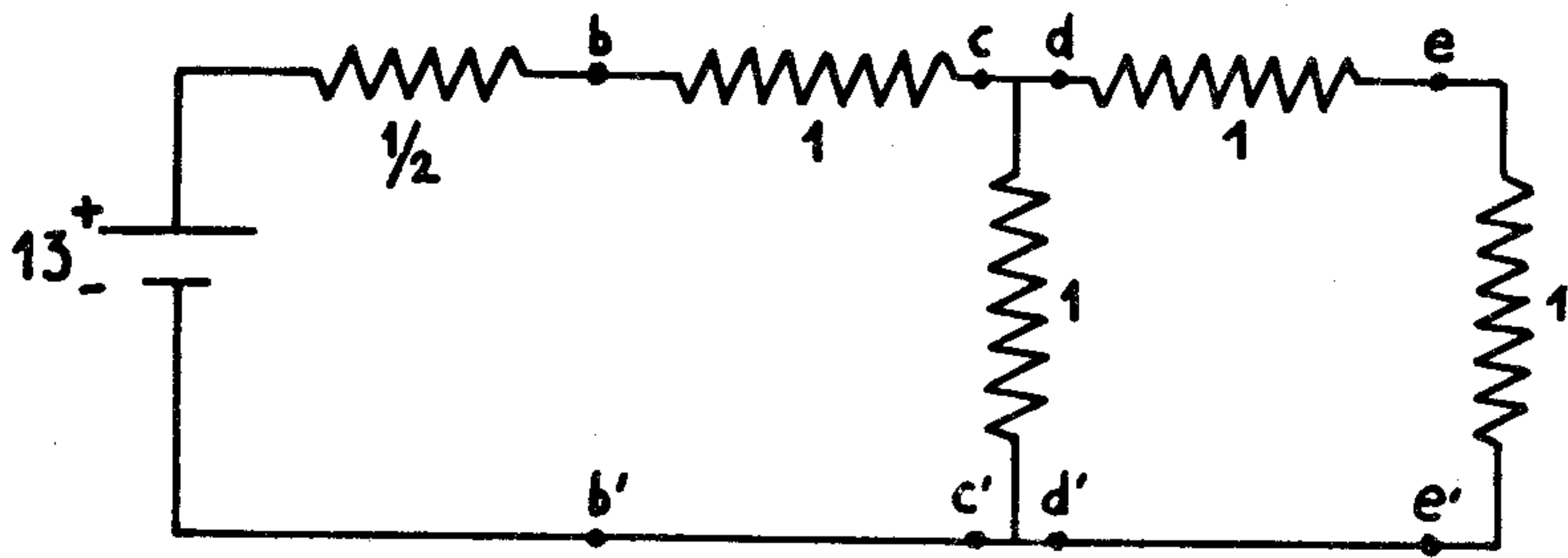


Fig. 74

o bien:

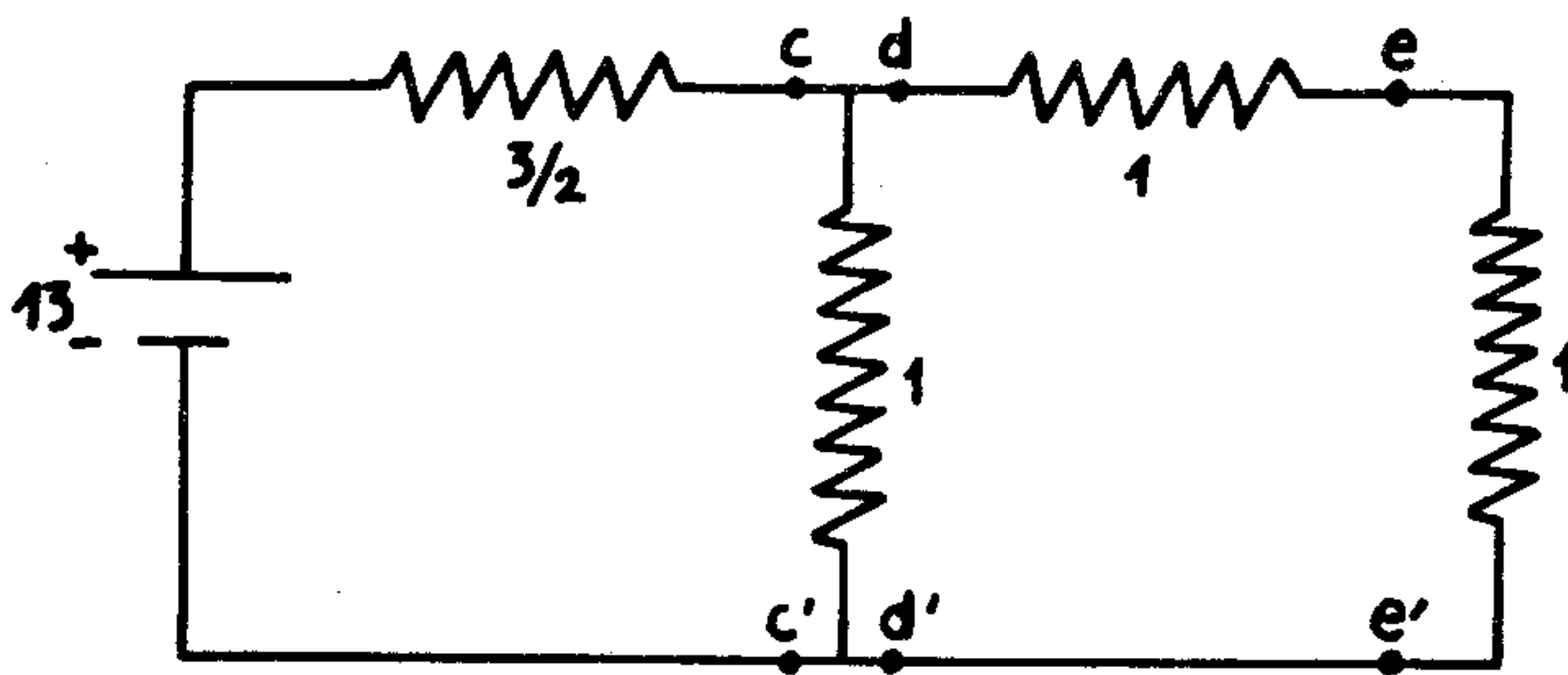


Fig. 75

Este circuito nuevamente es equivalente al siguiente:

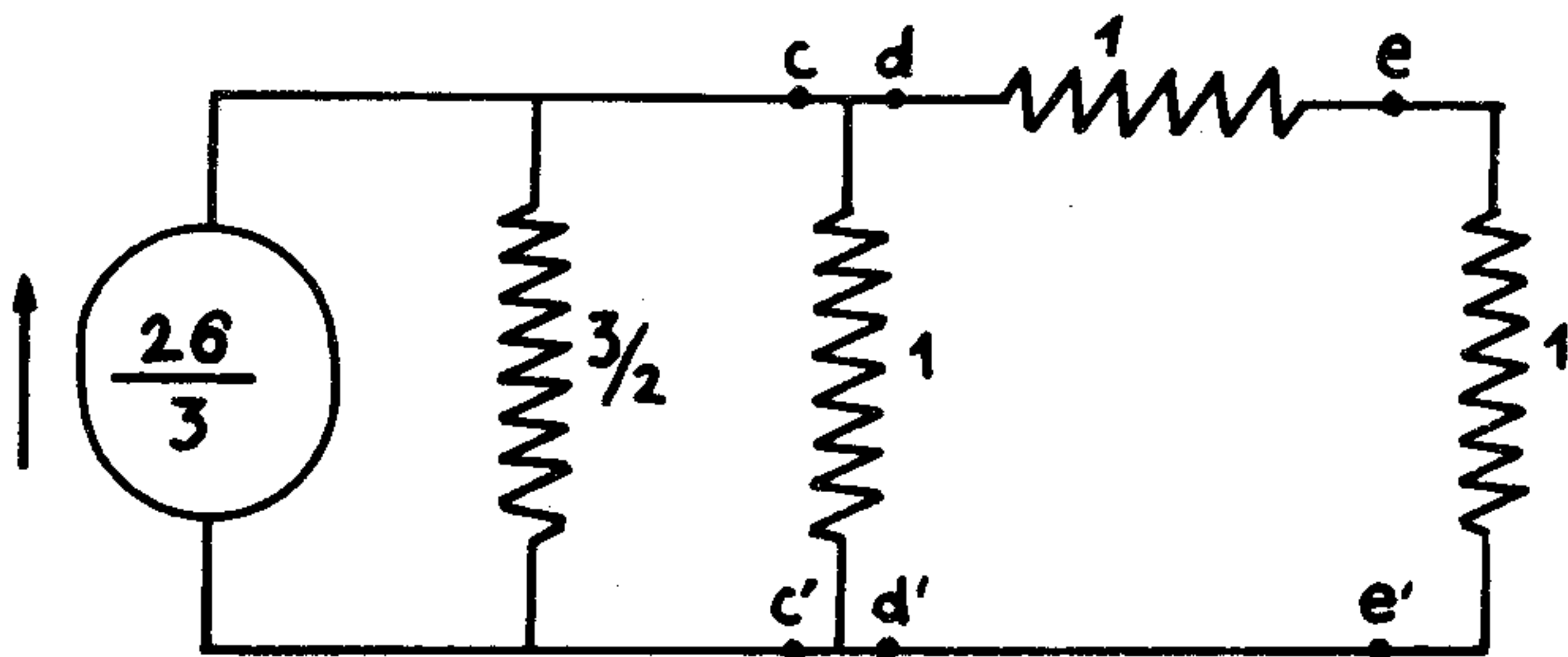


Fig. 76

que a su vez es equivalente a:

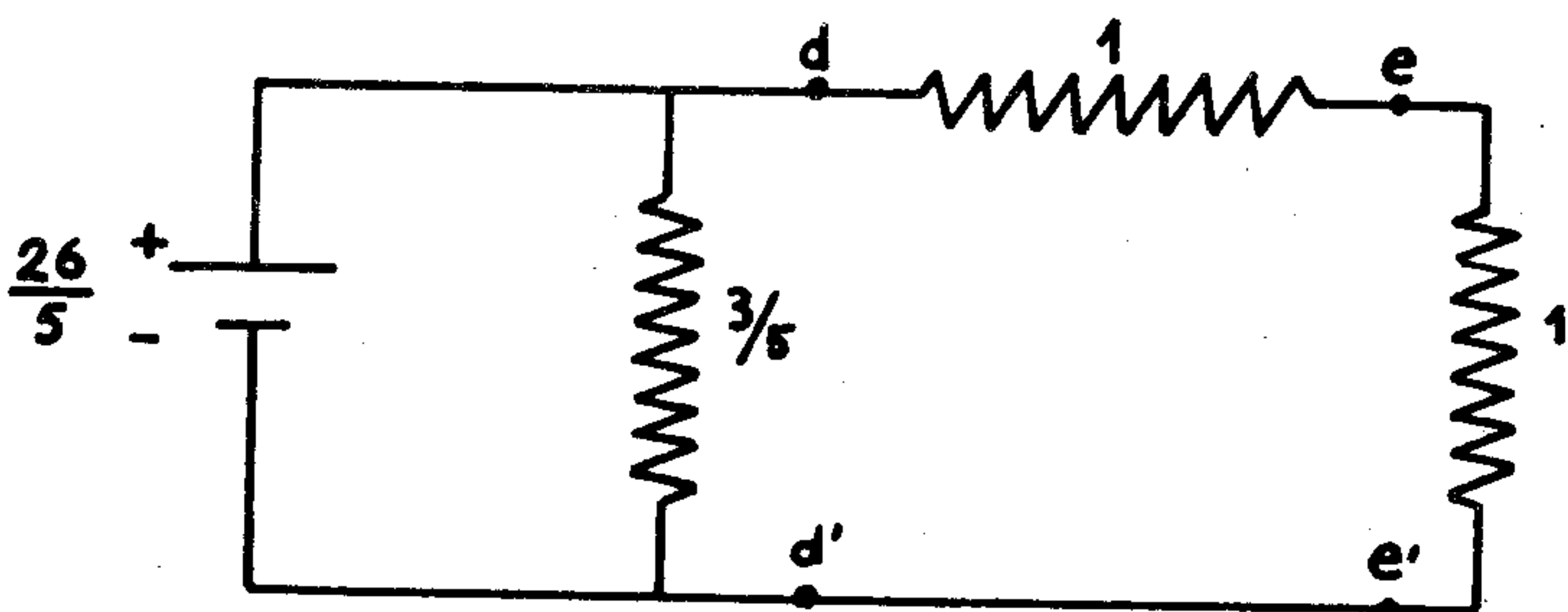


Fig. 77

que es equivalente a:

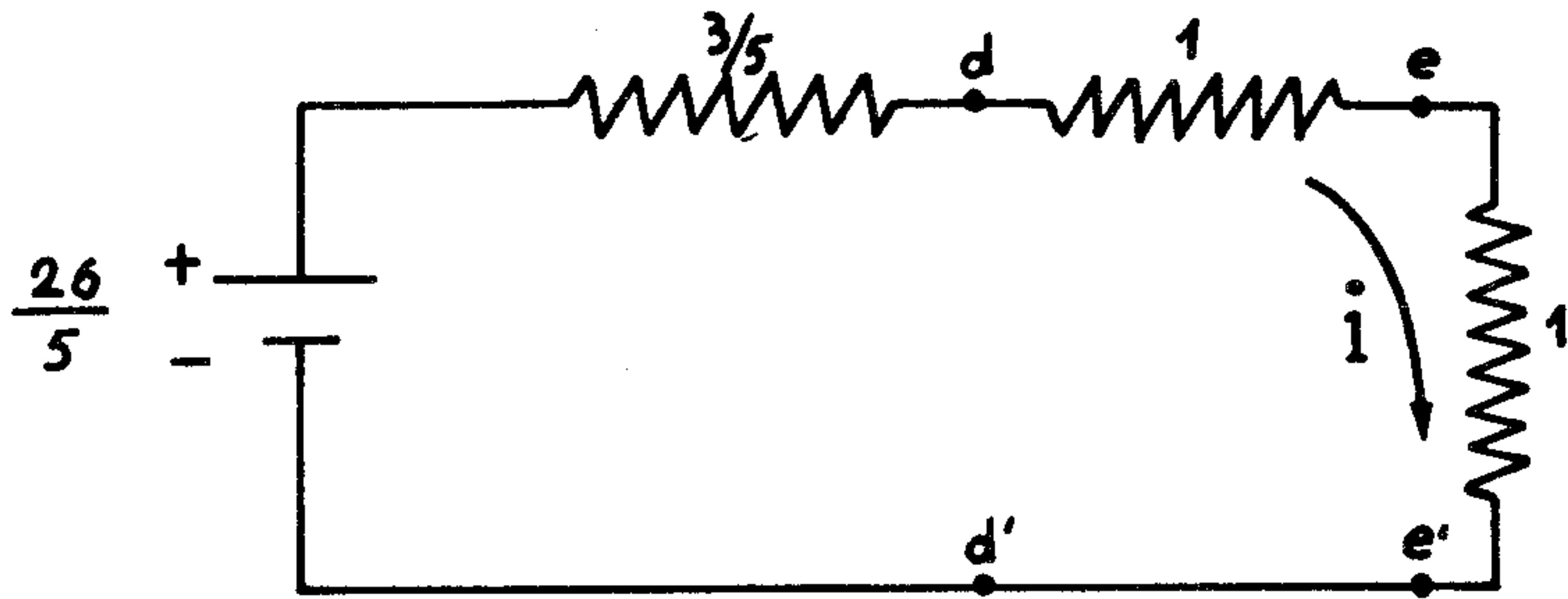


Fig. 78

de donde la corriente  $i$  que circula por este circuito es:

$$i = \frac{26/5}{3/5 + 1 + 1}$$

$$i = 2$$

Esta es la corriente que circula por la resistencia de más a la derecha de nuestro circuito original: con ésta podemos calcular todas las demás corrientes:

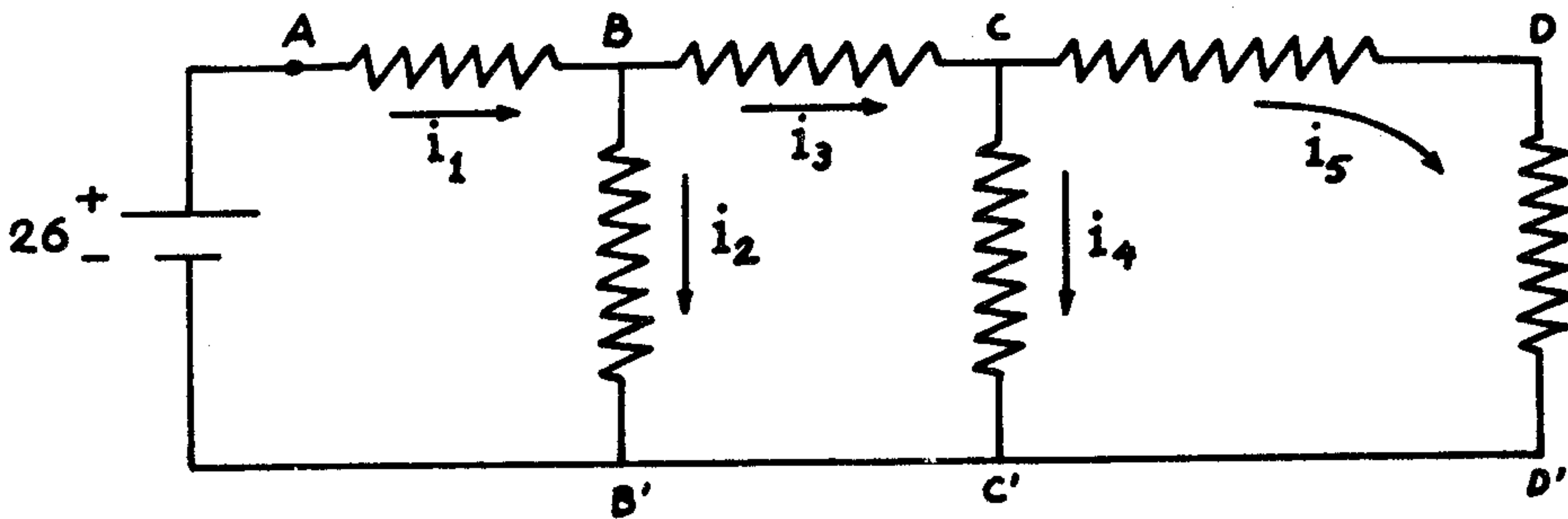


Fig. 79

hemos calculado la corriente  $i_5$ :

$$i_5 = 2$$

pero

$$V_{CC'} = V_{CD} + V_{DD'}$$

luego

$$1 \cdot i_4 = (1 + 1) \cdot i_5$$

de donde

$$i_4 = 4 ;$$

pero

$$i_3 = i_4 + i_5$$

luego

$$i_3 = 6 ;$$

pero

$$V_{BB'} = V_{BC} + V_{CC'}$$

luego

$$1 \cdot i_2 = 1 \cdot i_3 + 1 \cdot i_4$$



de donde

$$i_2 = 10 ;$$

pero

$$i_1 = i_2 + i_3$$

luego

$$i_1 = 16 ;$$

luego la potencia entregada por la batería es

$$P = 26 \cdot 16 = 416 \text{ Watts.}$$

c) El método de escalera ('ladder method') es muy similar al cálculo de las corrientes que acabamos de hacer en la última parte de b).

Consiste en suponer que  $V_{DD'} = 1$ , y a partir de esto podemos calcular todas las corrientes y por lo tanto la diferencia de potencial  $V_{AB'}$ ; este voltaje debe ser igual al de la fuente (26 V), y para conseguir esto, multiplicamos  $V_{AB'}$  por un factor adecuado para darnos 26; dado que el circuito es lineal, el hecho de multiplicar  $V_{AB'}$  por un factor implica que todas las corrientes del circuito deben ser multiplicadas por el mismo factor para darnos los resultados correctos.

Hagámoslo:

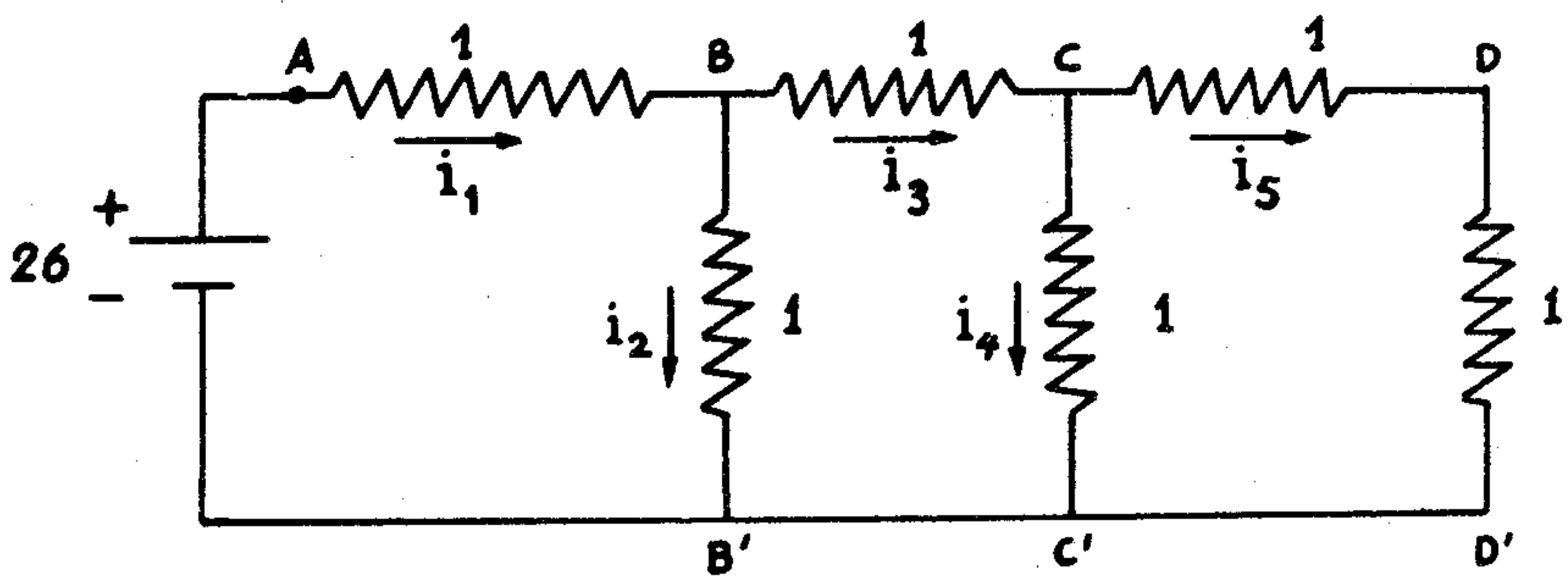


Fig. 80

suponemos

$$V_{DD'} = 1$$

luego

$$i_5 = 1 ;$$

pero

$$V_{CC'} = V_{CD} + V_{DD'}$$

luego

$$i_4 \cdot 1 = (1+1) \cdot i_5$$

de donde

$$i_4 = 2 ;$$

pero

$$i_3 = i_4 + i_5$$

luego

$$i_3 = 3 ;$$

pero

$$V_{BB'} = V_{BC} + V_{CC'}$$

luego

$$1 \cdot i_2 = 1 \cdot i_3 + 1 \cdot i_4$$

de donde

$$i_2 = 5 ;$$

pero

$$i_1 = i_2 + i_3$$

luego

$$i_1 = 8 ,$$

lo que nos conduce a:

$$V_{AB'} = V_{AB} + V_{BB'} = 1 \cdot i_1 + 1 \cdot i_2$$

luego  $V_{AB'} = 13$

pero sabemos que  $V_{AB'}$  debe ser igual a 26, en consecuencia las corrientes deben ser todas multiplicadas por un factor 2 para obtener las corrientes verdaderas:

$$i_5 = 2$$

$$i_4 = 4$$

$$i_3 = 6$$

$$i_2 = 10$$

$$i_1 = 16$$

que son los resultados que habíamos obtenido antes.

De aquí obtenemos la potencia entregada por la fuente:

$$P = 26 \cdot 16 = 416 \text{ Watts.}$$

Este método es muy fácil de aplicar y es conveniente hacerlo en todos los casos en que se tenga un circuito como el que nos dieron en este problema.

#### PROBLEMA 24.-

Use el principio de superposición para calcular la potencia entregada por cada una de las baterías en el circuito siguiente:

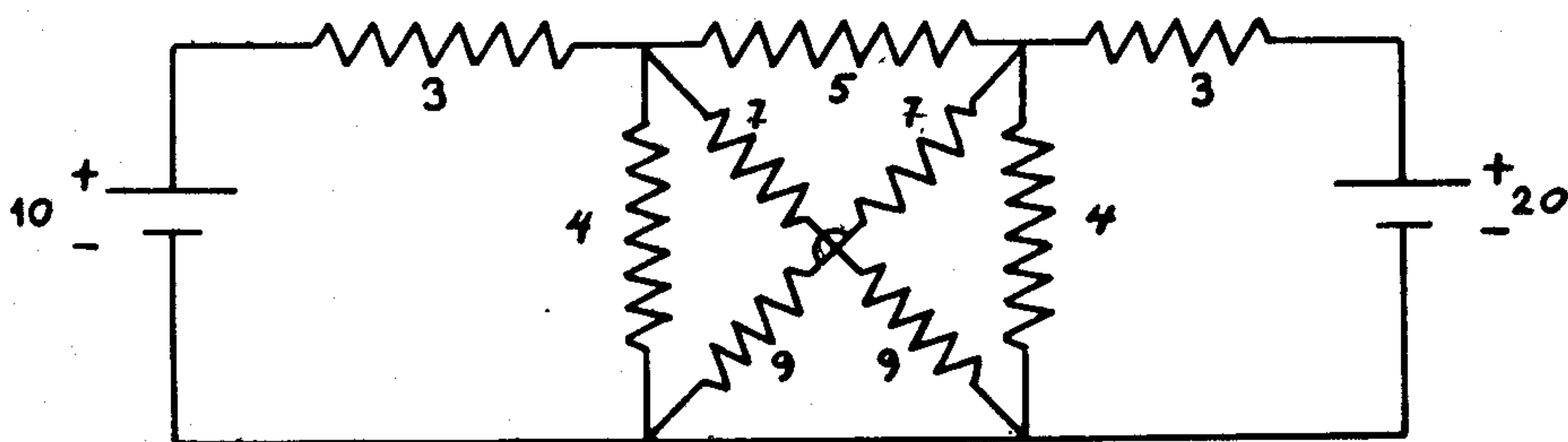


Fig. 81

#### Resolución.-

Sólo necesitamos conocer las corrientes que circulan por cada una de las baterías; reduzcamos entonces todo lo posible las resistencias; es claro que el circuito es equivalente a: (Fig. 82)  
las resistencias de 16 y 4Ω están en paralelo, y son equivalentes a una resistencia  $R_{eq}$ :

$$R_{eq} = \frac{1}{1/4 + 1/16}$$

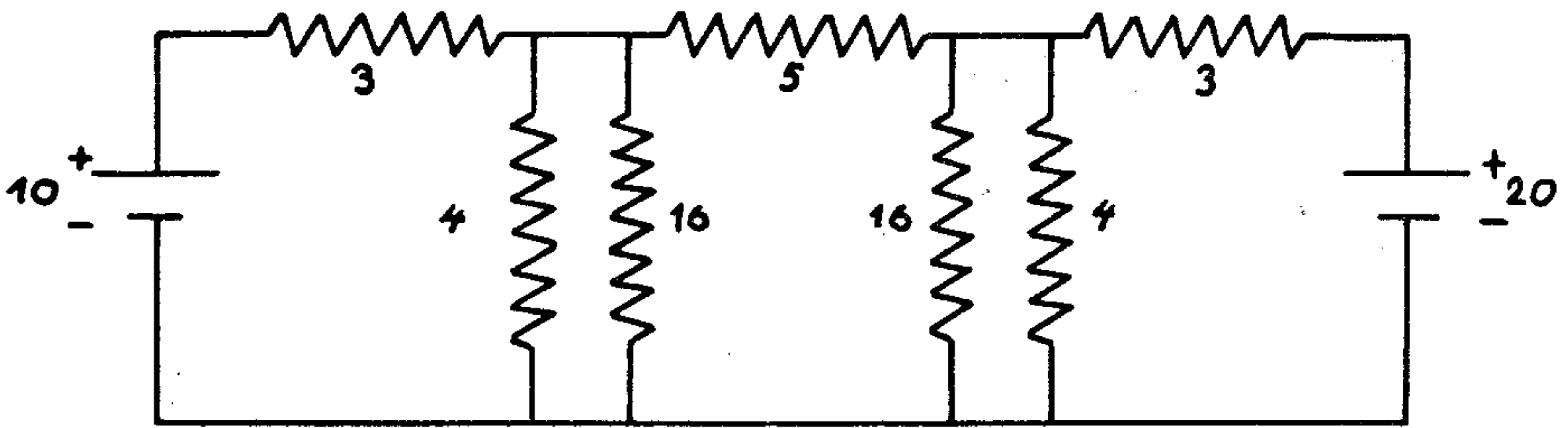


Fig. 82

$$R_{eq} = \frac{16}{5},$$

de modo que el circuito nos queda

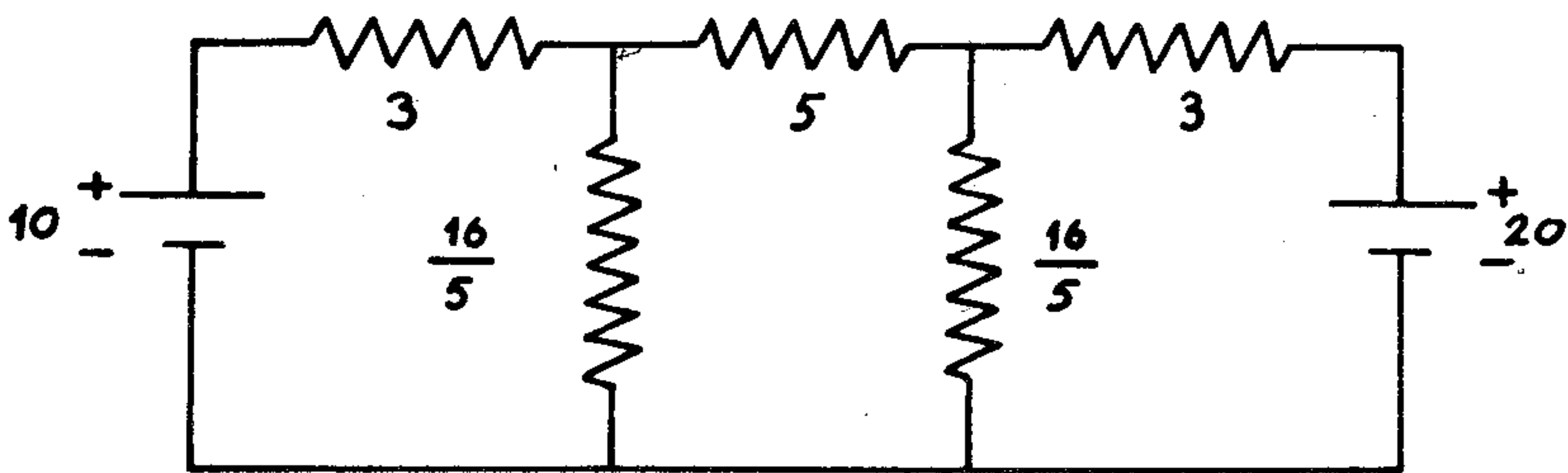


Fig. 83

Las resistencias de  $5$  y  $16/5\Omega$  están dispuestas en forma de triángulo y pueden por lo tanto llevarse a la forma de estrella, con las siguientes equivalencias:

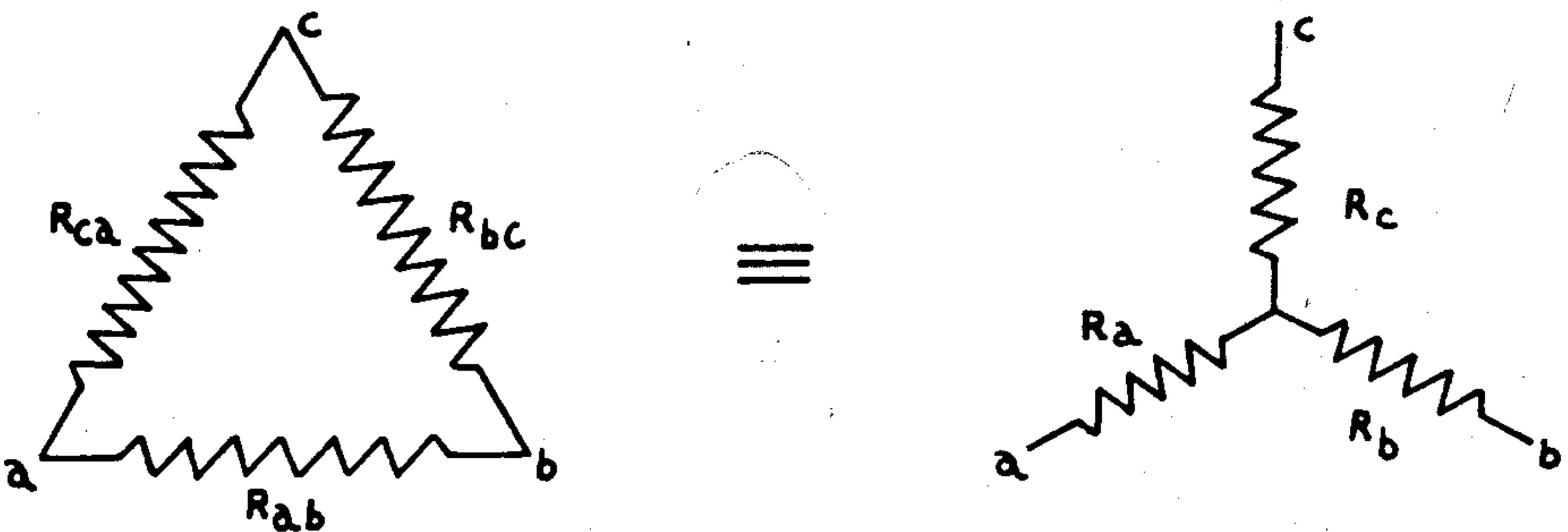


Fig. 84

en donde:

$$R_a = \frac{R_{ab} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

y cíclicamente en las tetras a, b, c.

En nuestro caso,

$$R_{ab} = 5$$

$$R_{ca} = R_{bc} = 16/5$$

luego

$$R_a = R_b = \frac{5 \cdot 16/5}{5 + 16/5 + 16/5} = \frac{80}{57}$$

$$R_c = \frac{(16/5)^2}{57/5} = \frac{256}{285}$$

de modo que el circuito nos queda:

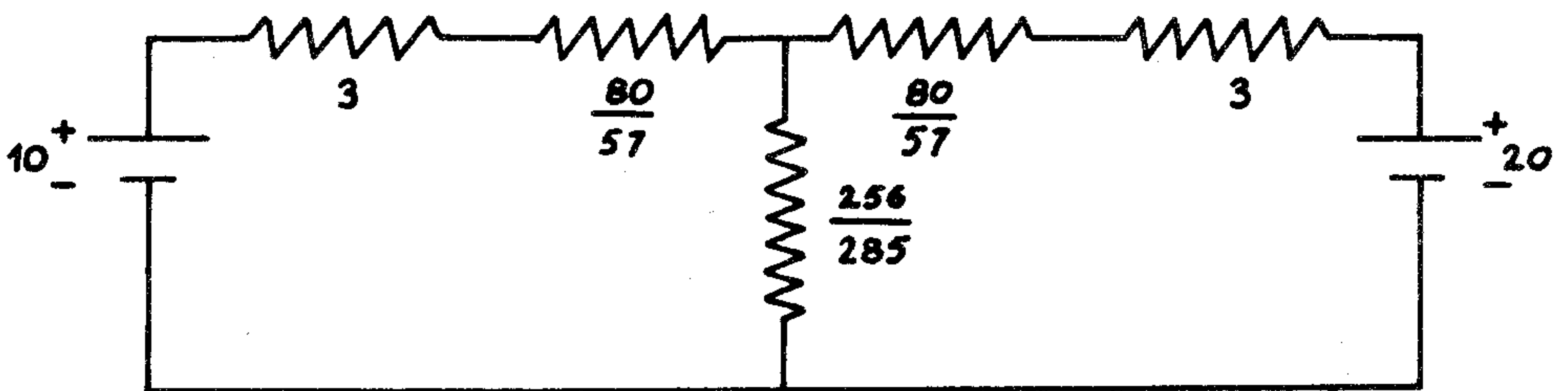


Fig. 85

y finalmente:

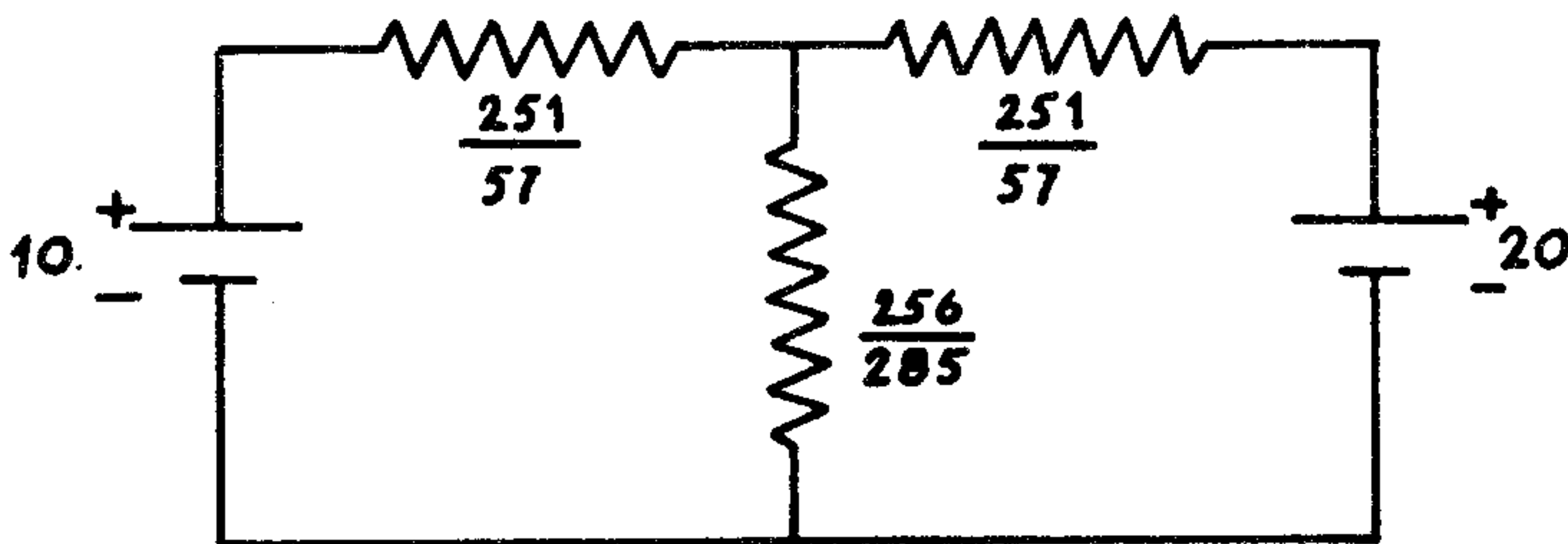


Fig. 86

El principio de superposición dice que, puesto que los circuitos son lineales, si se superponen varias causas, los efectos resultantes son iguales a la superposición de los efectos producidos por cada una de las causas separadamente. Estas frases necesitan mayor explicación; las palabras "causa", "efecto" y "superposición" tienen significado muy amplio, y necesitan precisarse más. Por "causa" debemos entender cualquier estímulo que se aplique al circuito; estos estímulos se producen, en general, por fuentes de voltaje o por fuentes de corriente (en un modelo idealizado, por supuesto). Una fuente de voltaje es un objeto que mantiene entre dos terminales llamados bornes, una diferencia de potencial constante, independientemente de la corriente que circula a través de él (se excluye el caso de cortocircuito). Una fuente de corriente es un objeto que hace circular entre sus bornes (y a través de sí mismo) una corriente constante, independientemente de la diferencia de potencial entre ellos (se excluye el caso de circuito abierto). Por "efecto" debemos entender cualquier respuesta del circuito; estas respuestas son en general corrientes o caídas de tensión a través de sus diferentes ramas.

Supongamos que tenemos un circuito formado sólo por resistencias y por fuentes de voltaje y corriente, y supongamos que queremos quitar todas las causas menos una; dada la definición de fuentes de voltaje y de corriente, lo que debemos hacer es, por lo tanto, cortocircuitar las fuentes de voltaje y abrir las fuentes de corriente, salvo la que queremos dejar. Con esta fuente funcionando, podemos calcular las corrientes y voltajes a través de todas las resistencias; podemos luego quitar esta fuente y conectar otra, y calcular nuevamente las corrientes y voltajes a través de todas las resistencias, y así hasta hacerlo con todas las fuentes. Los voltajes y corrientes así calculados son los "efectos debidos a cada una de las causas separadamente". El principio de superposición dice que si superponemos estos efectos, es decir, si sumamos algebraicamente los voltajes y corrientes debidos a todas las fuentes por separado en una misma resistencia, obtenemos el resultado que calcularíamos con todas las fuentes conectadas simultáneamente.

Es muy importante darse cuenta de que el principio de superposición es válido para los voltajes y corrientes, pues las ecuaciones para estos son lineales; no ocurre lo mismo para las potencias disipadas o entregadas por los distintos elementos del circuito, pues las ecuaciones que las determinan no son lineales. (Por ejemplo,

$$P = \frac{V^2}{R}$$

es una función cuadrática de  $V$ ).

Volvamos a nuestro caso; saquemos primero la fuente de 20 Volts, es decir, corto-circuitémosla:

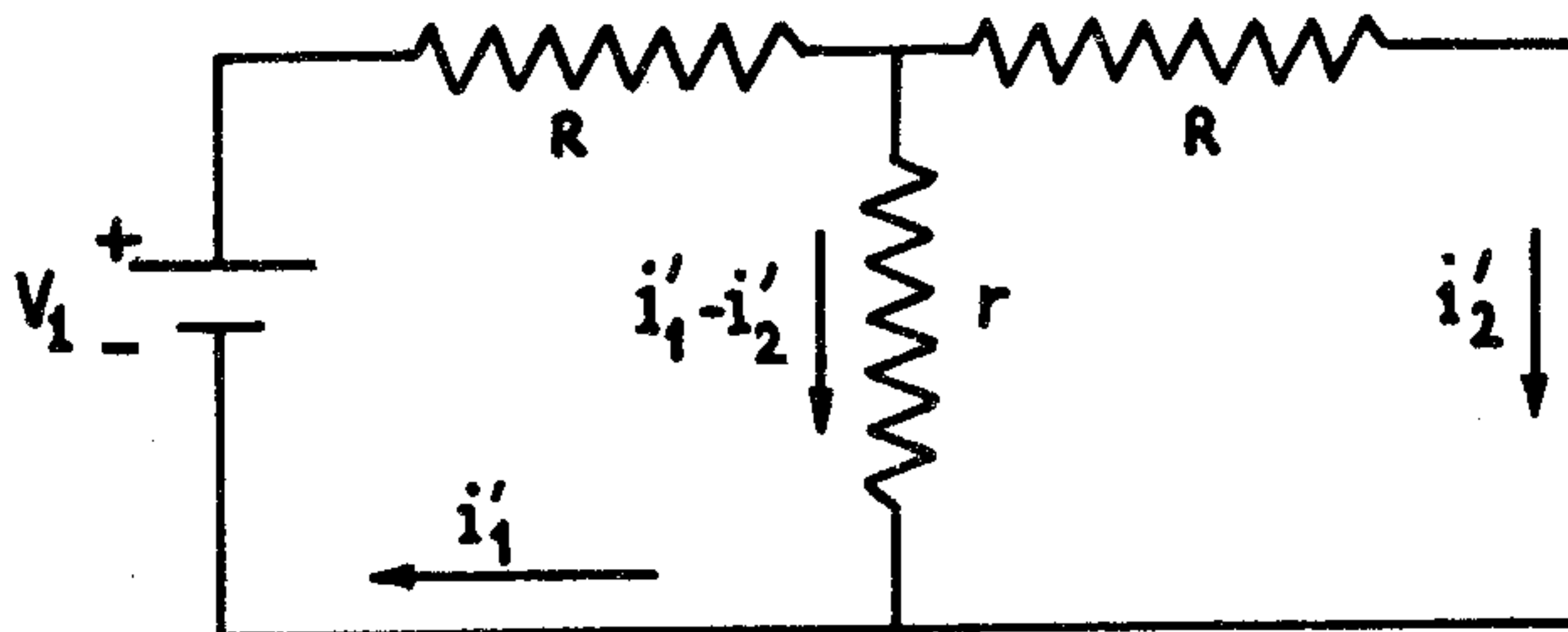


Fig. 87

Por el método de las mallas obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} -V_1 + Ri'_1 + r(i'_1 - i'_2) &= 0 \\ +r(i'_1 - i'_2) - Ri'_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

y de aquí:

$$\left\{ \begin{aligned} i'_1 &= \frac{V_1 (r + R)}{(R + r)^2 - r^2} \\ i'_2 &= \frac{V_1 r}{(R + r)^2 - r^2} \end{aligned} \right.$$

Corto-circuitemos ahora la fuente de 10 Volts y conectemos la de 20:



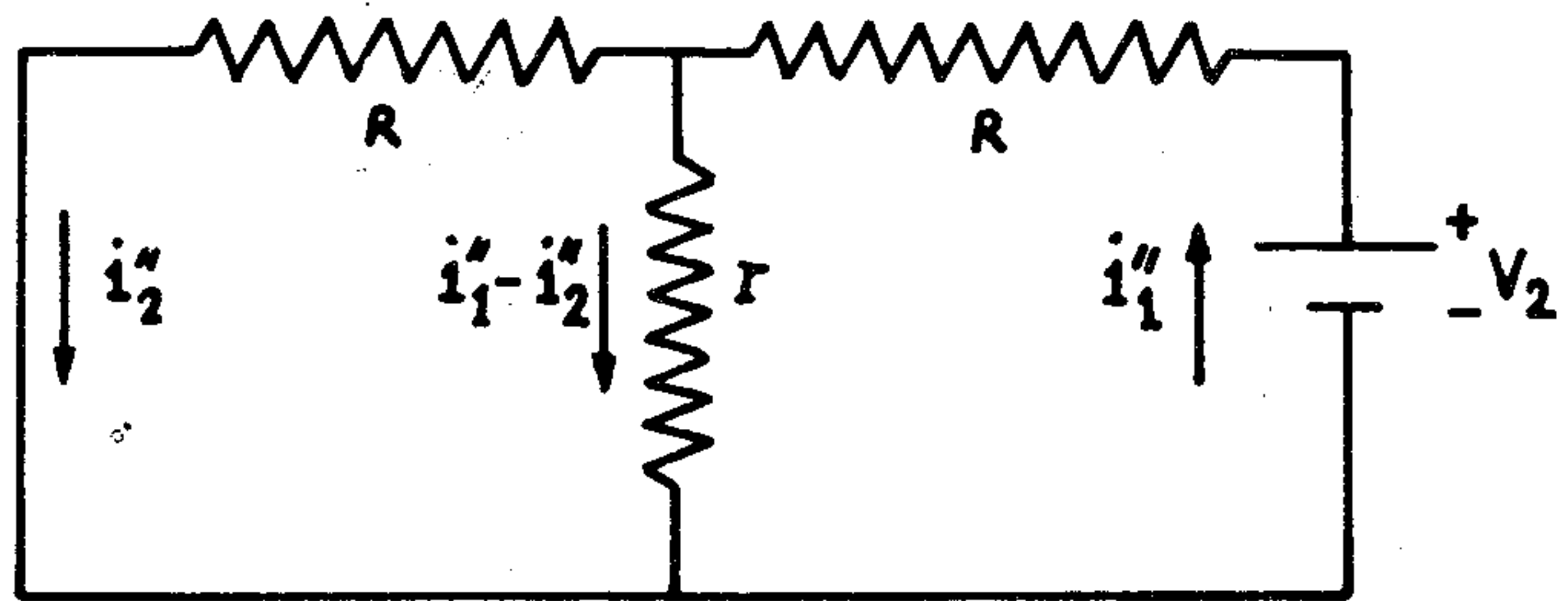


Fig. 88

análogamente, obtenemos:

$$\begin{cases} i_1''' = \frac{V_2 (r + R)}{(R + r)^2 - r^2} \\ i_2''' = \frac{V_2 r}{(R + r)^2 - r^2} \end{cases}$$

Dejemos ahora las dos baterías conectadas:

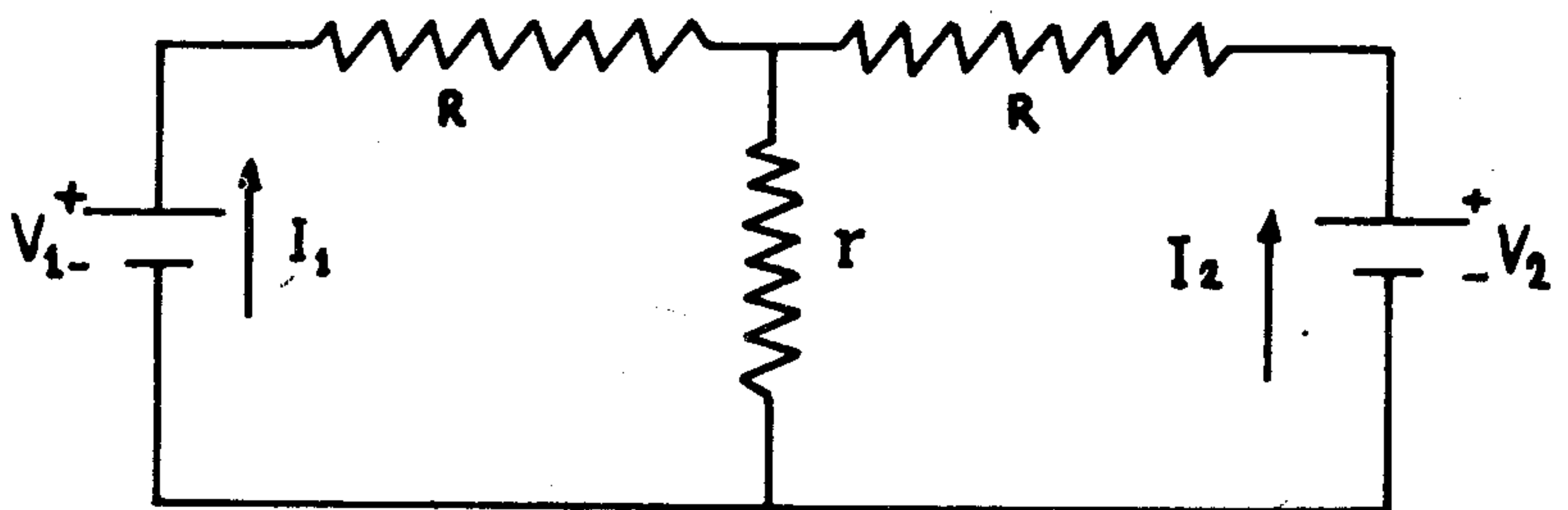


Fig. 89

el principio de superposición nos dice, entonces, que:

$$\begin{cases} I_1 = i_1' - i_2'' \\ I_2 = i_1'' - i_2' \end{cases}$$

(nótese la suma algebraica de las corrientes)

Luego:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{V_1 (R + r) - V_2 r}{(R + r)^2 - r^2} \\ I_2 = \frac{V_2 (r + R) - V_1 r}{(R + r)^2 - r^2} \end{cases}$$

La potencia entregada por cada una de las baterías será:

$$P_1 = V_1 I_1 = \frac{V_1^2 (R + r) - V_1 V_2 r}{(R + r)^2 - r^2}$$

$$P_2 = V_2 I_2 = \frac{V_2^2 (R + r) - V_1 V_2 R}{(R + r)^2 - r^2}$$

y sustituyendo los datos numéricos

$$V_1 = 10 \text{ Volts}$$

$$V_2 = 20 \text{ Volts}$$

$$R = \frac{251}{57} \Omega$$

$$r = \frac{256}{285} \Omega$$

se obtiene finalmente:

$$P_1 \approx 12,8 \text{ Watts}$$

$$P_2 \approx 71,1 \text{ Watts.}$$

#### PROBLEMA 25.-

- a) Se quiere energizar un circuito electrónico por el que circulan 20 mA a 2400 Volts.

Se dispone de una fuente de tensión de corriente continua de 3000 Volts que tiene una resistencia interna de  $10.000 \Omega$ ; y de un divisor de tensión formado por dos resistencias como se indica en la figura 90.

Se pide calcular las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  para alimentar el circuito de modo que la potencia entregada por la fuente de tensión sea mínima; calcule esta potencia.

- b) En el mismo circuito se quiere además hacer funcionar un galvanómetro ideal (sin resistencia interna), que funciona solamente si la corriente es igual o mayor que 20 mA (fig. 91).

Calcular las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  para alimentar los dos elementos haciendo mínima la entrega de potencia por la fuente;

#### Resolución.-

En ambos casos, el circuito electrónico puede ser remplazado, para todos los efectos de los cálculos de las resistencias, por una resistencia  $R$ :

$$R = \frac{2400}{20 \times 10^{-3}} = 120 \times 10^3 \Omega$$

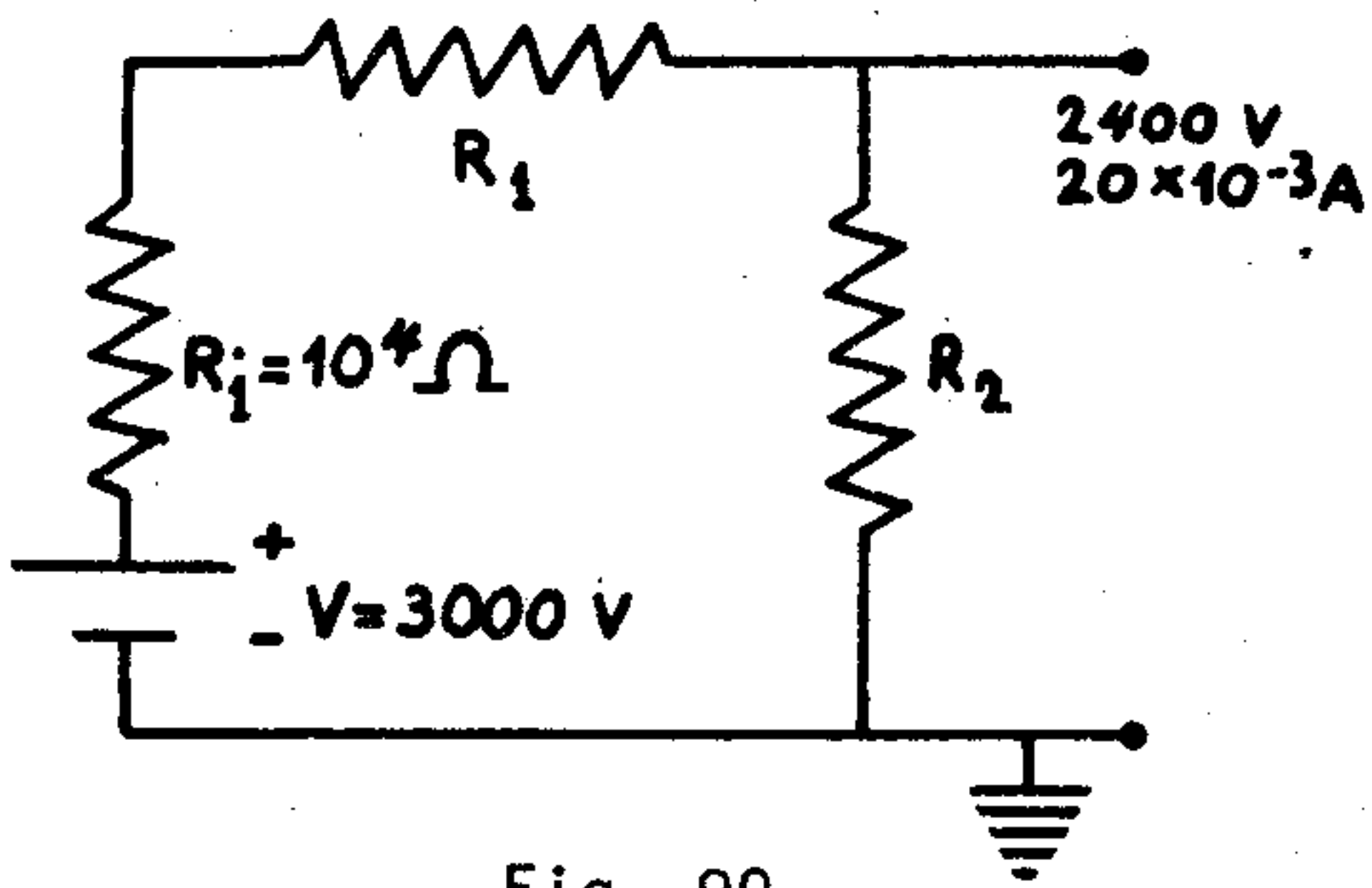


Fig. 90

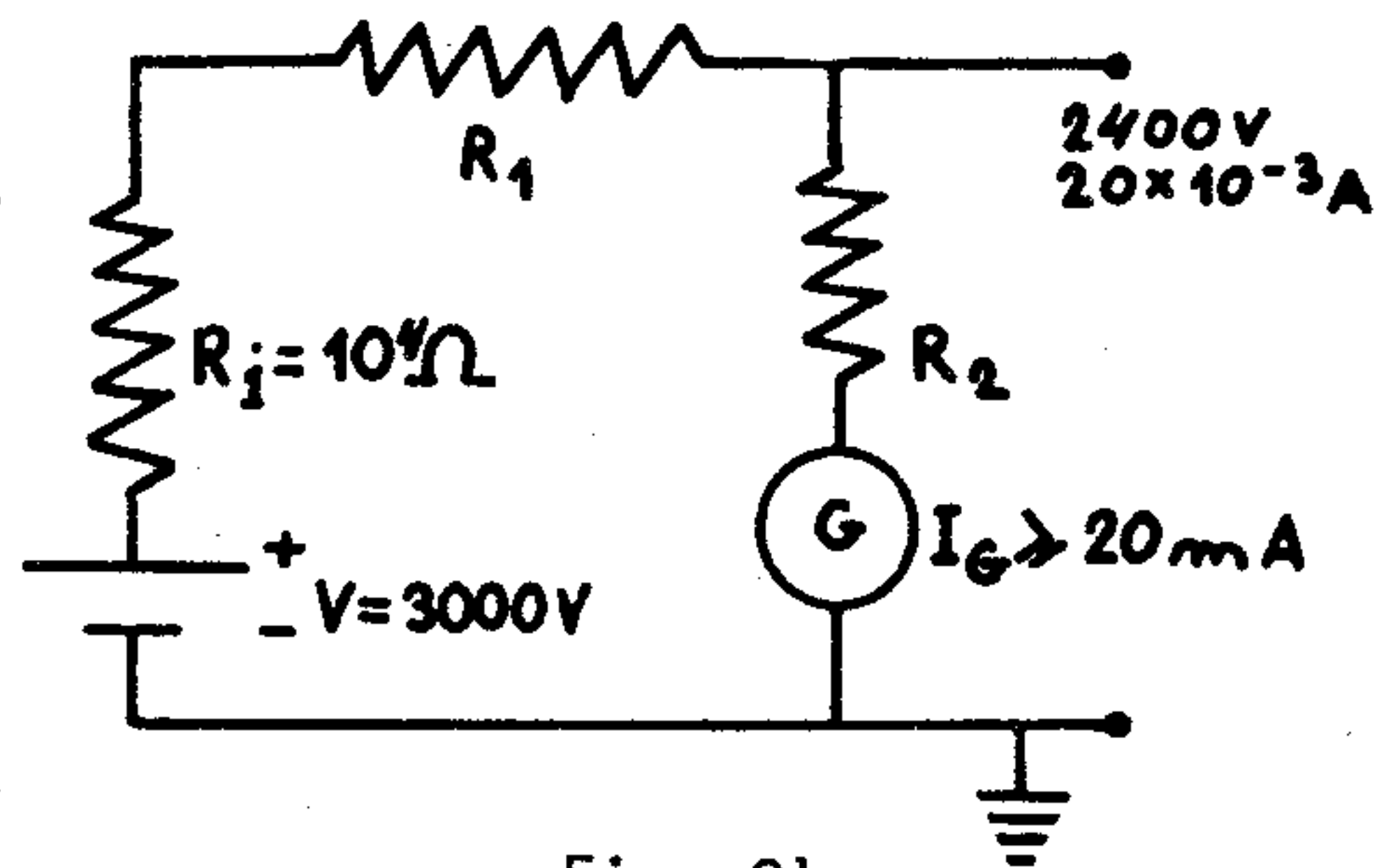


Fig. 91

a) El circuito es:

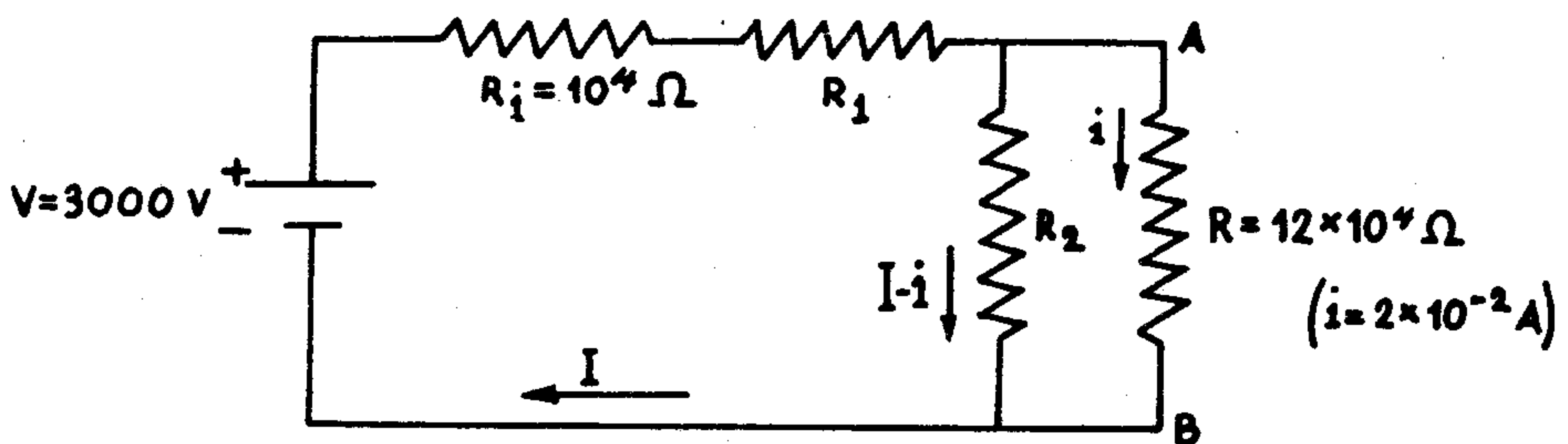


Fig. 92

La potencia entregada por la fuente será tanto menor cuanto menor sea el consumo de potencia en todo el circuito; por esto, podemos argumentar que la resistencia  $R_2$  es innecesaria, y basta, para alimentar el circuito electrónico, ajustar la resistencia  $R_1$  para obtener la diferencia de potencial requerida de 2400 V entre los puntos A y B.

Veamos esto más en detalle; la potencia  $P$  entregada por la fuente es:

$$P = VI ;$$

puesto que  $V = 3000$  Volts es un valor fijo, debemos hacer que  $I$  sea mínimo para obtener  $P$  mínimo; esta condición de  $I$  mínimo debe ser compatible con las ecuaciones del circuito, que se obtienen aplicando el método de las mallas a las dos "ventanas" del circuito:

$$\left. \begin{aligned} -V + R_i I + R_1 I + R_2 (I - i) &= 0 \\ R_i I - R_2 (I - i) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De la segunda de estas dos ecuaciones obtenemos:

$$I = \frac{(R + R_2) i}{R_2}$$

$$I = \frac{R_i}{R_2} i + i ,$$



de donde se ve que el valor mínimo para  $I$  se tiene cuando

$$R_2 = \infty.$$

El circuito es entonces

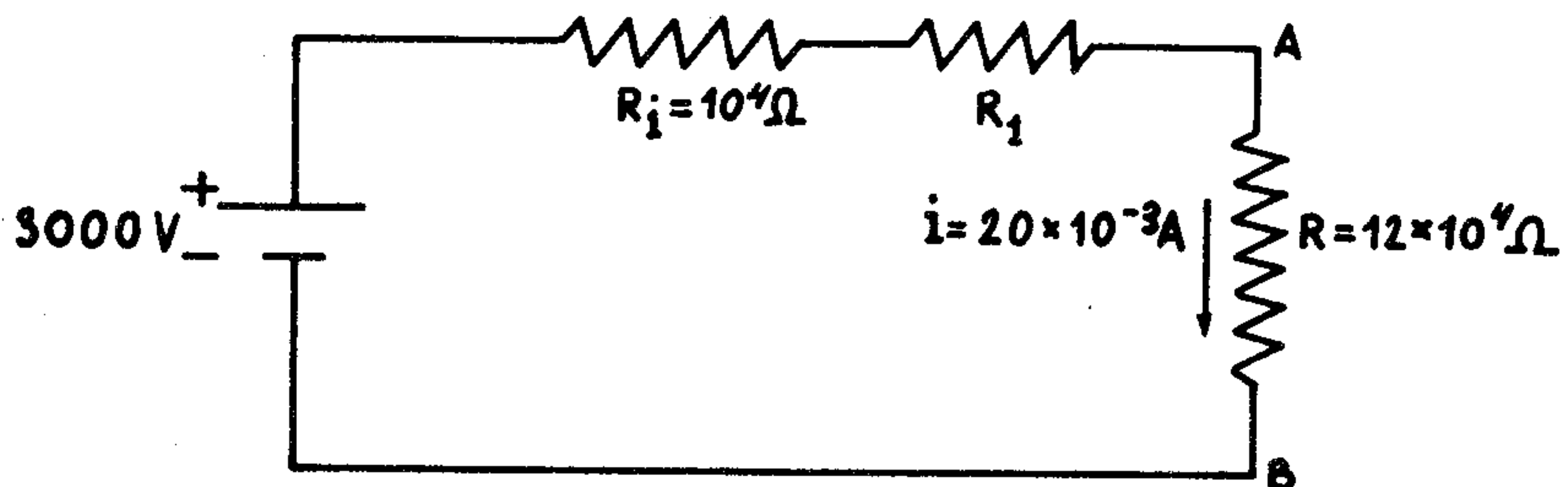


Fig. 93

y de aquí se obtiene el valor de  $R_1$  correspondiente:

$$20 \times 10^{-3} (12 \times 10^4 + 10^4 + R_1) = 3000$$

luego:

$$R_1 = 2 \times 10^4 \Omega$$

y la potencia disipada es:

$$P = Vi = 3000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ Watts}$$

$$P = 60 \text{ Watts}$$

b) El circuito es:

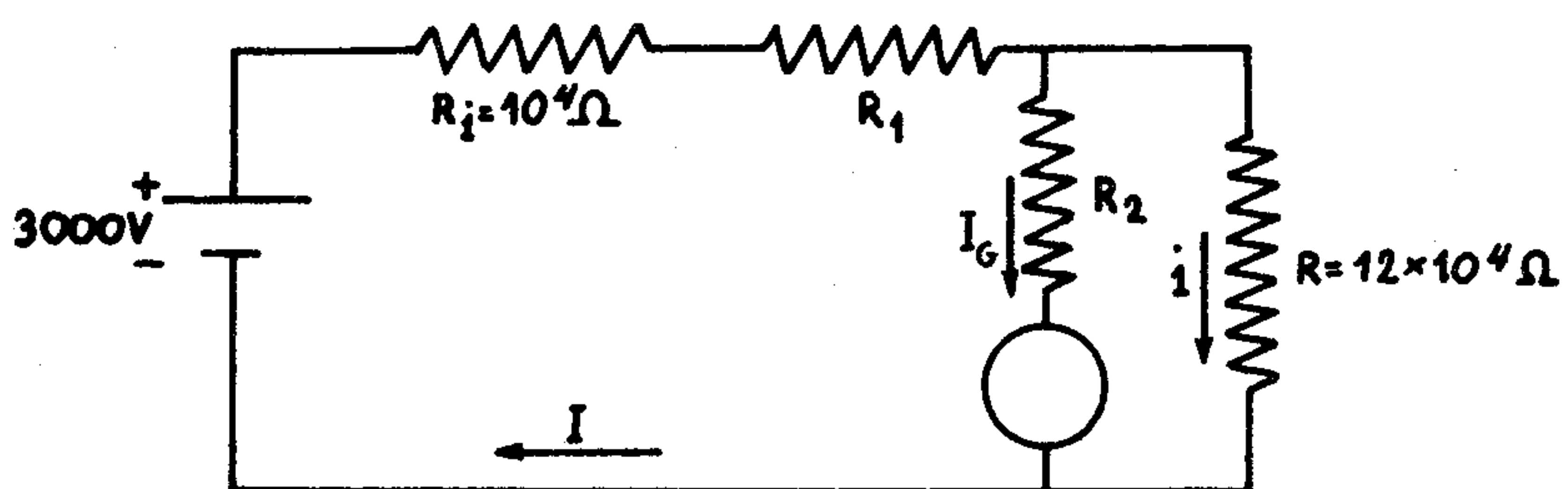


Fig. 94

Las ecuaciones para el circuito son exactamente las mismas que antes; la única diferencia con la parte a) del problema surge del hecho que debe tenerse ahora

$$I_G \geq 20 \times 10^{-3} \text{ A};$$

la segunda de las ecuaciones que obtuvimos antes puede escribirse:

$$R_i - R_2 I_G = 0,$$

puesto que

$$I_G = I - i ;$$

de aquí se ve que para tener  $I$  mínimo, hay que exigir que  $I_G$  sea mínimo; escogemos entonces para  $I_G$  el mínimo valor que puede tomar:

$$I_G = 20 \times 10^{-3} \text{ A} ;$$

luego

$$R_2 = R \frac{i}{I_G} = 12 \times 10^4 \cdot \frac{20 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}}$$

$$R_2 = 12 \times 10^4 \Omega$$

(este valor es también el mayor valor que puede tomar  $R_2$  compatible con  $I_G \geq 20 \text{ mA}$ ; esto es porque:

$$I_G = \frac{2400}{R_2} \geq 2 \times 10^{-2} \text{ A}$$

luego:

$$R_2 \leq \frac{2400}{2 \times 10^{-2}} = 12 \times 10^4 \Omega )$$

El circuito es entonces:

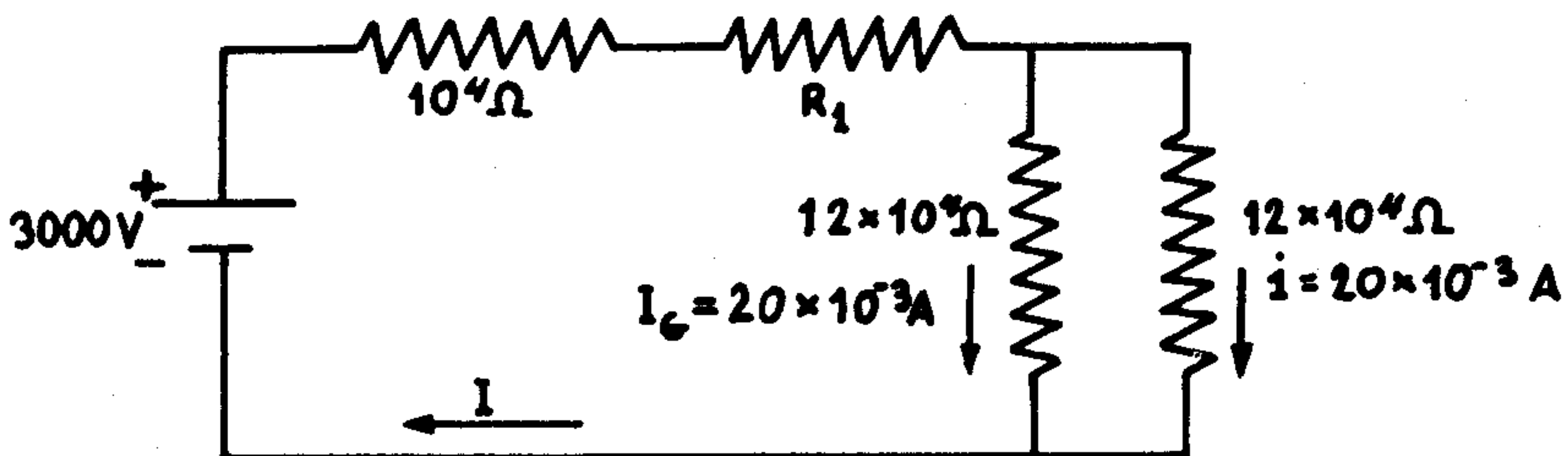


Fig. 95

que es equivalente a

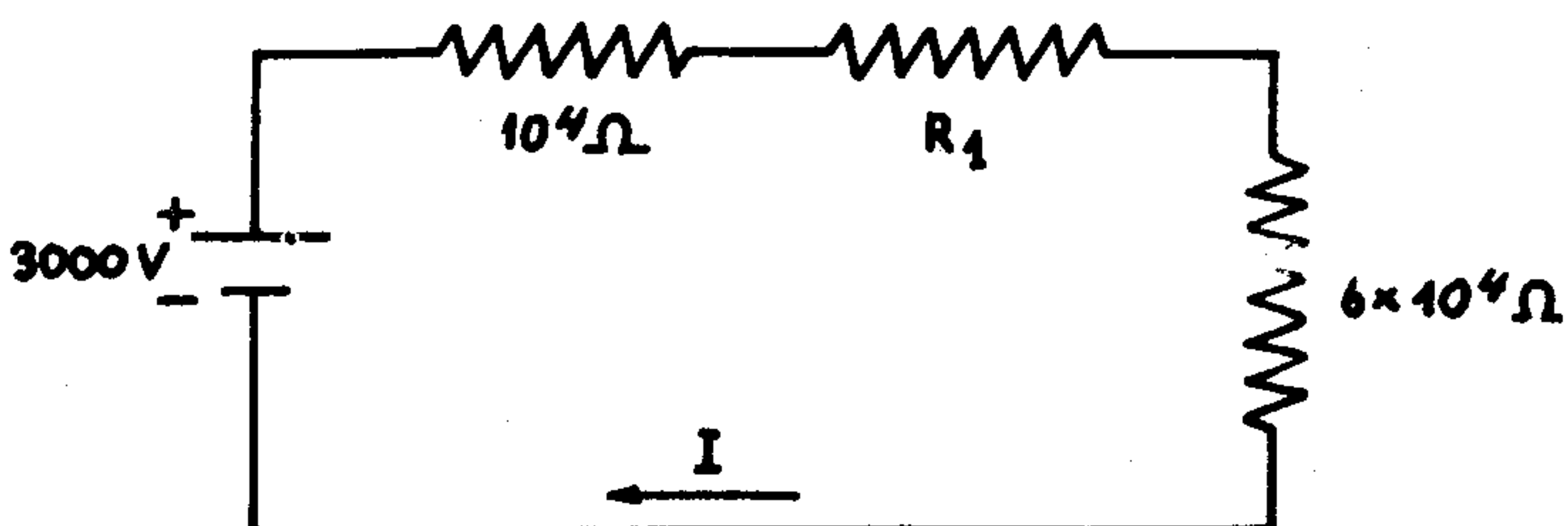


Fig. 96

donde

$$I = i + I_G$$

$$I = 40 \times 10^{-3} \text{ A.}$$

Se tiene entonces:

$$3000 = (10^4 + R_1 + 6 \times 10^4) \times 40 \times 10^{-3}$$

de donde:

$$R_1 = 5 \times 10^3 \Omega$$

El valor de la potencia entregada por la batería es en este caso:

$$P = VI = 3000 \times 40 \times 10^{-3} \text{ Watts}$$

$$P = 120 \text{ Watts}.$$

### PROBLEMA 26.-

- Calcule el campo magnético sobre el eje de un solenoide de largo  $L$  y radio  $R$  que es recorrido por una corriente  $i$  que le da  $N$  vueltas.
- Un cilindro macizo de largo  $L$  y radio  $R$  está cargado uniformemente con densidad de carga  $\rho$ . Se hace rotar en torno a su eje con velocidad angular constante  $\omega$ . Calcule el campo magnético sobre su eje.

### Resolución.-

Calculemos primero el campo magnético sobre el eje de un anillo circular de radio  $R$ :

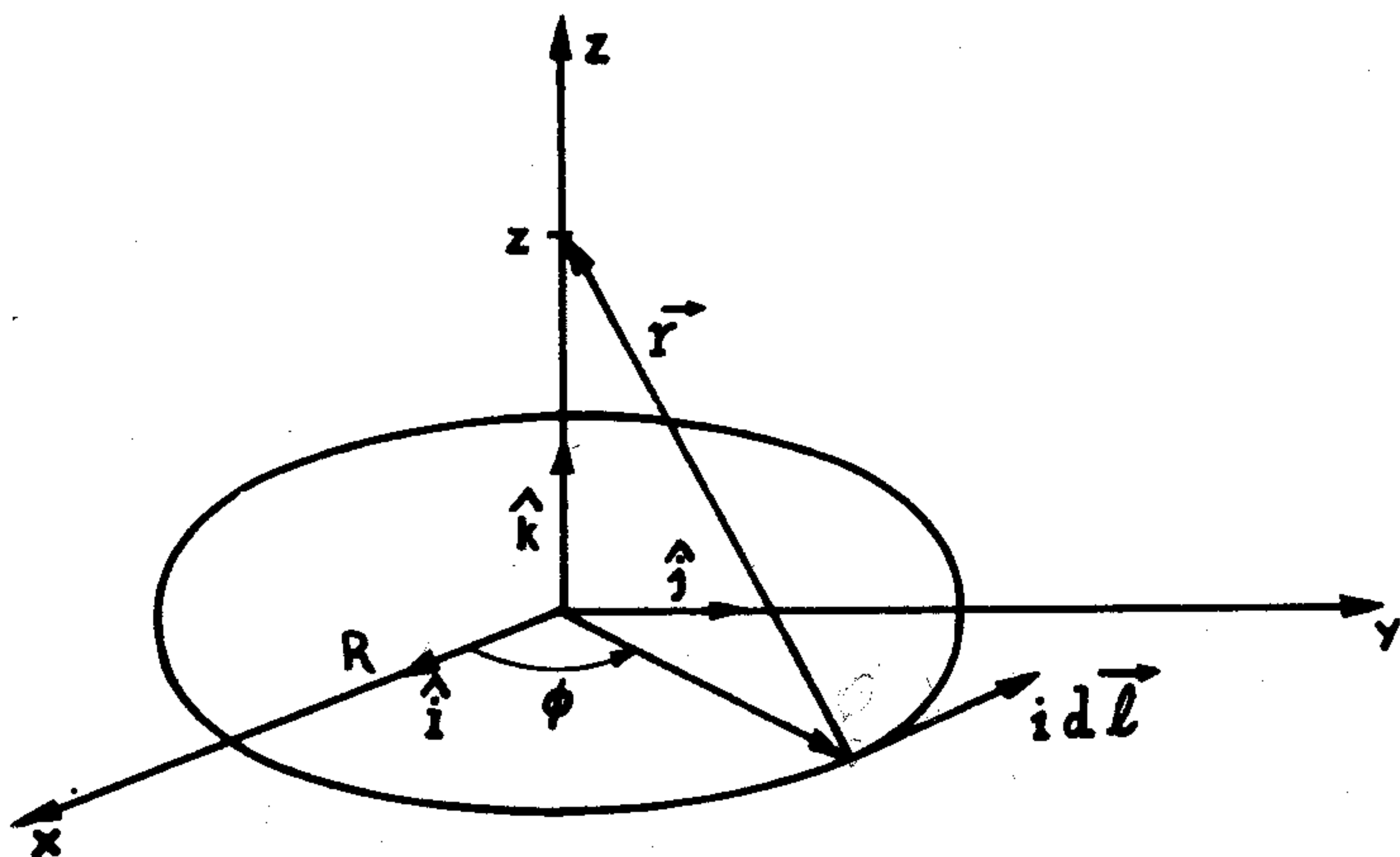


Fig. 97

$$d\vec{H}(z) = \frac{i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3};$$

en nuestro caso:

$$\vec{r} = z\hat{k} - R\cos\phi\hat{i} - R\sin\phi\hat{j}$$

$$d\vec{l} = (-R\sin\phi\hat{i} + R\cos\phi\hat{j})d\phi$$

$$r^3 = |\vec{r}|^3 = (z^2 + R^2)^{3/2}$$

luego  $d\vec{r} \times \vec{r} = \hat{i} z R \cos \phi d\phi + \hat{j} z R \sin \phi d\phi + \hat{k} R^2 d\phi$

$$d\vec{H}(z) = \frac{i}{4\pi} \frac{z R \cos \phi \hat{i} + z R \sin \phi \hat{j} + R^2 \hat{k}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\phi$$

$$\vec{H}(z) = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\vec{H}(z) ;$$

$$\vec{H}(z) = \frac{i}{4\pi (z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k} R^2 \int_0^{2\pi} d\phi ,$$

pues

$$\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{Bmatrix} d\phi = 0 ;$$

luego:

$$\vec{H}(z) = \frac{i R^2 \hat{k}}{2 (z^2 + R^2)^{3/2}} .$$

a) Dividamos el solenoide en espiras de espesor  $dz'$ :

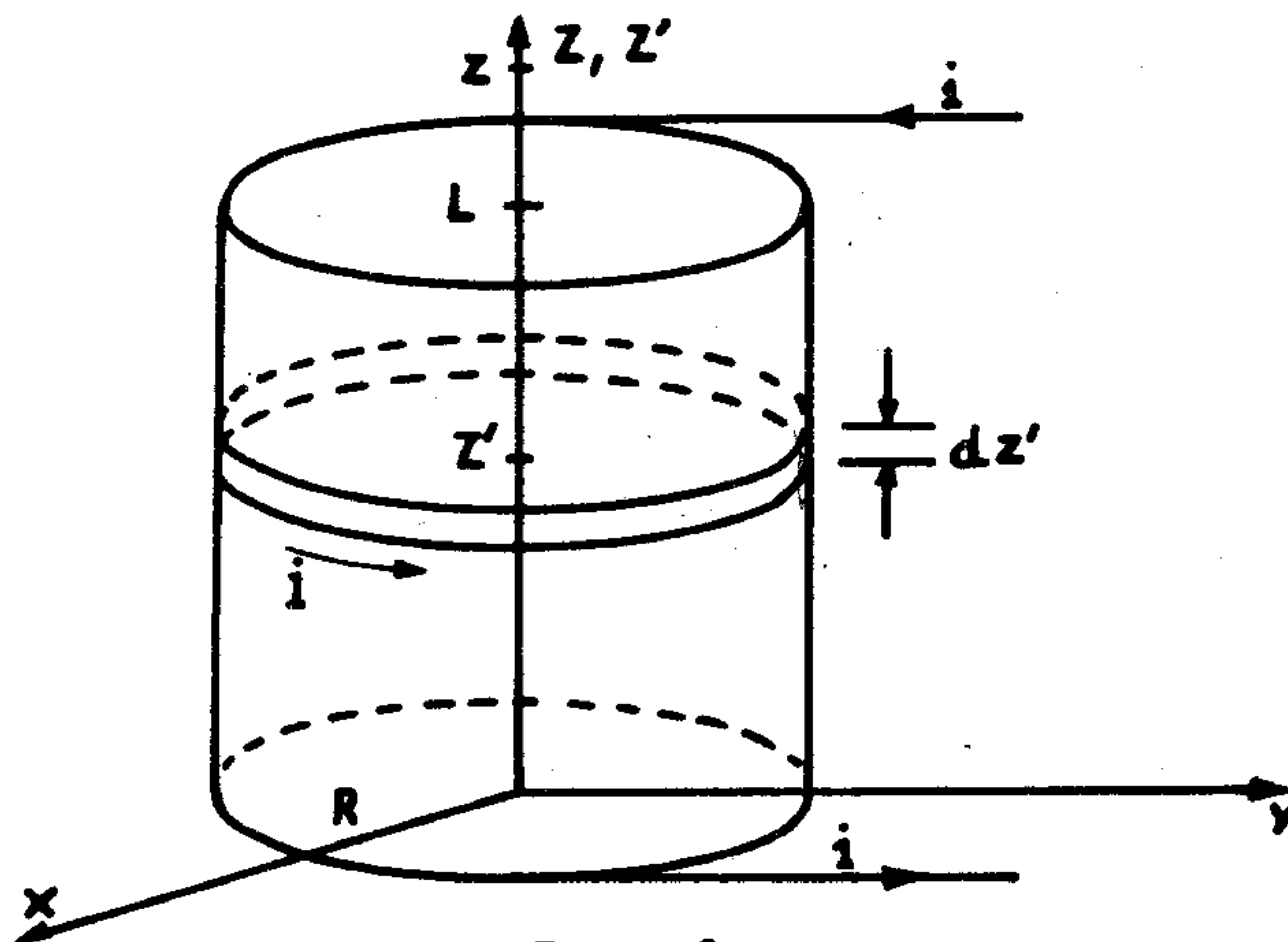


Fig. 98

Sea  $m$  el número de vueltas por unidad de longitud

$$m = \frac{N}{L} ;$$

entonces, en la espira de espesor  $dz'$  habrá  $mdz'$  vueltas, y, por lo tanto, la corriente total que circula por esta espira será

$$i' = i mdz'$$

El campo magnético producido por esta espira en el punto  $z$  será entonces:

$$d\vec{H}(z) = \frac{i \, mdz' \, R^2 \hat{k}}{2[(z-z')^2 + R^2]^{3/2}}$$

pues la distancia entre la espira y el punto de observación  $z$  es  $z-z'$ ; el campo magnético total a la altura  $z$  producido por todo el solenoide es:

$$\vec{H}(z) = \int_{z'=0}^L d\vec{H}(z)$$

$$\vec{H}(z) = \frac{NiR^2\hat{k}}{2L} \int_0^L \frac{dz'}{[(z-z')^2 + R^2]^{3/2}}$$

$$\vec{H}(z) = \frac{NiR^2\hat{k}}{2L} \left[ \frac{-(z-z')}{R^2 \sqrt{(z-z')^2 + R^2}} \right]_0^L$$

$$\vec{H}(z) = \frac{Ni\hat{k}}{2L} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} \right]$$

Un rápido chequeo nos dice que si  $L \rightarrow 0$  en esta fórmula, obtenemos el resultado de la espira; sin embargo, si hacemos directamente  $L = 0$  en la expresión de  $\vec{H}(z)$ , obtenemos un resultado indeterminado, pues tanto el denominador como la cantidad entre corchetes se anulan; pero podemos aplicar la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{L \rightarrow 0} \vec{H}(z) = \frac{Ni\hat{k}}{2} \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dL} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + R^2}} \right]}{\frac{d}{dL} (L)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow 0} \vec{H}(z) &= \frac{Ni\hat{k}}{2} \lim_{L \rightarrow 0} \frac{R^2}{[(z-L)^2 + R^2]^{3/2}} \\ &= \frac{Ni\hat{k}}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

que es el campo magnético que una espira de  $N$  vueltas, ubicada en el plano  $z=0$  produce a la altura  $z=z$ .

b) Para el caso de una distribución en volumen de corriente  $\vec{j}$ , es conveniente modificar la expresión de  $d\vec{H}$ ; si no lo hiciéramos, tendríamos que dividir el cilindro macizo en espiras de sección  $dzdr$ , de radio  $r$  variable entre 0 y  $R$ , y cuya posición en altura varía entre  $z=0$  y  $z=L$ ; la corriente que circula por cada una de estas espiras es  $i = \vec{j} \cdot d\vec{S} = pvdzdr = pwrdrdz$ , e introduciendo esta expresión para la corriente en la fórmula

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$$

e integrando, obtendríamos el resultado que buscamos; se deja propuesto hacer este cálculo. Lo que nosotros buscamos es la expresión del elemento de campo magnético  $d\vec{H}$  producido por un elemento de volumen  $d\tau$  que es recorrido por una densidad de corriente  $\vec{J}$ .

Tomemos un volumen pequeño, cilíndrico, de largo  $d\ell$  y de base  $dS$ , en el cual la densidad de corriente  $\vec{J}$  es perpendicular a las bases:

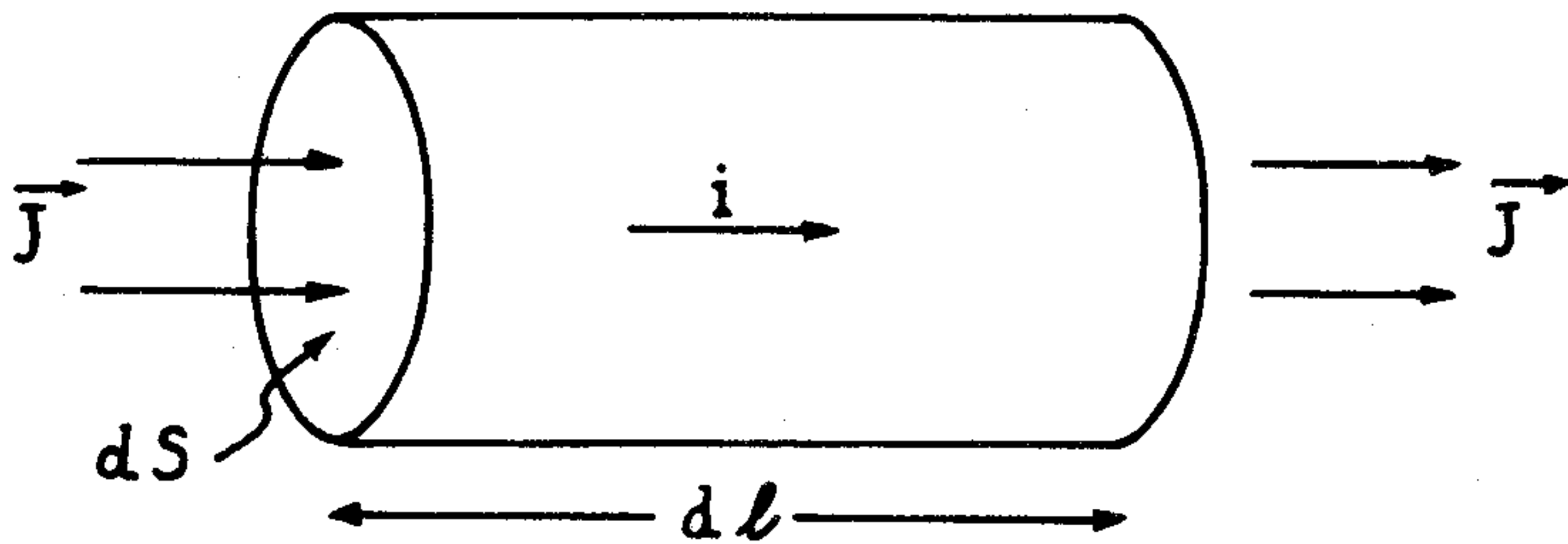


Fig. 99

tenemos entonces:

$$i = J dS$$

$$i d\ell = J dS d\ell = J d\tau$$

y como  $d\ell$  es paralelo a la densidad de corriente, se tiene:

$$i d\vec{\ell} = \vec{J} d\tau.$$

Sustituyendo este en la fórmula para  $d\vec{H}$  se obtiene:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} d\tau$$

que es la fórmula que buscamos; el vector  $\vec{r}$  es el vector que va desde el elemento de volumen  $d\tau$  al punto de observación.

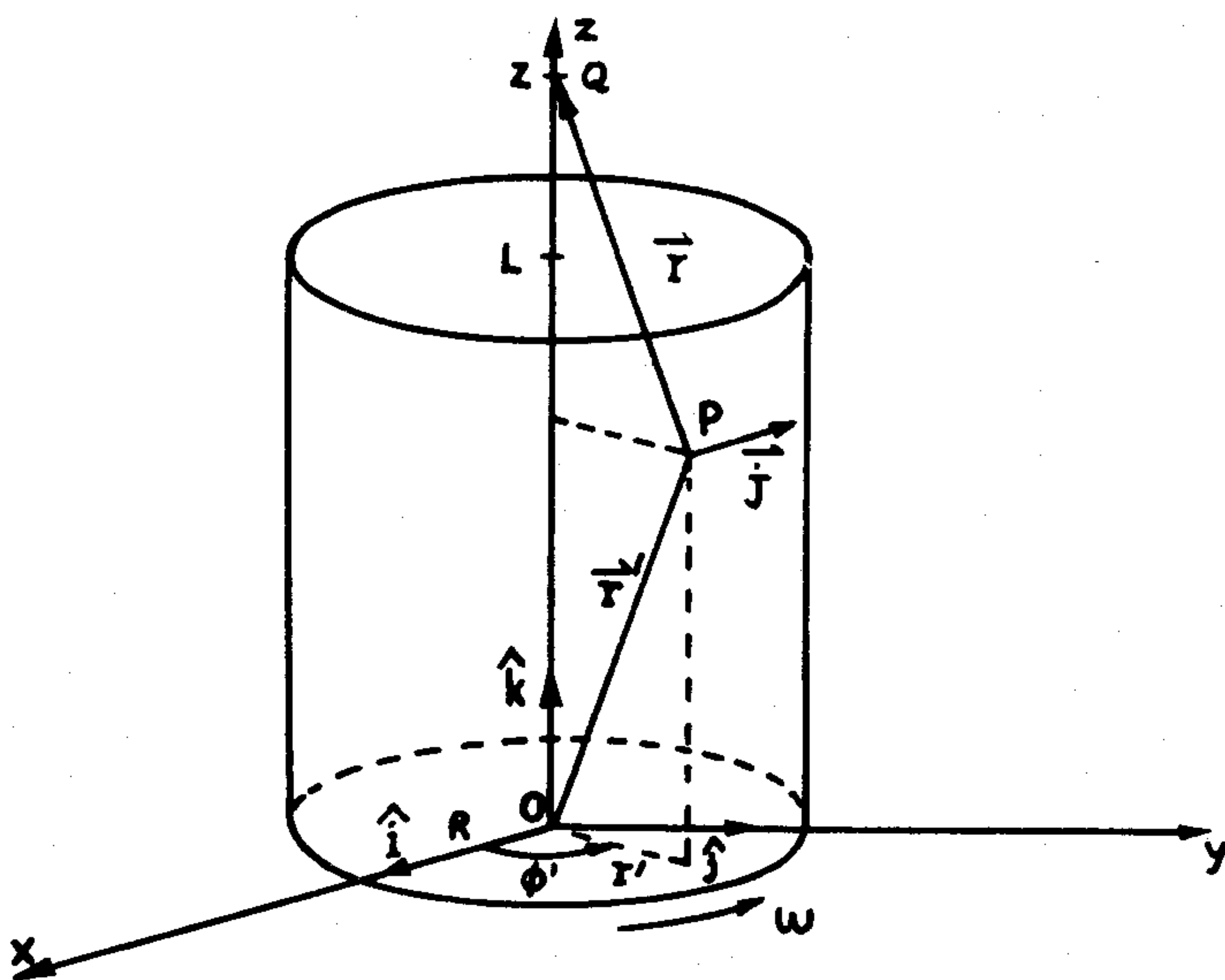


Fig. 100



$$\vec{r}' = \vec{OP} = r' \cos \phi' \hat{i} + r' \sin \phi' \hat{j} + z' \hat{k}$$

$$\vec{r} = \vec{PQ} = z \hat{k} - \vec{r}' = (z - z') \hat{k} - r' \cos \phi' \hat{i} - r' \sin \phi' \hat{j}$$

$$r^3 = |\vec{r}|^3 = [(z - z')^2 + r'^2]^{3/2}$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \vec{\omega} \times \vec{r}' = \rho \omega \hat{k} \times \vec{r}'$$

$$\vec{J} = \rho \omega (-r' \sin \phi' \hat{i} + r' \cos \phi' \hat{j})$$

$$\vec{J} \times \vec{r} = \rho \omega [r' (z - z') \cos \phi' \hat{i} + r' (z - z') \sin \phi' \hat{j} + r'^2 \hat{k}]$$

$$y \quad d\tau = r' dr' dz' d\phi' ;$$

$$\vec{H}(z) = \int_{r'=0}^R \int_{z'=0}^L \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\vec{H}(z)$$

$$\vec{H}(z) = \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{\rho \omega}{4\pi} \frac{\hat{i}(z - z') r' \cos \phi' + \hat{j}(z - z') r' \sin \phi' + \hat{k} r'^2}{[(z - z')^2 + r'^2]^{3/2}} r' dr' dz' d\phi'$$

$$\vec{H}(z) = \frac{\rho \omega \hat{k}}{2} \int_0^R \int_0^L \frac{r'^3 dr' dz}{[(z - z')^2 + r'^2]^{3/2}}$$

$$\vec{H}(z) = \frac{\rho \omega}{2} \int_0^R \left[ \frac{-(z - z')}{r'^2 \sqrt{(z - z')^2 + r'^2}} \right]_0^L r'^3 dr'$$

$$\vec{H}(z) = \frac{\rho \omega}{2} \int_0^R \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + r'^2}} - \frac{z - L}{\sqrt{(z - L)^2 + r'^2}} \right] r' dr'$$

$$\vec{H}(z) = \frac{\rho \omega}{2} \left[ z \sqrt{z^2 + r'^2} - (z - L) \sqrt{(z - L)^2 + r'^2} \right]_0^R$$

$$\vec{H}(z) = \frac{\rho \omega}{2} \left[ z \sqrt{z^2 + R^2} - z^2 + (z - L)^2 - (z - L) \sqrt{(z - L)^2 + R^2} \right]$$

### PROBLEMA 27.-

Una esfera de radio  $R$  está cargada uniformemente con una densidad de carga en volumen  $\rho$  (constante). La esfera rota en torno a uno de sus diámetros con velocidad angular constante  $\omega$ .

a) Pruebe que el campo magnético en el centro es:

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{3} \rho R^2 \vec{\omega}$$



- b) Calcule el valor del potencial magnético vectorial  $\vec{A}$  en el centro.
- c) Calcule el campo magnético sobre el eje de rotación en un punto situado a la distancia  $z$  del centro de la esfera; haga el cálculo en aproximación hasta el 3<sup>er</sup> orden suponiendo que  $z \gg R$ .

Resolución.-

- a) Tenemos una distribución maciza de corriente; en el problema anterior dedujimos que para este caso conviene aplicar:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} d\tau ;$$

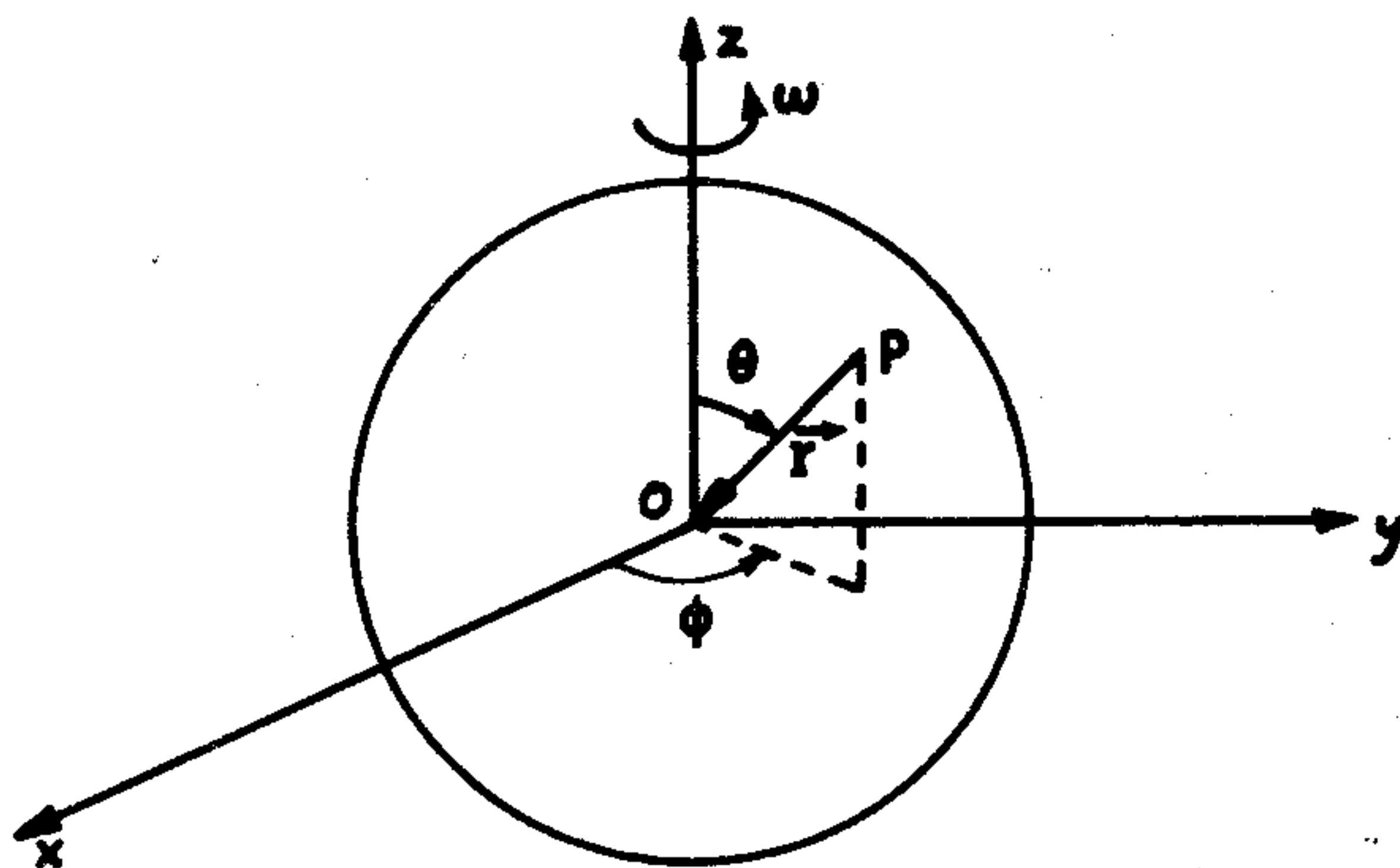


Fig. 101

el vector  $\vec{r}$  que aparece en la expresión de  $d\vec{H}$  es el vector que va desde el elemento de volumen  $d\tau$  al punto de observación, que en este caso es el origen; es decir

$$\vec{r} = \vec{PO} = -\vec{OP}$$

$$\vec{r} = -r (\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k})$$

donde  $r, \theta, \phi$  son las coordenadas esféricas del punto P;

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \vec{\omega} \times \vec{OP} = \rho \omega \hat{k} \times \vec{OP}$$

$$\vec{J} \times \vec{r} = \rho \omega (\hat{k} \times \vec{OP}) \times \vec{PO}$$

$$\vec{J} \times \vec{r} = -\rho \omega (\hat{k} \cdot \vec{r} \vec{r} - r^2 \hat{k})$$

$$\vec{J} \times \vec{r} = \rho \omega [r^2 \hat{k} - r^2 \cos\theta (\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k})]$$

$$d\vec{H} = \frac{\rho \omega}{4\pi} \frac{r^2 \sin^2\theta \hat{k} - r^2 \cos\theta (\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j})}{r^3} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$\vec{H}_O = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R d\vec{H}$$

la integral en  $\phi$  es inmediata, y nos da:

$$\vec{H}_0 = \frac{\rho\omega}{2} \hat{k} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r \sin^3 \theta dr d\theta$$

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{3} \rho\omega R^2 \hat{k}$$

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{3} \rho R^2 \vec{\omega}$$

b) Sabemos que:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell}}{r}$$

pero vimos en el problema anterior que:

$$i d\vec{\ell} = \vec{J} d\tau$$

$$\text{Luego } d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{r} d\tau$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \vec{\omega} \times \vec{OP} = \rho\omega \hat{k} \times \vec{OP}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\hat{j} \sin\theta \cos\phi - \hat{i} \sin\theta \sin\phi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

y el valor de  $\vec{A}$  en el centro será:

$$\vec{A}_0 = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\vec{A}$$

de donde resulta, integrando sobre  $\phi$ :

$$\vec{A} = \vec{0}$$

No debe sacarse conclusiones erróneas del hecho que  $\vec{A}$  en el centro de la esfera sea igual a cero; en realidad, el potencial  $\vec{A}$  es igual a cero sobre cualquier punto del eje de rotación de la esfera. Esto no implica nada sobre los valores que el campo magnético  $\vec{H}$  pueda tomar sobre este eje, pues, para calcular  $\vec{H}$  a partir de  $\vec{A}$ , necesitamos conocer  $\vec{A}$  en un punto arbitrario del espacio y ahí calcularlo:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A},$$

y luego evaluar esta expresión en el punto donde queremos calcular  $\vec{H}$ ; por lo demás, el potencial vectorial  $\vec{A}$  no está bien definido: puede agregársele un término de la forma  $\nabla f$ , donde  $f$  es una función arbitraria de  $\vec{r}$ .

$$c) \quad d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{r}'}{r'^3} d\tau;$$

en este caso,  $\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \vec{\omega} \times \vec{r} = \rho\omega \hat{k} \times \vec{r}$

$$\vec{r} = r(\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k})$$

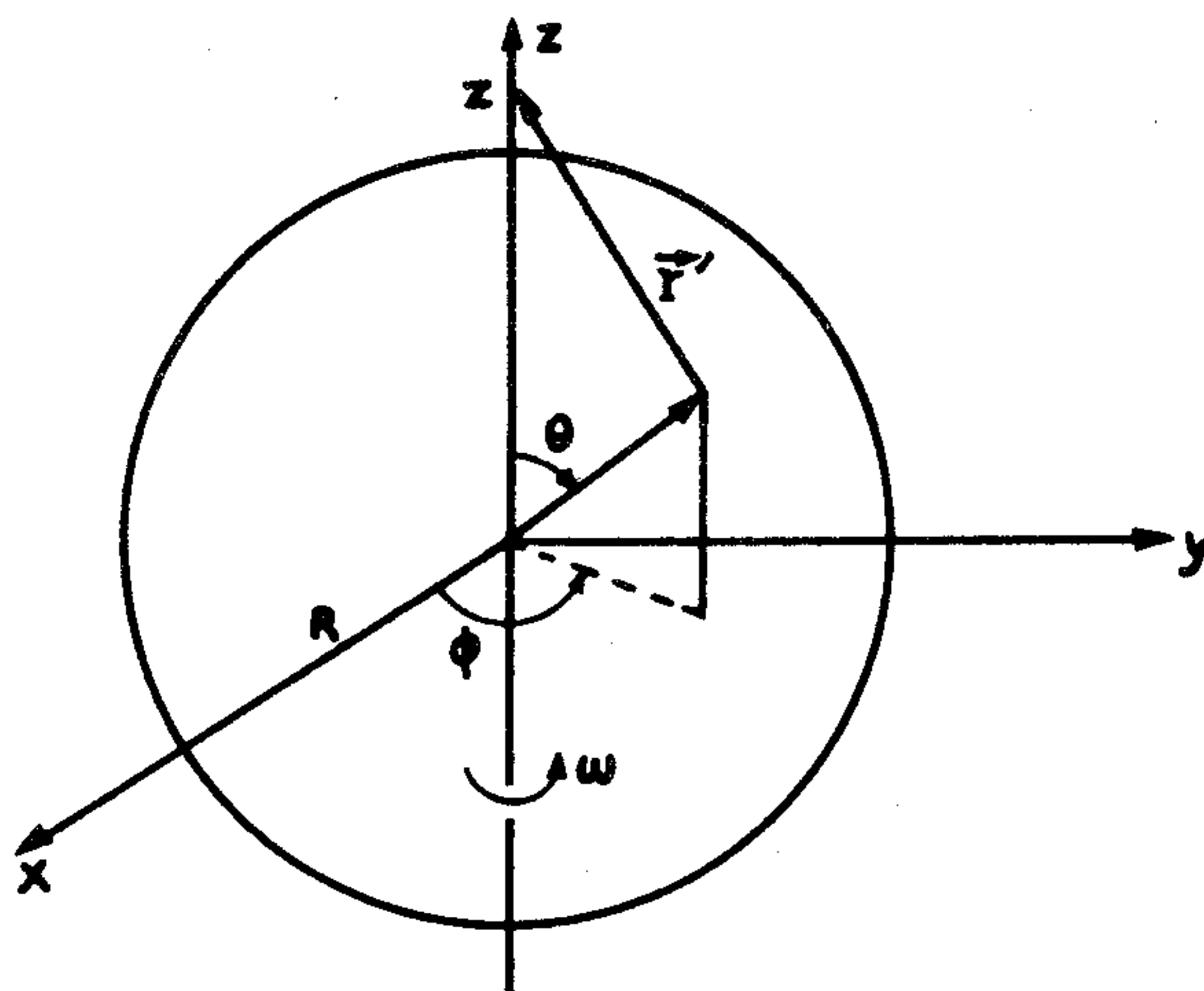


Fig. 108

$$\vec{r}' = z\hat{k} - \vec{r}$$

$$\vec{r}' = \hat{k}(z - r\cos\theta) - \hat{i}r\sin\theta\cos\phi - \hat{j}r\sin\theta\sin\phi$$

$$r'^3 = |\vec{r}'|^3$$

$$r'^3 = (z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta)^{3/2}$$

el producto  $\vec{J} \times \vec{r}'$  es algo largo, y resulta:

$$\vec{J} \times \vec{r}' = \rho w r^2 \sin^2\theta \hat{k} + \text{términos según } \hat{i} \text{ y } \hat{j};$$

los términos según  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  que aparecen en  $\vec{J} \times \vec{r}'$  no contribuyen al campo magnético pues son proporcionales a  $\sin\phi$  o  $\cos\phi$ , de modo que al integrar sobre  $\phi$ , desaparecen; finalmente queda:

$$\vec{H}(z) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R \frac{\rho w \hat{k}}{4\pi} \frac{r^4 \sin^3\theta dr d\theta d\phi}{(z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta)^{3/2}}$$

$$\vec{H}(z) = \frac{\rho w}{2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{r^4 \sin^3\theta dr d\theta}{(z^2 + r^2 - 2zr\cos\theta)^{3/2}}$$

Si pudiéramos calcular la integral doble que nos queda, tendríamos el resultado en forma exacta; sin embargo esto no es posible, por lo menos en forma simple. Pero podemos desarrollar en serie nuestro integrando, aprovechando que  $z \gg R$  (por lo tanto  $z \gg r$ ); hacemos primero el cambio:

$$\cos\theta \approx 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

con lo cual la integral doble  $I$  queda:

$$I = \int_0^R \int_0^{\pi} \frac{r^4 \sin^3\theta dr d\theta}{[(z + r)^2 - 4zr \cos^2 \frac{\theta}{2}]^{3/2}}$$

$$I = \int_0^R \int_0^\pi \frac{r^4 \sin^3 \theta dr d\theta}{(z+r)^3 \left[ 1 - \frac{4zr}{(z+r)^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]^{3/2}}$$

La cantidad  $\frac{4zr}{(z+r)^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$  es aproximadamente:

$$\frac{4zr}{(z+r)^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \approx \frac{4zr}{z^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = 4 \frac{r}{z} \cos^2 \frac{\theta}{2} \ll 1,$$

pues  $\frac{r}{z} \ll 1$  y  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  está acotado superiormente por la unidad; podemos aprovechar entonces el desarrollo en serie:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots,$$

y si  $x \ll 1$ , podemos quedarnos con los primeros términos de la serie; en nuestro caso, desarrollamos hasta el tercer orden:

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{4zr}{d^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{4zr}{d^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{2} \right) \left( -\frac{5}{2} \right) \frac{16z^2 r^2}{d^4} \cos^4 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \left( -\frac{3}{2} \right) \left( -\frac{5}{2} \right) \left( -\frac{7}{2} \right) \cos^6 \frac{\theta}{2} + \dots \\ & = 1 + \frac{6zr}{d^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{30z^2 r^2}{d^4} \cos^4 \frac{\theta}{2} + \frac{140z^3 r^3}{d^6} \cos^6 \frac{\theta}{2} + \dots, \end{aligned}$$

y esto lo hacemos idéntico a:

$$= 1 + a \cos^2 \frac{\theta}{2} + b \cos^4 \frac{\theta}{2} + c \cos^6 \frac{\theta}{2} + \dots,$$

lo que define las cantidades a, b, y c; hemos introducido también la cantidad d que es igual a  $z+r$ .

Por otra parte,

$$\sin^3 \theta = 8 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2}$$

$$\sin^3 \theta = 8 \sin \frac{\theta}{2} (1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cos^3 \frac{\theta}{2},$$

lo que nos sugiere hacer el cambio de variables:

$$\frac{\theta}{2} = \phi,$$

$$d\theta = 2d\phi,$$

y los límites de integración serán ahora 0 y  $\pi$ :

$$I \approx 16 \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{r^4}{(z+r)^3} (1-\cos^2\phi) \cos^3\phi (1+a\cos^2\phi + b\cos^4\phi + c\cos^6\phi) \sin\phi d\phi$$

Esto nos sugiere nuevamente un cambio de variables:

$$\begin{aligned} x &= \cos\phi \\ dx &= -\sin\phi d\phi \end{aligned}$$

y los límites de integración en la variable  $x$  serán 1 y 0; el signo menos que aparece en  $dx$  lo aprovechamos para invertir el orden de integración, de modo que nos queda:

$$I = 16 \int_{r=0}^R \int_{x=0}^1 \frac{r^4}{(z+r)^3} (1-x^2)x^3 (1+ax^2+bx^4+cx^6+\dots) dx dr$$

$$I = 16 \int_{r=0}^R \int_{x=0}^1 \frac{r^4}{(z+r)^3} (x^3+ax^5+bx^7+cx^9-x^5-ax^7-bx^9-cx^{11}\pm\dots) dx dr.$$

La integral sobre  $x$  es inmediata, y nos da:

$$I = 16 \int_{r=0}^R \frac{r^4}{(z+r)^3} \left( \frac{1}{4} + \frac{a}{6} + \frac{b}{8} + \frac{c}{10} - \frac{1}{6} - \frac{a}{8} - \frac{b}{10} - \frac{c}{12} \pm \dots \right) dr$$

$$I = \frac{4}{3} \int_{r=0}^R \frac{r^4}{(z+r)^3} \left( 1 + \frac{a}{2} + \frac{3b}{10} + \frac{c}{5} + \dots \right) dr,$$

e introduciendo los valores de  $a, b$  y  $c$ , se tiene:

$$I = \frac{4}{3} \int_0^R \left[ \frac{r^4}{(z+r)^3} + \frac{3zr^5}{(z+r)^5} + \frac{9z^2r^6}{(z+r)^7} + \frac{28z^3r^7}{(z+r)^9} + \dots \right] dr,$$

o bien:

$$I = \frac{4}{3} \int_0^R \left[ \frac{r^4}{z^3} \left( 1 + \frac{r}{z} \right)^{-3} + \frac{3r^5}{z^4} \left( 1 + \frac{r}{z} \right)^{-5} + \frac{9r^6}{z^5} \left( 1 + \frac{r}{z} \right)^{-7} + \frac{28r^7}{z^6} \left( 1 + \frac{r}{z} \right)^{-9} + \dots \right] dr.$$

Nuevamente podemos desarrollar en serie cada uno de los términos que están entre paréntesis redondos, pues  $r/z \ll 1$ ; desarrollemos hasta tener potencias octavas de  $r$ :

$$I = \frac{4}{3} \int_0^R \frac{r^4}{z^3} \left[ \left( 1 - 3\frac{r}{z} + 6\frac{r^2}{z^2} - 10\frac{r^3}{z^3} + 15\frac{r^4}{z^4} \right) + \frac{3r}{z} \left( 1 - 5\frac{r}{z} + 15\frac{r^2}{z^2} - 35\frac{r^3}{z^3} \right) + \frac{9r^2}{z^2} \left( 1 - 7\frac{r}{z} + 28\frac{r^2}{z^2} \right) + \frac{28r^3}{z^3} \left( 1 - 9\frac{r}{z} \right) + \dots \right] dr,$$

y, reduciendo términos:

$$I = \frac{4}{3} \int_0^R \frac{r^4}{z^3} \left( 1 - 90\frac{r^4}{z^4} + \dots \right) dr$$



que se integra inmediatamente a:

$$I = \frac{4}{15} R^2 \left( \frac{R}{z} \right)^3 \left[ 1 - 50 \left( \frac{R}{z} \right)^4 \pm \dots \right]$$

de donde:

$$\vec{H}(z) = \frac{2}{15} \mu_0 \vec{w} R^2 \left( \frac{R}{z} \right)^3 \left[ 1 - 50 \left( \frac{R}{z} \right)^4 \pm \dots \right].$$

### PROBLEMA 28.-

El alambre indicado en la figura tiene una longitud  $L$  y está recorrido por una corriente  $I$ . Calcular en un punto  $P$  cualquiera situado muy lejos del alambre ( $r \gg L$ ):

- el potencial magnético vector  $\vec{A}$ ;
- el vector inducción magnética.
- A partir del resultado de b), demuestre que las líneas del campo magnético en el plano  $(xy)$  son circunferencias.

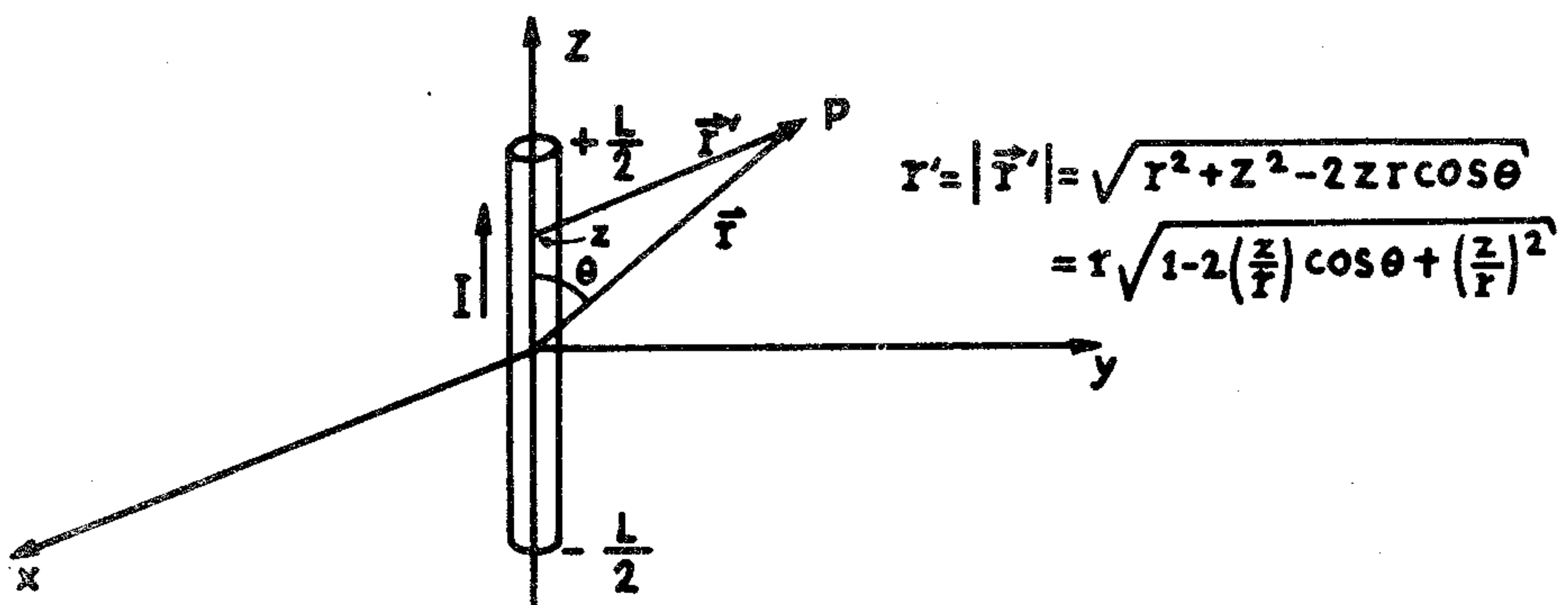


Fig. 109

### Resolución.-

- Sabemos que 
$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{r'}$$

donde  $r'$  es la distancia del punto de integración al punto de observación; la integral se realiza sobre toda la trayectoria que recorre la corriente; en nuestro caso, la corriente se mueve verticalmente desde  $z = -L/2$  hasta  $z = +L/2$ ; por lo tanto:

$$I d\vec{\ell} = I \hat{k} dz.$$

Puesto que el punto  $P$  está muy alejado de esta corriente, podemos considerar a  $r'$  como aproximadamente constante y sacarlo fuera de la integral ( $r' \approx r$ ):

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi r} \int_{-L/2}^{+L/2} dz$$

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0 IL \hat{k}}{4\pi r}$$

donde  $r$  es la distancia del punto P al origen.

Si no consideramos a  $r$  como constante, el problema se complica; se deja propuesto hacer el cálculo de  $\vec{A}$  en forma exacta y verificar que en primera aproximación se obtiene el resultado escrito más arriba.

b) El cálculo de  $\vec{B}$  puede hacerse en forma exactamente análoga:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{\ell} \times \vec{r} = dz \hat{k} \times \vec{r} = dz \hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$d\vec{\ell} \times \vec{r} = dz (x\hat{j} - y\hat{i})$$

luego:

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(x\hat{j} - y\hat{i})}{r^3} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz$$

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 IL}{4\pi} \frac{x\hat{j} - y\hat{i}}{r^3}$$

Otra forma de obtener este resultado es utilizando la definición del potencial vector  $\vec{A}$ :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

y como

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0 IL}{4\pi r} \hat{k} \equiv A_z \hat{k},$$

se tiene:

$$\vec{B} \approx \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{j};$$

la única variable que depende de  $x, y$  y  $z$  es  $\frac{1}{r}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = - \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = - \frac{x}{r^3}$$

análogamente:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{y}{r^3}$$

de donde:

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 IL}{4\pi r^3} (x\hat{j} - y\hat{i}).$$

c) La ecuación diferencial vectorial para las líneas de campo de  $\vec{B}$  es:

$$d\vec{r} \times \vec{B} = \vec{0}$$

donde  $d\vec{r} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz$ ;



efectuando el producto cruz se obtiene:

$$(dxBy - dyBx)\hat{k} + B_x dz\hat{j} - B_y dz\hat{i} = \vec{0}$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} dxBy - dyBx &= 0 \\ B_x dz &= 0 \\ B_y dz &= 0 \end{aligned} \right\} ;$$

introduciendo los valores de  $B_x$  y  $B_y$ :

$$\left. \begin{aligned} B_x &= -\frac{\mu_0 IL}{4\pi} \frac{y}{r^3} \\ B_y &= \frac{\mu_0 IL}{4\pi} \frac{x}{r^3} \end{aligned} \right\}$$

se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} x dx + y dy &= 0 \\ dz &= 0 \end{aligned} \right\} ,$$

que es la ecuación diferencial de una línea de campo; la integral es inmediata a:

$$x^2 + y^2 = \text{cte}$$

$$z = \text{cte}$$

y que, para el plano  $z = 0$ , se reduce a:

$$x^2 + y^2 = \text{cte}$$

$$z = 0$$

que es, naturalmente, una circunferencia.

### PROBLEMA 29.-

Calcule el campo magnético en todo el espacio producido por las siguientes configuraciones de corriente:

- lámina de espesor despreciable que lleva filamentos de corriente en la dirección  $z$  de modo que la corriente por unidad de dimensión transversal  $I_y$  (dirección  $y$ ) es constante (Fig. 110)
- conductor cilíndrico de radio  $R$  que lleva una corriente de densidad  $\vec{j}$  constante (Fírg. 111).
- conductor cilíndrico con hueco cilíndrico concéntrico (Fig. 112).
- cable coaxial (Fig. 113)

e) conductor cilíndrico con hueco cilíndrico excéntrico (Fig. 114)

Nota. todas las figuras excepto la número 110, representan las secciones transversales de los conductores; estos son todos infinitamente largos.

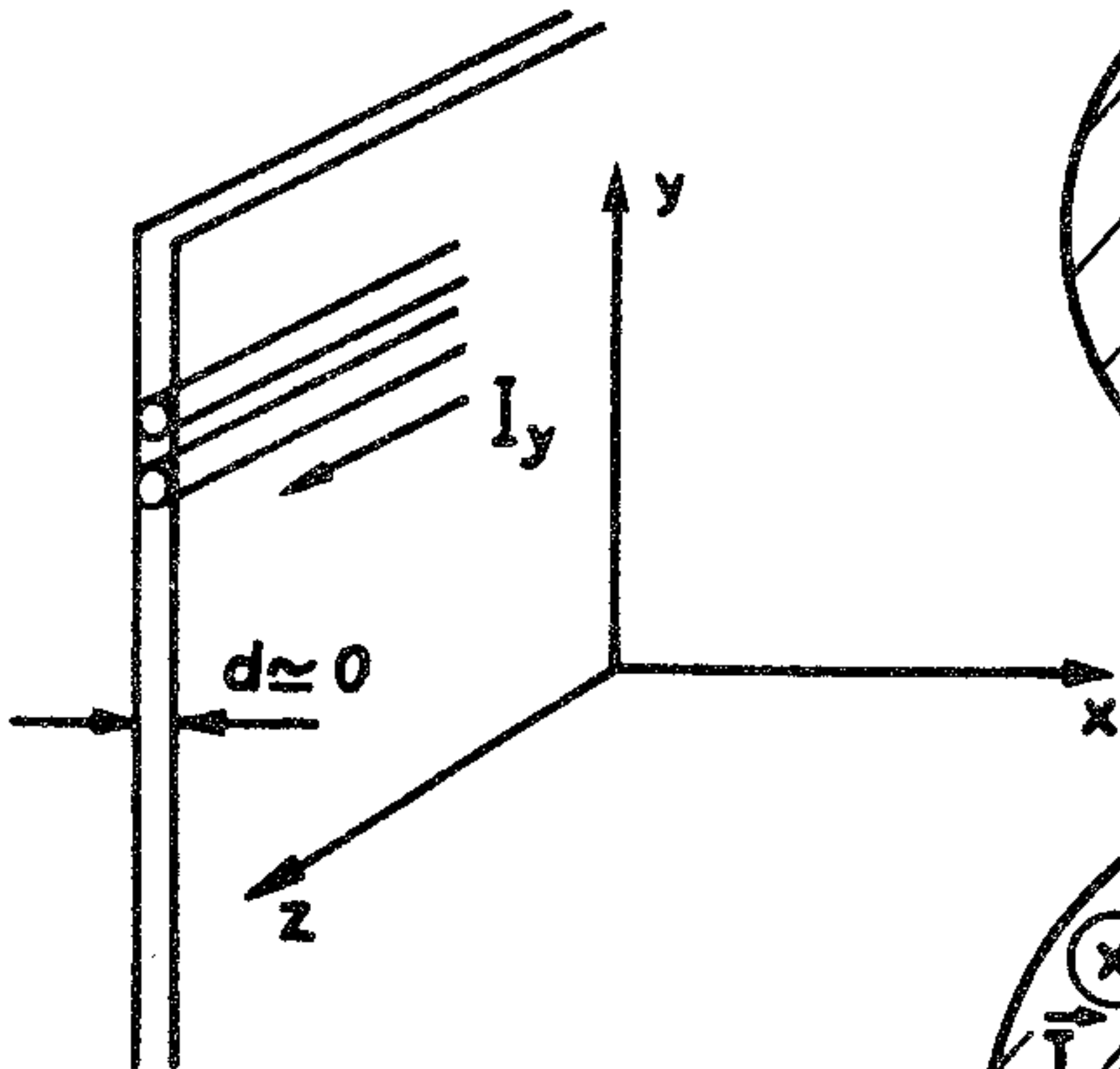


Fig. 110

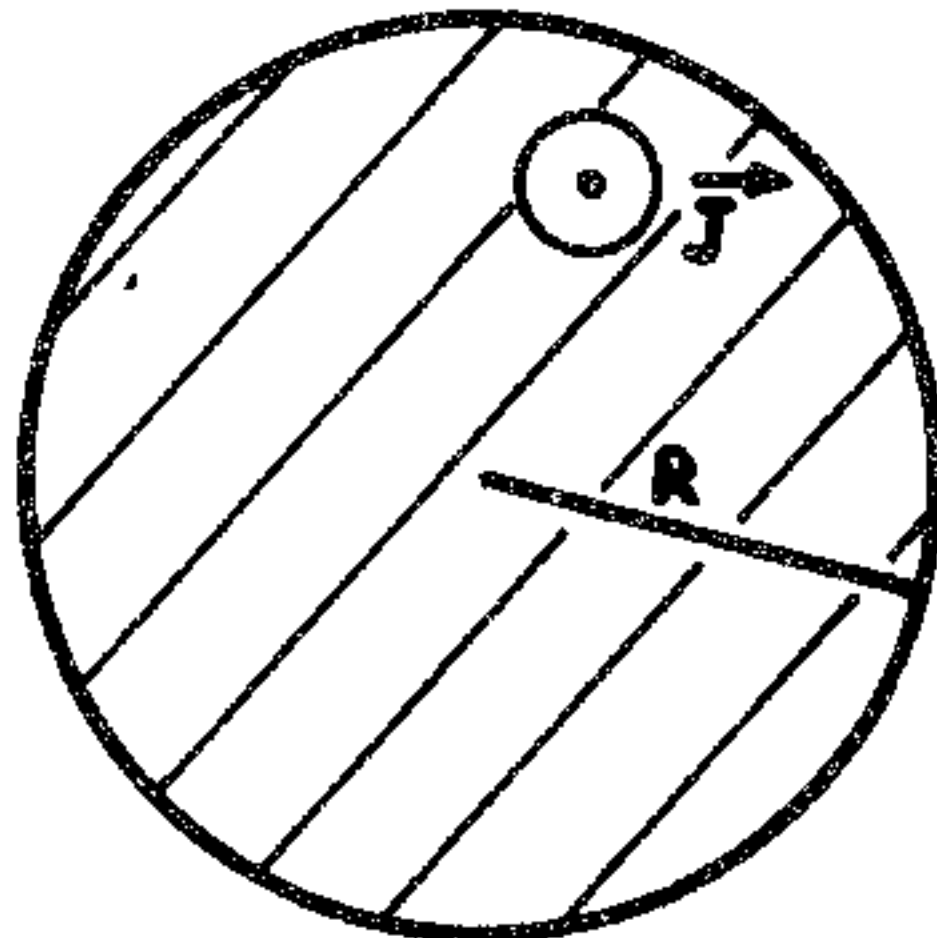


Fig. 111

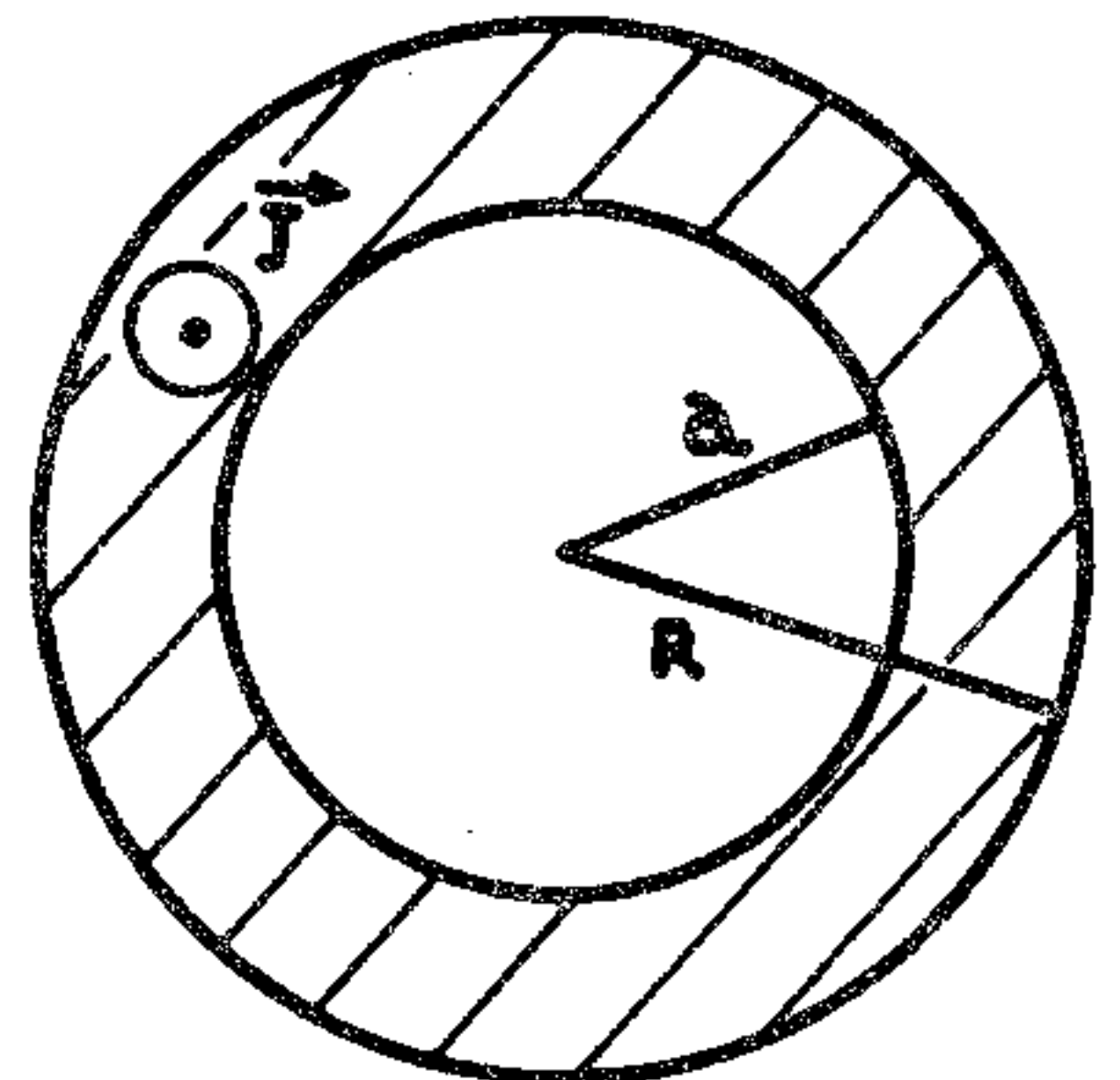


Fig. 112

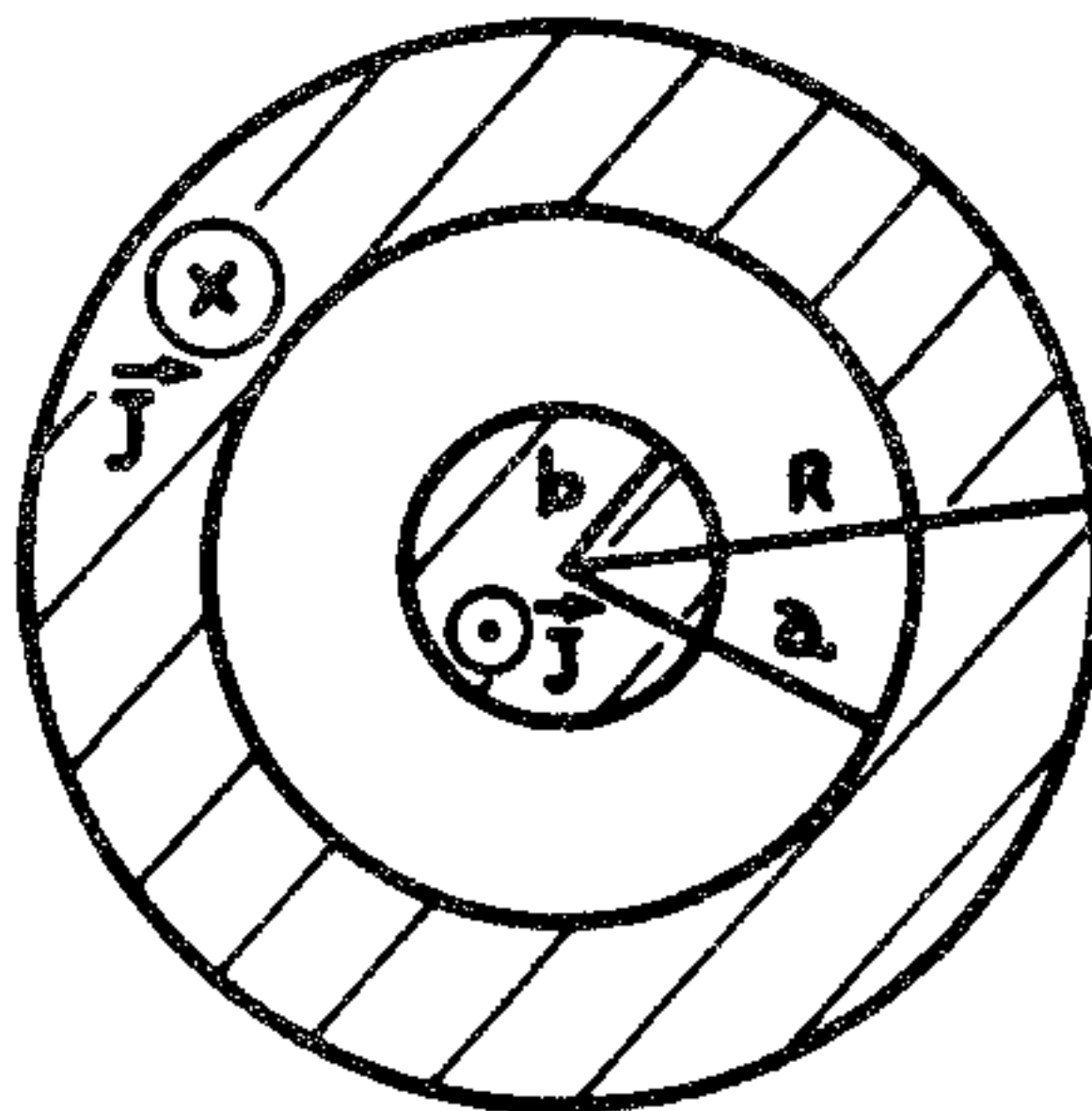


Fig. 113

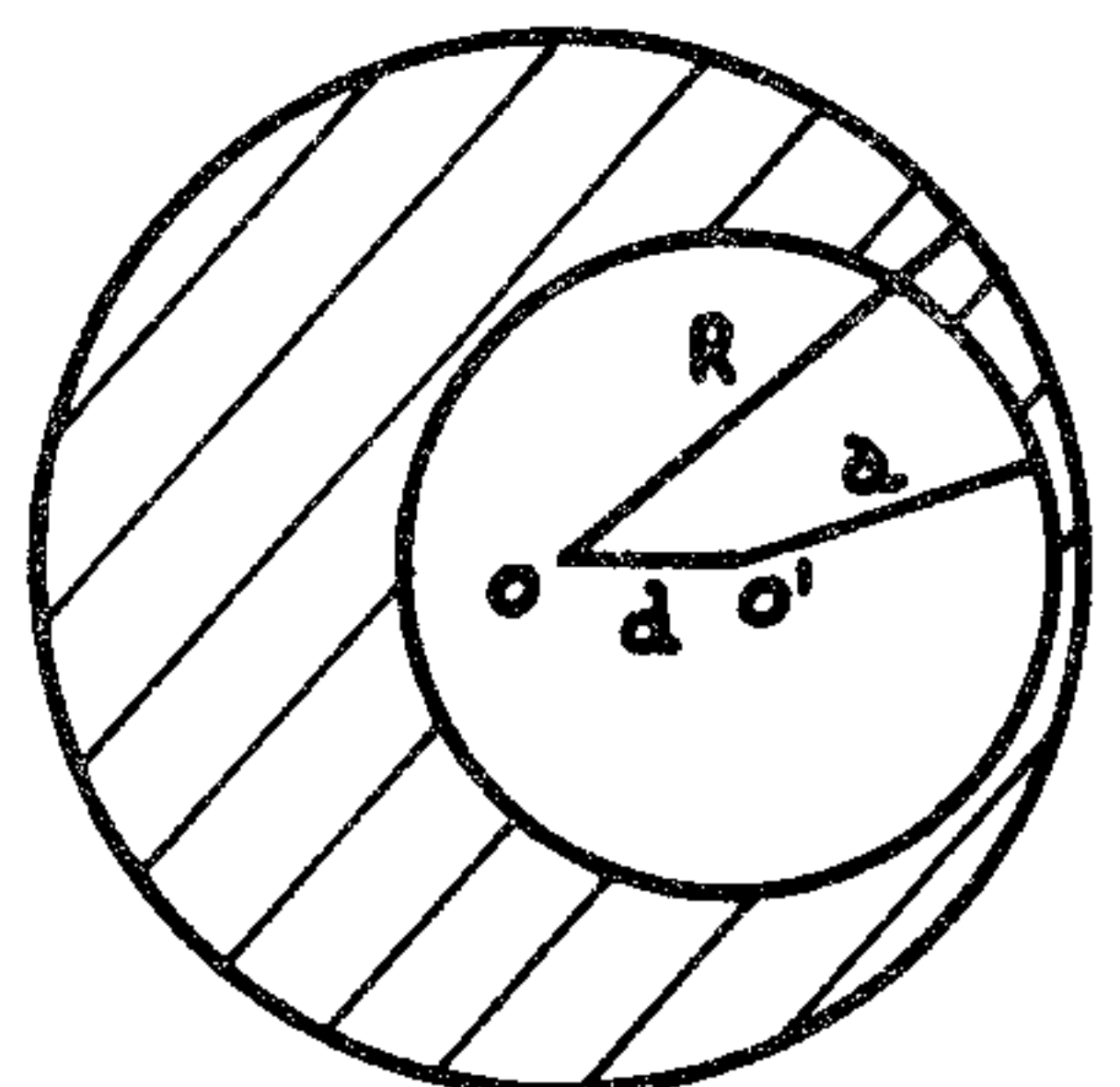


Fig. 114

### Resolución.-

Utilizaremos en todos los problemas la ley circuital de Ampère; deduzcámosla a partir de la siguiente ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Todos los problemas que tenemos que resolver son estacionarios, es decir, no hay dependencia explícita en el tiempo de ninguna de las cantidades físicas involucradas; en particular, esto es válido para el vector desplazamiento eléctrico; es decir:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\text{Luego } \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Consideremos una superficie  $S$  cualquiera no cerrada, limitada por la línea cerrada  $C$ ; en cada punto de  $S$ , está definido un elemento vectorial de superficie  $d\vec{S}$ , que escogemos en el mismo sentido en que  $\vec{J}$  atraviesa la superficie:

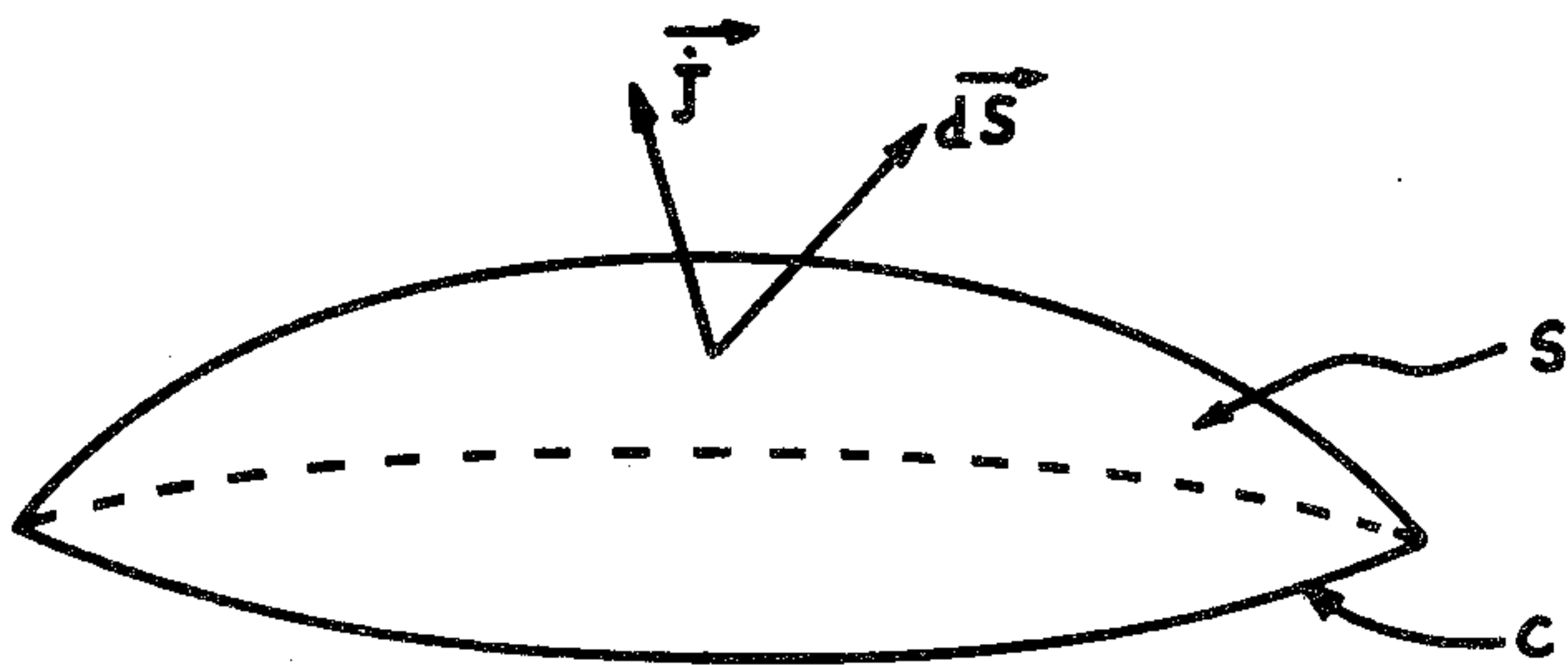


Fig. 115

Multiplicando escalarmente por  $d\vec{S}$  la ecuación de más arriba, e integrando sobre la superficie  $S$ , tenemos

$$\iint_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

El miembro izquierdo de esta ecuación es igual, de acuerdo al teorema de Stokes, a

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell},$$

mientras que el derecho es igual a la corriente total que atraviesa la superficie  $S$ ;  $d\vec{\ell}$  es un elemento vectorial de longitud de la línea  $C$ , y la integral de línea se realiza en el sentido tal que sea positiva; esto es equivalente a la "regla del tornillo derecho" para el vector  $\vec{H}$ .

a) Hagamos un esquema del problema:

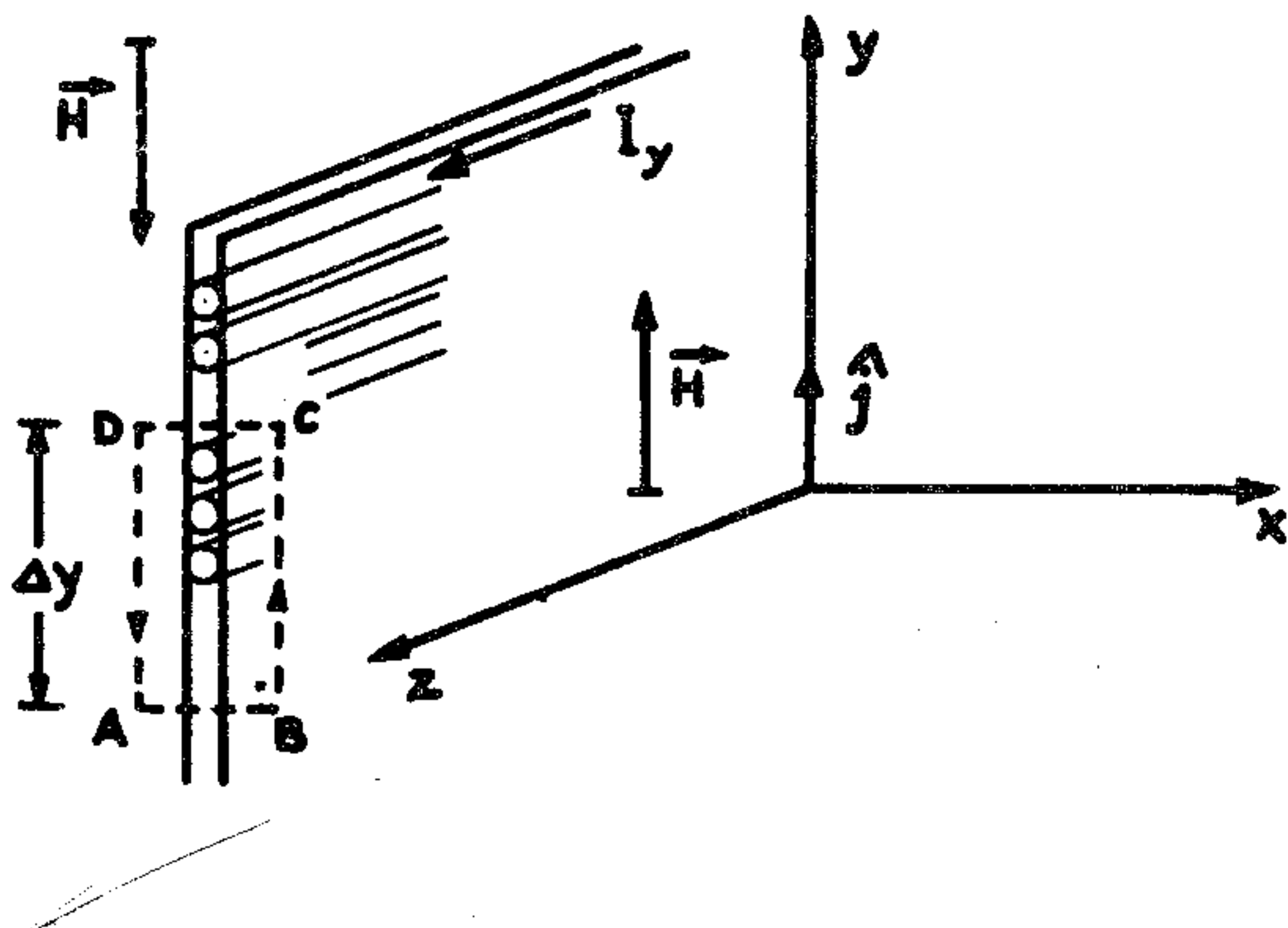


Fig. 116

Por simetría, el campo magnético a ambos lados de la lámina es el mismo, pero de sentido contrario; el vector  $\vec{H}$  es paralelo a la lámina y es perpendicular a las líneas de corriente que ésta lleva. Dada esta simetría de  $\vec{H}$ , elijamos un trayecto de integración  $C$  como el indicado en la figura;

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i = l_y \Delta y.$$

Las integrales de A a B y de C a D son iguales a cero, y las otras dos son iguales entre sí:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 2 \int_B^C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 2H \Delta y = I_y \Delta y \Rightarrow H = \frac{1}{2} I_y$$

$$\text{Luego } \vec{H} = \begin{cases} \frac{1}{2} I_y \hat{j}, & x > 0 \\ -\frac{1}{2} I_y \hat{j}, & x < 0 \end{cases}$$

b) Para este caso y todos los siguientes, dada la simetría cilíndrica, elegimos trayectos de integración que son circunferencias concéntricas con el cilindro; el esquema correspondiente es:

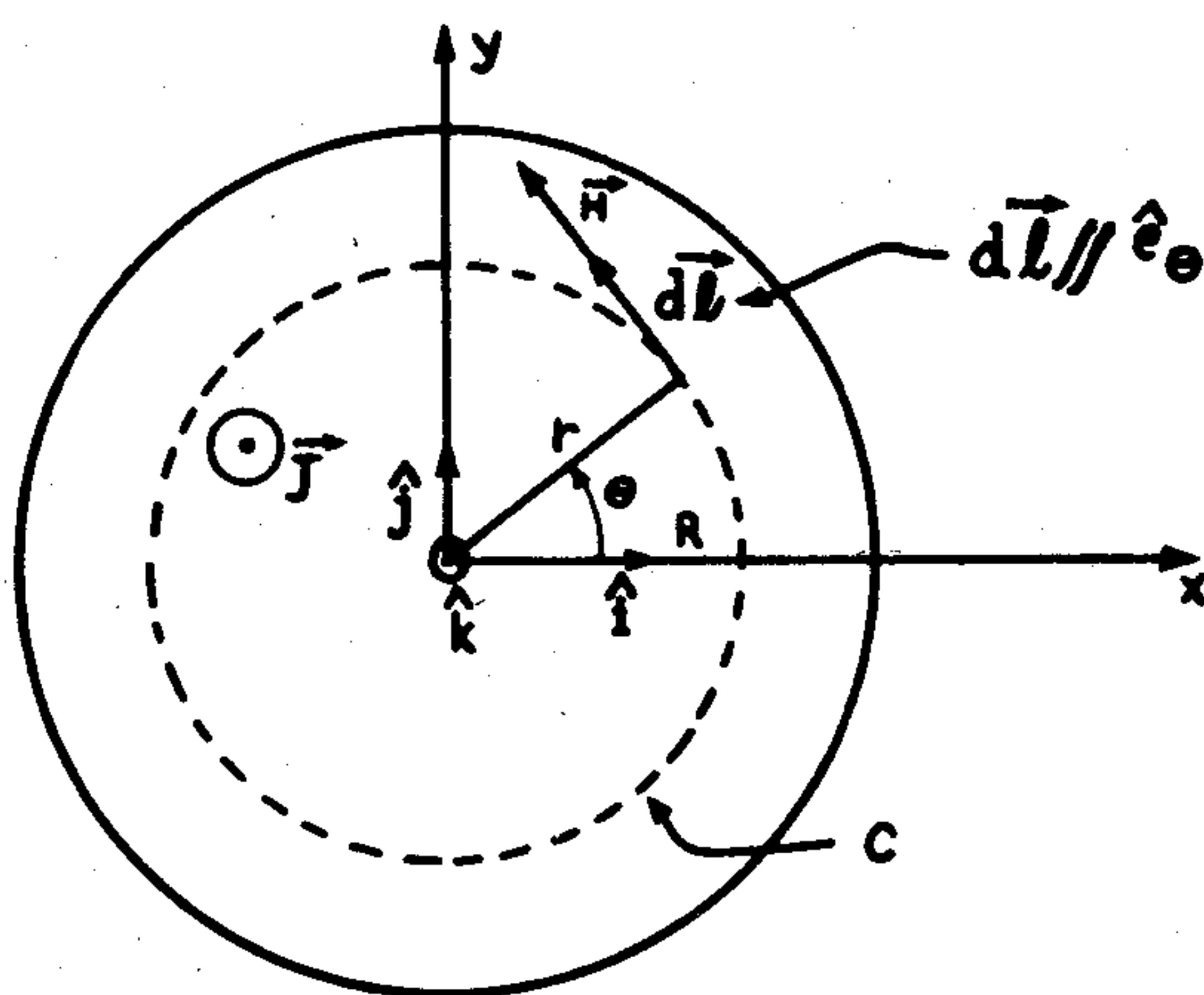


Fig. 117

para  $r \leq R$ ,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iiint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$H \cdot 2\pi r = J\pi r^2$$

$$H = \frac{Jr}{2}$$

y

$$\vec{H} = \frac{Jr}{2} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{H} = \frac{Jr}{2} (-\hat{i} \sin\theta + \hat{j} \cos\theta);$$

para  $r \geq R$ ,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iiint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$H \cdot 2\pi r = J\pi R^2$$

$$H = \frac{JR^2}{2r}$$

$$y \quad \vec{H} = \frac{JR^2}{2r} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{H} = \frac{JR^2}{2r} (-\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta)$$

c)

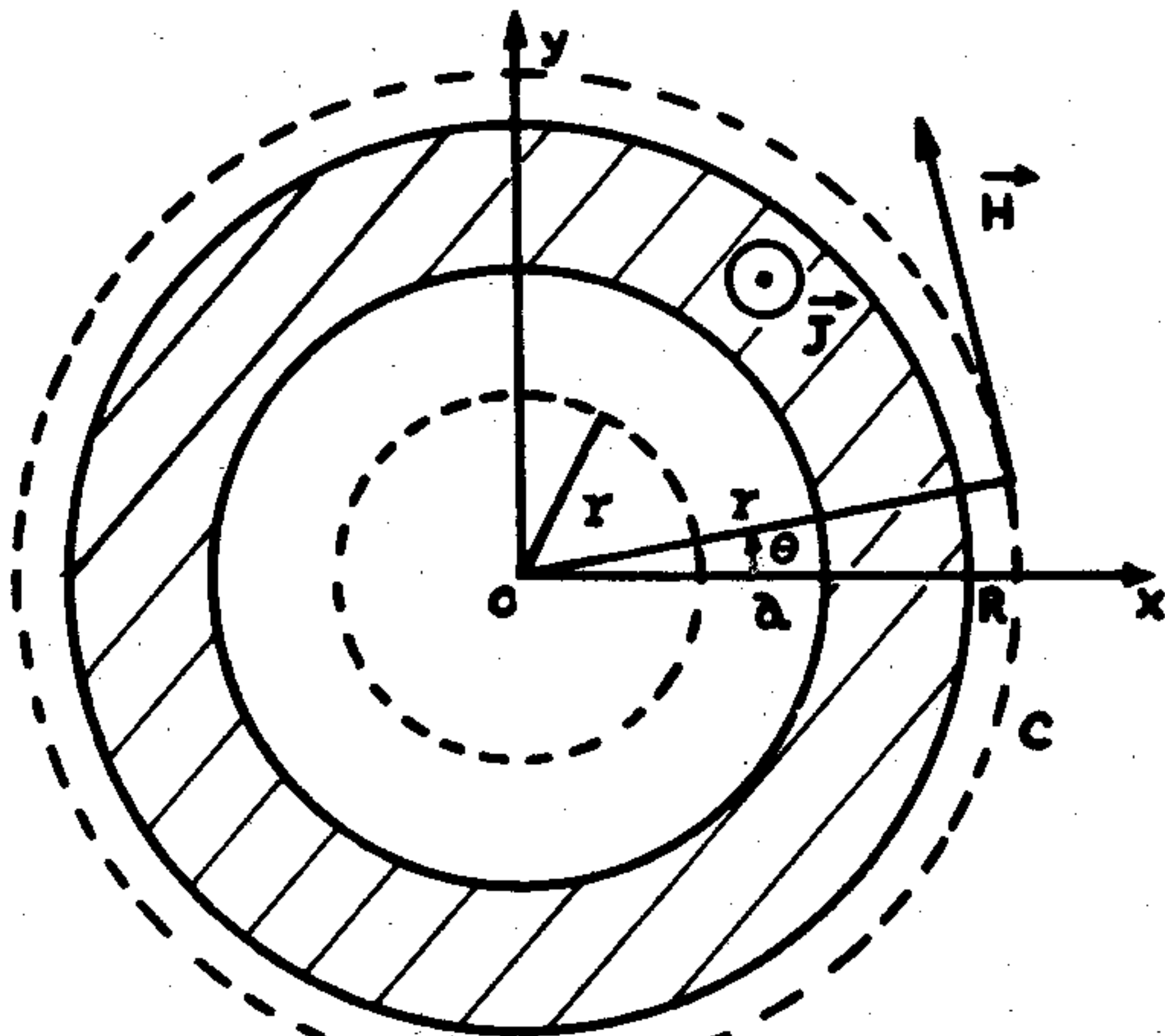


Fig. 118

Para  $0 \leq r \leq a$ .

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

luego  $\vec{H} = \vec{0}$ ;

para  $0 \leq r \leq R$ ,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

luego:

$$H \cdot 2\pi r = J\pi(r^2 - a^2)$$

$$H = \frac{J(r^2 - a^2)}{2r}$$

$$y \quad \vec{H} = \frac{J(r^2 - a^2)}{2r} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{H} = \frac{J(r^2 - a^2)}{2r} (-\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta);$$

para  $r \geq R$ :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

luego:

$$H \cdot 2\pi r = J(R^2 - a^2)\pi$$



$$H = \frac{J(R^2 - a^2)}{2r}$$

$$y \quad \vec{H} = \frac{J(R^2 - a^2)}{2r} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{H} = \frac{J(R^2 - a^2)}{2r} (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)$$

d)

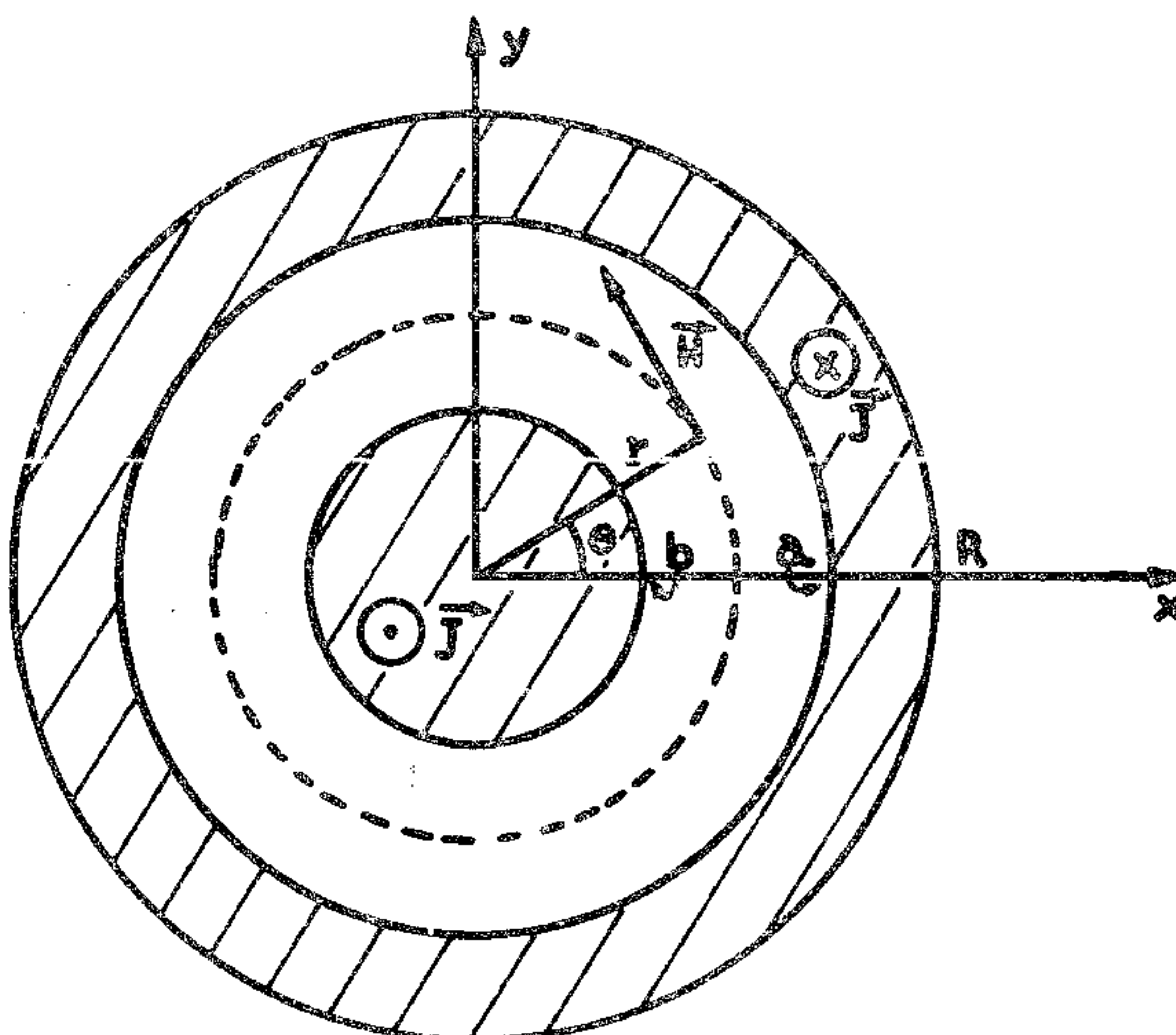


Fig. 119

Para  $0 \leq r \leq b$ ,

$$\vec{H} = \frac{Jr}{2} (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta) \quad (\text{ver parte a) del problema});$$

para  $b < r < a$ , la solución es también análoga a la de la parte a) con la única salvedad que  $b$  reemplaza a  $R$  en la expresión para  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{b^2 J}{2r} (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta);$$

para  $a \leq r \leq R$ ,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iiint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

luego:

$$H \cdot 2\pi r = \pi b^2 J - \pi(r^2 - a^2)J$$

$$H = \frac{J}{2r} (a^2 + b^2 - r^2)$$

$$\vec{H} = \frac{J}{2r} (a^2 + b^2 - r^2) \cdot (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta);$$

para  $r \geq R$ ,

$$H \cdot 2\pi r = J\pi b^2 - J\pi(R^2 - a^2)$$

$$\vec{H} = \frac{J}{2r} (a^2 + b^2 - R^2) \cdot (-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta);$$

Nótese que para  $r \gg R$ , el campo magnético en "módulo" puede ser distinto de cero, o cero; el ser negativo, sólo quiere decir que  $\vec{H}$  apunta en el sentido negativo de  $\hat{e}_\theta$ ; y para que sea cero, debe cumplirse que  $a^2 + b^2 = R^2$  (nótese que hemos supuesto que la densidad de corriente  $\vec{J}$  es la misma en ambas partes del cable coaxial); si no hacemos ninguna hipótesis sobre  $\vec{J}$ , pero suponemos que las corrientes son iguales (y de sentido contrario), el campo magnético al exterior del cable será nulo; esto es lo que sucede en la realidad en los cables coaxiales.

e) El problema puede ser bastante complicado si se intenta resolver directamente, ya que no hay simetría cilíndrica, y no es evidente ningún otro tipo de simetría; por lo tanto la ley circuital de Ampère no es factible de aplicar, ya que para que ésta nos sea útil, debemos encontrar un trayecto de integración donde:

- i) el campo magnético  $\vec{H}$  sea constantemente colineal con  $d\vec{l}$  y
- ii) el módulo  $H$  del campo magnético sea constante todo a lo largo del trayecto. Es claro que no es fácil de encontrar un trayecto así a menos que exista una fuerte simetría, como en los problemas anteriores.

Sin embargo nos salvamos gracias al principio de superposición, válido tanto para el campo magnético  $\vec{H}$  como para el campo eléctrico  $\vec{E}$ ; esto es una consecuencia inmediata de la linealidad de las ecuaciones de Maxwell.

En efecto, dado que la densidad de corriente  $\vec{J}$  es constante, el campo magnético  $\vec{H}$  será igual en todo el espacio a la suma de los campos magnéticos que producirían dos cilindros paralelos que llevan densidades de corriente  $\vec{J}$  iguales y de signo contrario; uno de estos cilindros (el mayor) tiene radio  $R$  con su centro en  $O$  y lleva corriente en el sentido positivo del eje  $OZ$ ; el otro tiene radio  $a$  con su centro en  $O'$ , y lleva corriente  $\vec{J}$  en el sentido negativo de  $OZ$ .

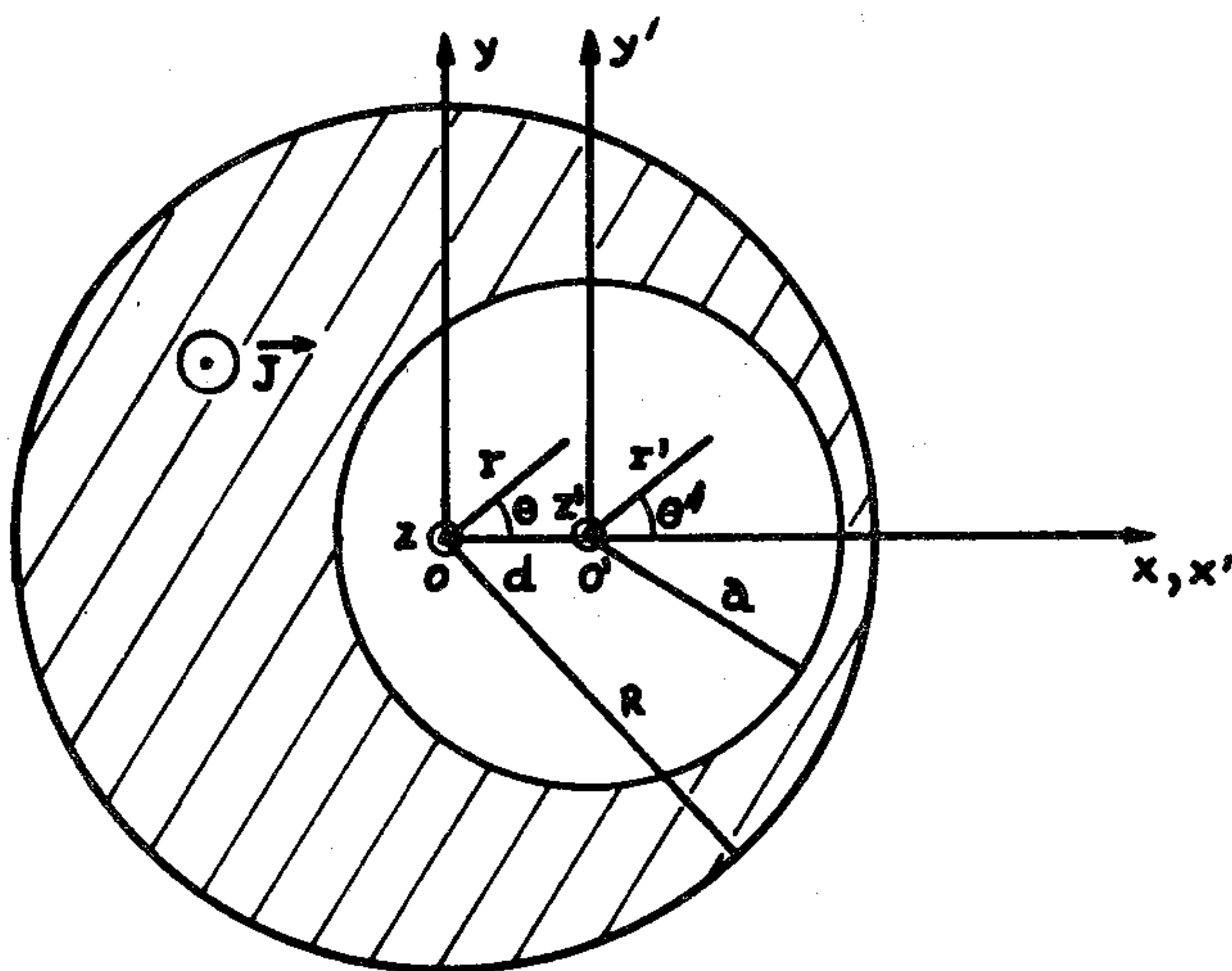


Fig. 120

Instalemos dos sistemas de coordenadas,  $(x, y, z)$  y  $(x', y', z')$  como se indica en la figura; los ejes  $x$  y  $x'$  coinciden, y los ejes  $y$  y  $y'$ , y los ejes  $z$  y  $z'$  son paralelos entre sí; los orígenes  $O$  y  $O'$  coinciden con los centros del cilindro y de la cavidad, respectivamente.



Consideremos primero el campo magnético producido por el cilindro macizo de radio  $R$  con centro  $O$ ;

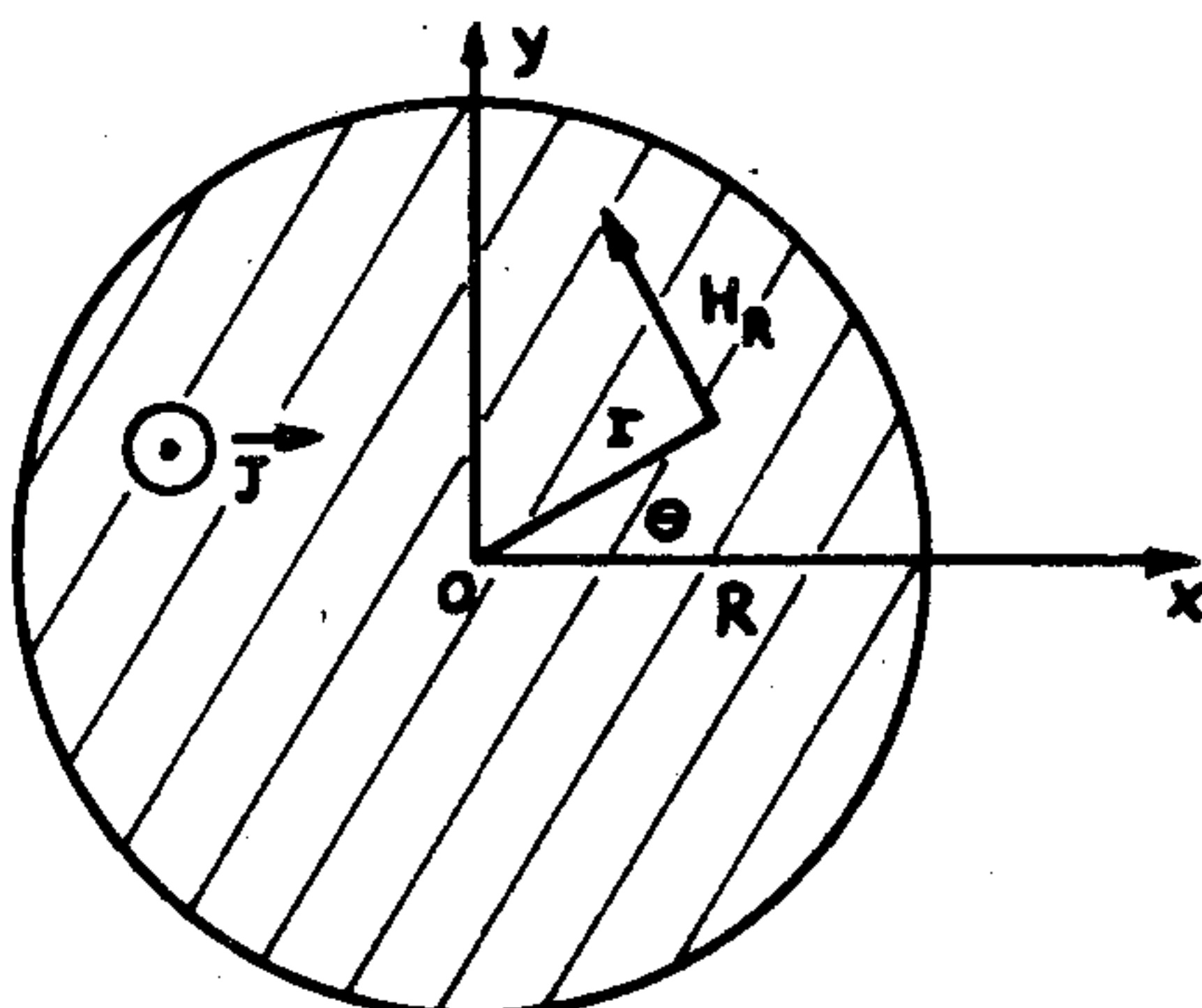


Fig. 121

En la parte b), vimos que:

$$\vec{H}_R = \begin{cases} \frac{Jr}{2} (-\hat{i} \sin\theta + \hat{j} \cos\theta), & 0 \leq r \leq R \\ \frac{JR^2}{2r} (-\hat{i} \sin\theta + \hat{j} \cos\theta), & r \geq R \end{cases}$$

pero como:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta, \end{cases}$$

se tiene:

$$\vec{H}_R = \begin{cases} \frac{J}{2} (-\hat{i} y + \hat{j} x), & 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \\ \frac{JR^2}{2(x^2 + y^2)} (-\hat{i} y + \hat{j} x), & x^2 + y^2 \gg R^2 \end{cases}$$

Para el campo magnético producido por el cilindro de radio  $a$  con centro en  $O'$  que lleva densidad de corriente  $\vec{J}$  en el sentido opuesto, tendremos:

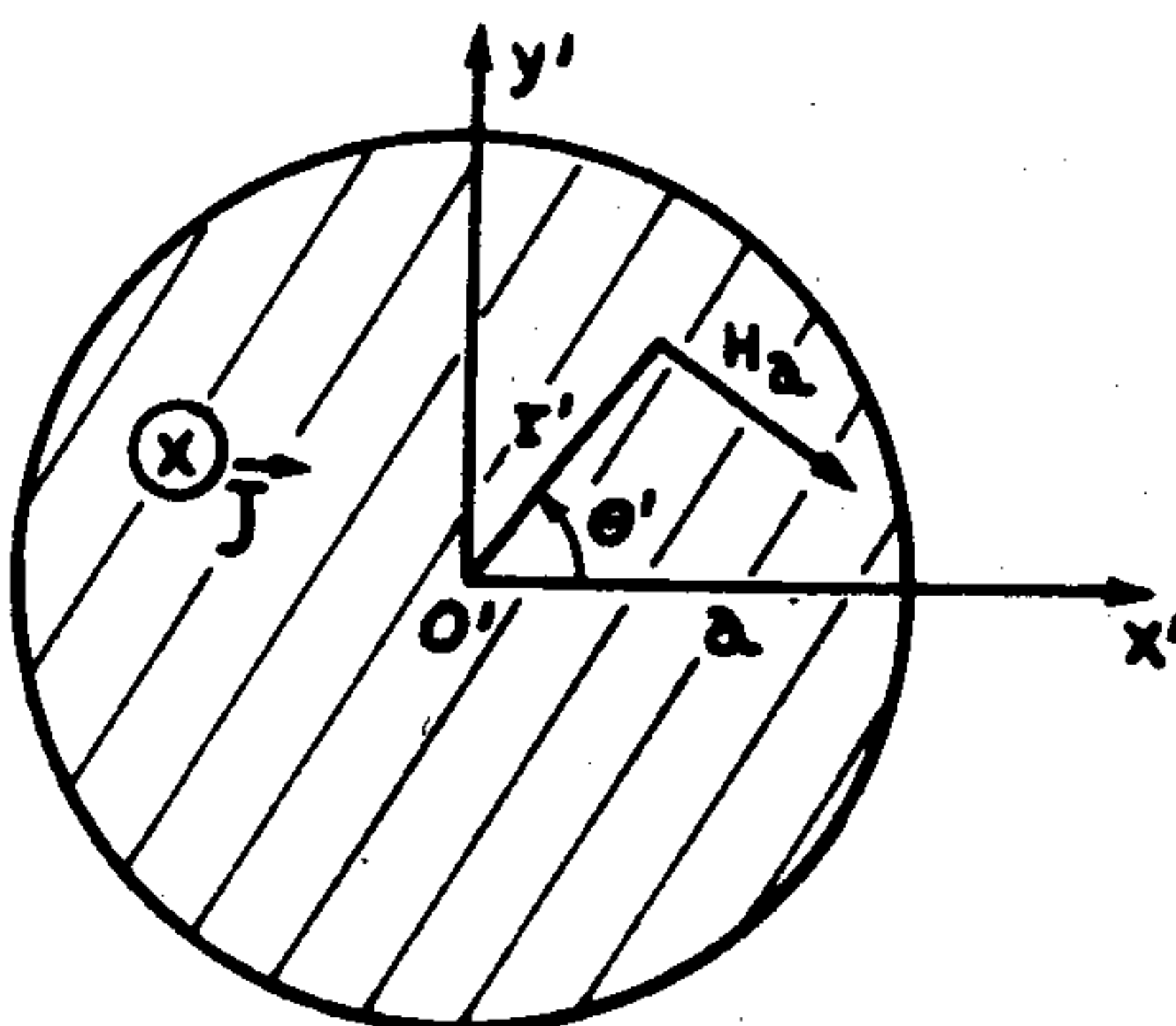


Fig. 122

Dado que ahora tenemos que  $\vec{J}$  apunta hacia adentro del papel, el campo magnético será:

$$\vec{H}_a = \begin{cases} \frac{J}{2} (\hat{i} y' - \hat{j} x') & , 0 \leq x'^2 + y'^2 \leq a^2 \\ \frac{Ja^2}{2(x'^2 + y'^2)} (\hat{i} y' - \hat{j} x') & , x'^2 + y'^2 > a^2 \end{cases}$$

El campo magnético total será:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_R(\vec{r}) + \vec{H}_a(\vec{r}).$$

Es conveniente primero escribir  $\vec{H}_R$  y  $\vec{H}_a$  referidos a un mismo sistema de referencia; escogemos el sistema (0xyz); el cambio de coordenadas con respecto al sistema (0'x'y'z') es:

$$\begin{cases} y' = y \\ x' = x - d \\ z' = z \end{cases}$$

Dividimos el espacio en tres regiones: la cavidad cilíndrica interna, la región que lleva la corriente, y el exterior;

i) para la cavidad cilíndrica, es decir, para

$$y^2 + (x - d)^2 \leq a^2$$

tenemos:

$$\vec{H} = \frac{J}{2} (-\hat{i} y + \hat{j} x) + \frac{J}{2} (\hat{i} y' - \hat{j} x')$$

y refiriendo todo al sistema que escogimos, se tiene:

$$\vec{H} = \frac{Jd}{2} \hat{j}$$

ii) para la región que lleva corriente, es decir, para:

$$\begin{cases} y^2 + (x - d)^2 > a^2 \\ x^2 + y^2 \leq R^2, \end{cases}$$

se tiene:

$$\vec{H} = \frac{Ja^2}{2} \cdot \frac{\hat{i}y' - \hat{j}x'}{x'^2 + y'^2} + \frac{J}{2} (-\hat{i}y + \hat{j}x),$$

y por lo tanto:

$$\vec{H} = \frac{J}{2} \left[ \hat{i} \left( \frac{a^2 y}{(x - d)^2 + y^2} - y \right) + \hat{j} \left( x - \frac{a^2 (x - d)}{(x - d)^2 + y^2} \right) \right]$$

iii) para la región exterior, es decir, para

$$x^2 + y^2 \gg R^2,$$

se tiene:

$$\vec{H} = \frac{Ja^2}{2} \frac{\hat{i}y' - \hat{j}x'}{x'^2 + y'^2} + \frac{JR^2}{2} \frac{-\hat{i}y + \hat{j}x}{x^2 + y^2},$$

o sea:

$$\vec{H} = \frac{J}{2} \left[ \hat{i} \left( \frac{a^2 y}{(x-d)^2 + y^2} - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right) + \hat{j} \left( \frac{xR^2}{x^2 + y^2} - \frac{a^2 (x-d)}{(x-d)^2 + y^2} \right) \right]$$

Todas las expresiones para  $\vec{H}$  que hemos calculado pueden escribirse en coordenadas polares si se desea, pero esto no trae una mayor simplificación.

### PROBLEMA 30.-

Un electrón se mueve en un campo eléctrico que depende del tiempo (pero es uniforme en todo el espacio para un instante dado), de la forma  $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$ , en que  $|\vec{E}_0| = 10^4$  volt/m y la frecuencia de la oscilación es  $\nu = \omega/2\pi = 100$  megaciclos por segundo.

Calcular la amplitud del movimiento armónico simple del electrón y su energía expresada en electrón-volt si la velocidad inicial del electrón es  $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t=0) = e\vec{E}_0/m\omega$ .

### Resolución.-

Supongamos que en el instante inicial  $t=0$ , el electrón pase por la posición  $\vec{r} = \vec{0}$  con velocidad  $\vec{v}_0$ ; la ecuación diferencial para el movimiento es:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} \\ \text{o sea:} \quad -e\vec{E} &= m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{-e\vec{E}_0}{m} \sin \omega t, \end{aligned}$$

que se integra de inmediato una vez para darnos:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = + \frac{e\vec{E}_0}{m\omega} \cos \omega t + \vec{K}$$

donde  $\vec{K}$  es una constante de integración que se determina por la condición inicial

$$\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t=0) = \frac{e\vec{E}_0}{m\omega} = \frac{e\vec{E}_0}{m\omega} + \vec{K},$$

de donde

$$\vec{K} = \vec{0}.$$

La ecuación diferencial puede integrarse otra vez para darnos:

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2} \text{sen}\omega t + \vec{C}$$

donde  $\vec{C}$  es una constante de integración que se determina por la condición inicial:

$$\vec{r}(t = 0) = \vec{0}$$

$$\text{Luego } \vec{C} = \vec{0}.$$

La ecuación del movimiento es, finalmente:

$$\vec{r} = \frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2} \text{sen}\omega t.$$

La amplitud de este movimiento armónico simple es:

$$A = \left| \frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2} \right|$$

e introduciendo los valores numéricos:

$$\frac{e}{m} = 1,8 \times 10^{11} \left[ \frac{\text{Coul}}{\text{kg}} \right]$$

$$E_0 = 10^4 \left[ \frac{\text{Volt}}{\text{m}} \right]$$

$$\omega = 2\pi \cdot 10^8 \left[ \text{seg}^{-1} \right]$$

se tiene:

$$A \approx 4,55 \text{ [mm]}.$$

La energía de este m.a.s. es igual a:

$$E = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2.$$

De la expresión para la velocidad, tenemos que la velocidad máxima es:

$$v_{\text{máx.}} = \left| \frac{e\vec{E}_0}{m\omega} \right|,$$

de modo que la energía es:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \frac{e^2 E_0^2}{m^2 \omega^2}$$

y sustituyendo los valores numéricos se llega a:

$$E \approx 2,28 \text{ [eV]}.$$

Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  se mueve en campos eléctrico y magnético estáticos, es decir, que no dependen del tiempo (pero no son necesariamente uniformes en todo el espacio); la partícula parte del reposo.

Demostrar que la trayectoria geométrica que describe la partícula no se altera cuando se hacen las siguientes transformaciones simultáneamente:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}' = \frac{\vec{E}}{k}$$

$$\vec{B} \rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$$

$$m \rightarrow m' = km$$

$$q \rightarrow q' = q$$

donde  $k$  es una constante (la partícula parte siempre del reposo y desde el mismo punto).

### Resolución.-

La ecuación diferencial para el movimiento primitivo es:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \left( \vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right)$$

y después que se hacen los cambios es:

$$m' \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q' \left( \vec{E}' + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}' \right)$$

Sustituyendo las cantidades con prima en función de las antiguas, se tiene:

$$km \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \left( \frac{\vec{E}}{k} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right).$$

Si se define la transformación de la escala de tiempo siguiente:

$$t' = kt,$$

entonces:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} \quad \frac{dt'}{dt} = k \frac{d}{dt'}$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2} = k^2 \frac{d^2}{dt'^2}$$

con lo cual la ecuación diferencial queda:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt'^2} = q \left( \vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt'} \times \vec{B} \right),$$

que es la misma que teníamos antes de hacer las transformaciones; además,



puesto que la partícula parte del reposo en ambos casos, tenemos las mismas condiciones iniciales, y por lo tanto las trayectorias geométricas descritas por la partícula son las mismas; sin embargo, hemos cambiado la escala de tiempos, es decir, la partícula se moverá más rápida o más lentamente que antes, según que el valor de  $k$  sea menor o mayor que la unidad, respectivamente; esto puede verse claro si pensamos que

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}}{dt'} = \frac{1}{k} \vec{v}$$

La hipótesis de que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son estáticos la hemos utilizado implícitamente; en efecto, si los campos dependieran explícitamente del tiempo, al efectuar un cambio de escala en éste último, cambiaríamos inevitablemente la forma funcional de los campos como funciones de la posición y del tiempo; la ecuación diferencial que obtendríamos sería distinta a la primitiva.

Otra forma, quizás más clara, de resolver el problema es utilizando el formalismo lagrangiano de la mecánica analítica para partículas cargadas.

Sabemos que el lagrangiano para una partícula cargada que se mueve en un campo electromagnético es:

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q (\phi - \vec{A} \cdot \vec{v})$$

donde  $\phi$  y  $\vec{A}$  se definen por:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}. \end{aligned}$$

En nuestro caso, los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  no dependen explícitamente del tiempo, de modo que podemos suponer que los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  tampoco dependen del tiempo; en consecuencia,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}. \end{aligned}$$

Al hacer las transformaciones

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{E}' = \frac{1}{k} \vec{E} \\ \vec{B} &\rightarrow \vec{B}' = \vec{B}, \end{aligned}$$

los potenciales también transforman:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \frac{1}{k} \phi \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A}. \end{aligned}$$

El lagrangiano, después de la transformación es:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2} m' \vec{v}'^2 - q' (\phi' - \vec{A}' \cdot \vec{v}') \\ L' &= \frac{1}{2} m k \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - q \left( \frac{1}{k} \phi - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \end{aligned}$$

y multiplicando por  $k$ ,

$$kL' = \frac{1}{2} m k^2 \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - q(\phi - k \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{A})$$

y haciendo el cambio de escala en el tiempo:

$$t' = kt,$$

se tiene:

$$kL' = \frac{1}{2} m \left( \frac{d\vec{r}}{dt'} \right)^2 - q(\phi - \frac{d\vec{r}}{dt'} \cdot \vec{A}).$$

Este lagrangiano difiere del anterior en una constante multiplicativa, y por lo tanto da origen a las mismas ecuaciones de movimiento, aunque expresada en términos de  $t'$  en vez de  $t$ . Esto quiere decir que la partícula recorre la misma trayectoria anterior, pero a una velocidad distinta.

### PROBLEMA 32.-

Un haz de electrones de energía cinética  $\mathcal{E}$  entra a una región del espacio en que existe un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  perpendicular a la velocidad  $\vec{v}$  de los electrones, como se indica en la figura 123.

¿Cuál es el radio de la trayectoria de los electrones en el campo magnético? ¿En qué dirección salen los electrones después de pasar por el campo magnético, con respecto a la dirección incidente? ¿Cuál es la condición para que los electrones atraviesen el campo magnético, es decir, para que no se devuelvan en la dirección en que vinieron?

Suponga ahora que el campo magnético ocupa una región como la que se indica en la Fig. 124. ¿Cuál es la condición para que los electrones no se devuelvan en la dirección incidente? Calcule el ángulo que el electrón forma después de salir del campo magnético con la dirección incidente.

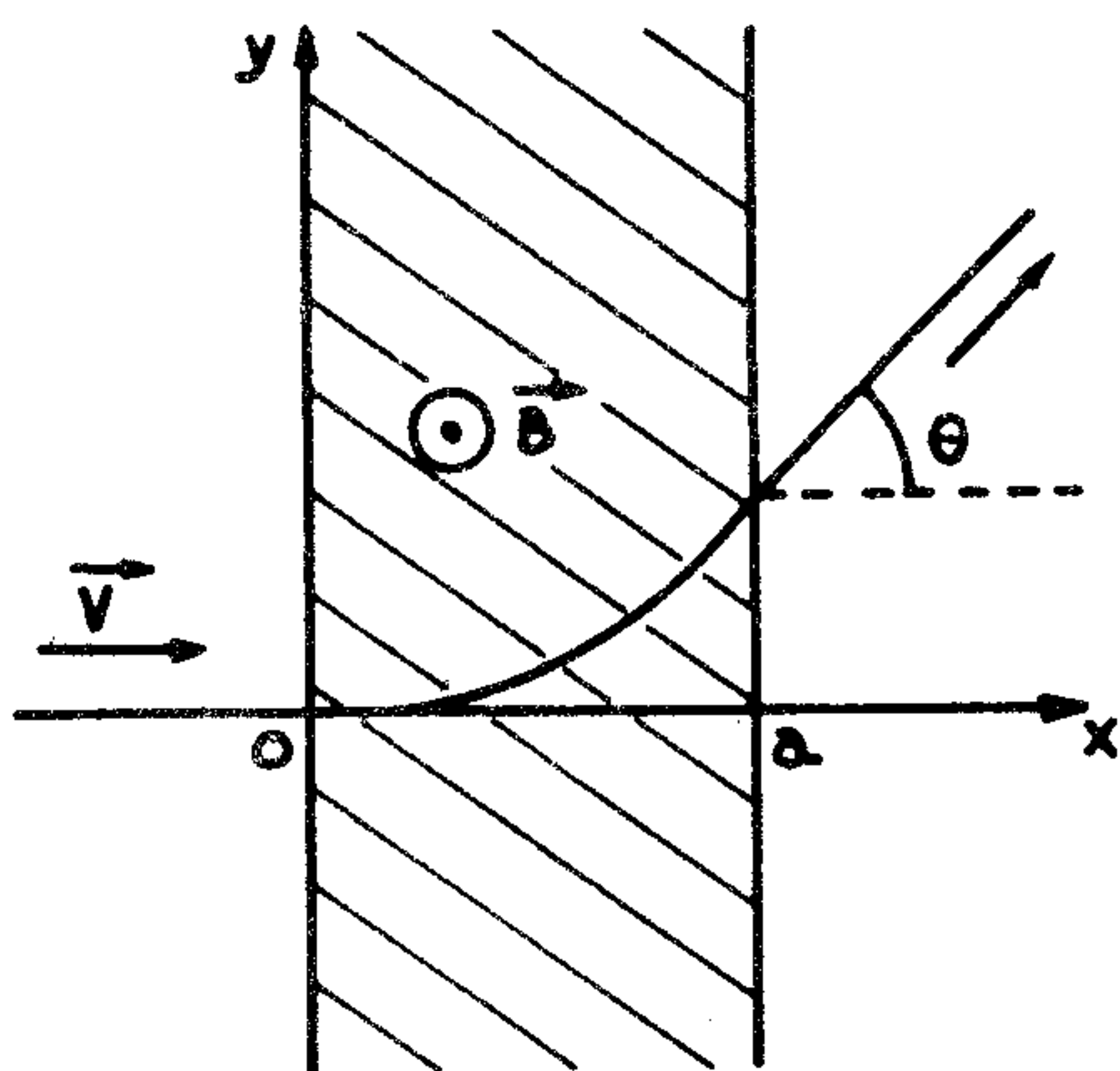


Fig. 123

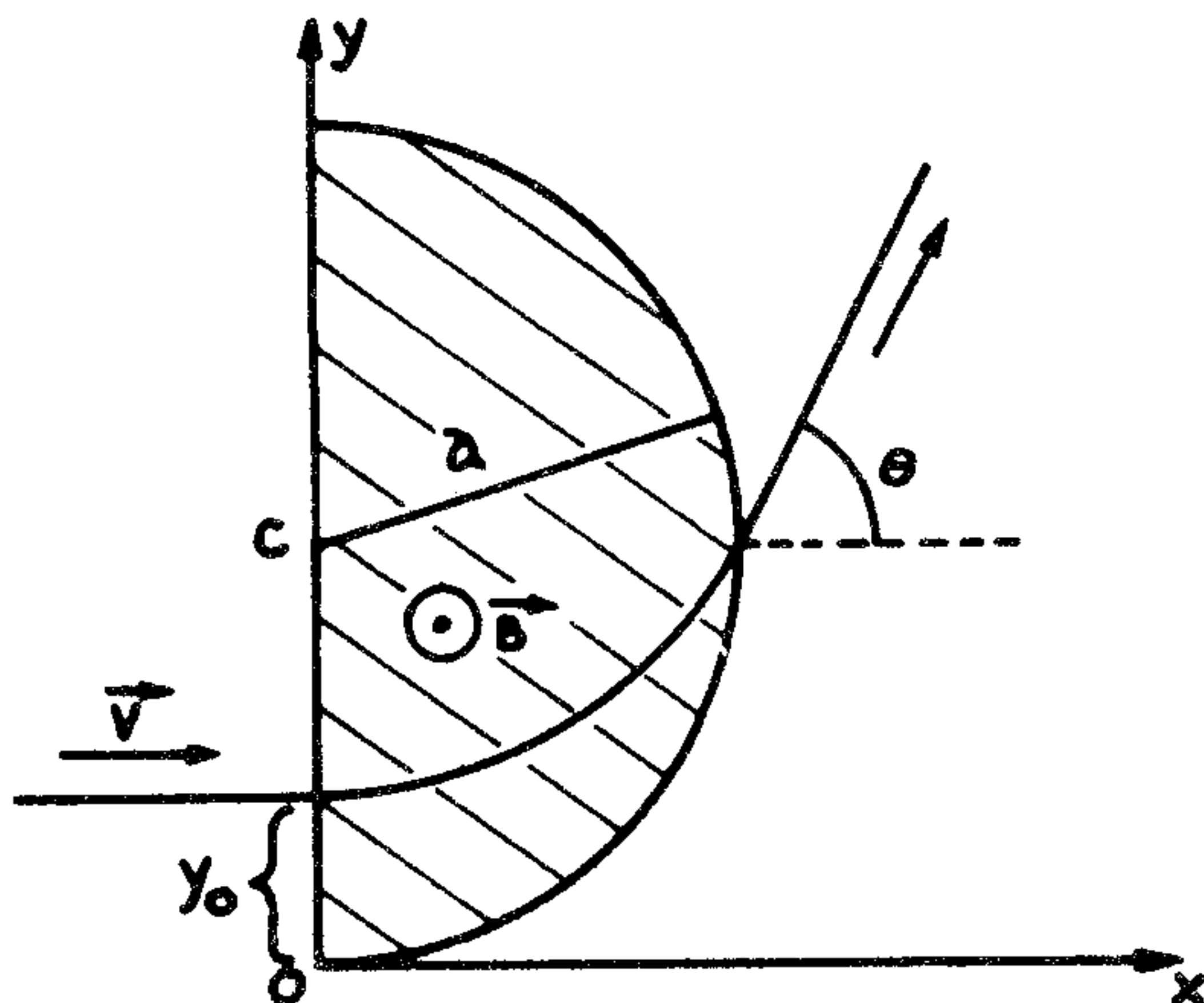


Fig. 124

### Resolución.-

La trayectoria que el electrón describe en el campo magnético es un arco de circunferencia, y lo describe con rapidez constante. Esto puede de-



mostrarse a partir de la ecuación diferencial del movimiento y de las condiciones iniciales del problema; si tomamos  $t = 0$  el instante en que el electrón entra al campo magnético, entonces:

$$\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t = 0) = v \hat{i}$$

$$\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(t = 0) = \vec{0}$$

La ecuación diferencial es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B} \equiv -e \vec{v} \times \vec{B}$$

donde  $-e$  es la carga del electrón ( $e > 0$ ); multipliquemos escalarmente por  $\vec{v}$  la ecuación diferencial:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = -e \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{v} = 0$$

luego:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{v}^2 = 0$$

$$\vec{v}^2 = \text{cte.}$$

$$|\vec{v}| = \text{cte.}$$

Esto quiere decir que la energía cinética del electrón no cambia en toda su trayectoria.

Si multiplicamos escalarmente por  $\vec{B}$  la ecuación diferencial, obtenemos:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} = -e \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{B} = 0$$

o sea:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} = 0.$$

Esta última ecuación, junto con  $|\vec{v}| = \text{constante}$ , constituye la ecuación diferencial más general para una hélice cilíndrica. Para ver esto más explícitamente, tratemos de integrar la ecuación diferencial; por simplicidad, suponemos que  $\vec{B} = B\hat{k}$ , puesto que el campo magnético es uniforme en todo el espacio.

Entonces:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} = 0$$

o sea:

$$\frac{dv_z}{dt} B = 0$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0$$

$$v_z = A$$

pero en  $t = 0$ ,  $v_z = 0$ ; luego  $A = 0$ , entonces:

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$z = C$$

pero en  $t=0$ ,  $z=0$ , luego  $C=0$ . La ecuación  $z=0$  que hemos obtenido nos dice que el movimiento del electrón dentro del campo magnético se realiza sobre el plano  $z = 0$ ; por lo tanto todo el movimiento se realiza sobre este plano. Calculemos  $x$  e  $y$  en función del tiempo, directamente a partir de la ecuación diferencial:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{eB}{m} \vec{v} \times \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{eB}{m} (\hat{i}v_y - \hat{j}v_x)$$

o sea:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = - \frac{eB}{m} v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{eB}{m} v_x \end{cases}$$

derivando con respecto al tiempo, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{d^2v_x}{dt^2} = - \frac{eB}{m} \frac{dv_y}{dt} = - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x \\ \frac{d^2v_y}{dt^2} = \frac{eB}{m} \frac{dv_x}{dt} = - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_y \end{cases}$$

que son ecuaciones diferenciales armónicas para  $v_x$  y  $v_y$ ; es decir:

$$\begin{cases} \frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0 \\ \frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \end{cases} \quad \omega = \frac{eB}{m};$$

estas ecuaciones se integran de inmediato a:

$$\begin{cases} v_x = A_x \cos(\omega t + \phi_x) \\ v_y = A_y \cos(\omega t + \phi_y) \end{cases}$$

donde  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $\phi_x$  y  $\phi_y$  son constantes de integración; de aquí:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_x \cos(\omega t + \phi_x) \\ \frac{dy}{dt} = A_y \cos(\omega t + \phi_y) \end{cases}$$

que se integran a:

$$\begin{cases} x = \frac{A_x}{\omega} \sin(\omega t + \phi_x) + x_0 \\ y = \frac{A_y}{\omega} \sin(\omega t + \phi_y) + y_0 \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia.

Volvamos al problema de los electrones que atraviesan el campo magnético; supongamos que el radio de la circunferencia que describen sea  $R$ :

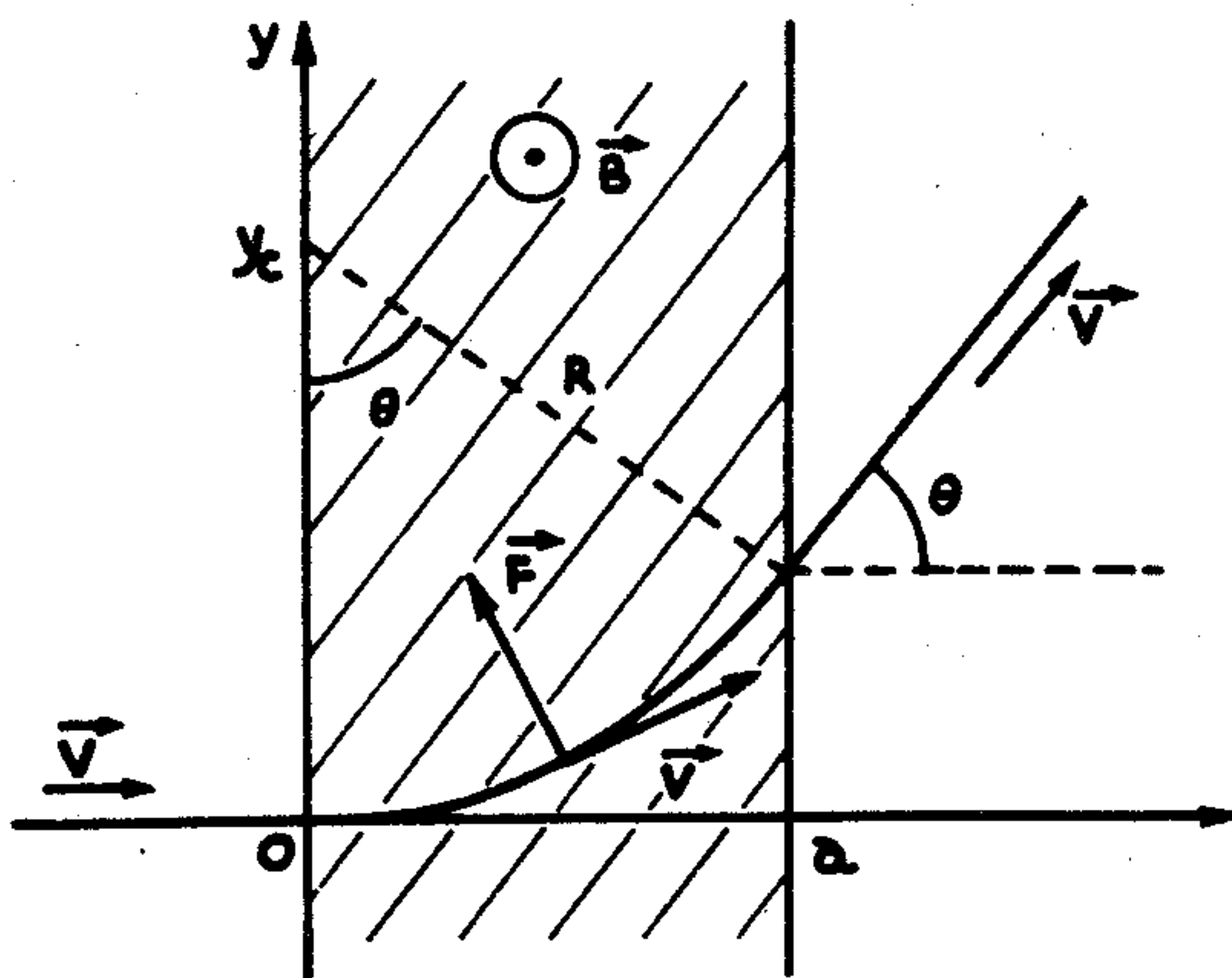


Fig. 123a

$$F = evB = m\omega^2 R$$

pero  $v = \omega R$

luego  $R = \frac{mv}{eB}$

pero  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2$

$$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}$$

luego  $R = \frac{\sqrt{2\mathcal{E}m}}{eB}$

El ángulo  $\theta$  se determina por simple geometría:

$$\sin \theta = \frac{a}{R}$$

$$\sin \theta = \frac{aeB}{\sqrt{2m\mathcal{E}}}$$

Si los electrones tienen velocidad suficientemente baja, recorrerán una semicircunferencia dentro del campo magnético, y saldrá hacia "atrás" con velocidad  $\vec{v} = -v\hat{i}$ ; la condición para que esto no ocurra es que:

$$R > a$$

o, equivalentemente:  $\frac{\sqrt{2m\epsilon}}{eB} > a$

o sea:  $\epsilon > \frac{a^2 e^2 B^2}{2m}$

o bien:  $v > \frac{aeB}{m}$ .

De la expresión para el ángulo  $\theta$  que forman los electrones al salir del campo magnético con la dirección incidente, se ve que mientras mayor sea la energía cinética, menor es el valor de dicho ángulo; es decir, mientras más rápido vayan, menos "sienten" el efecto del campo magnético.

Consideremos ahora el otro campo magnético;

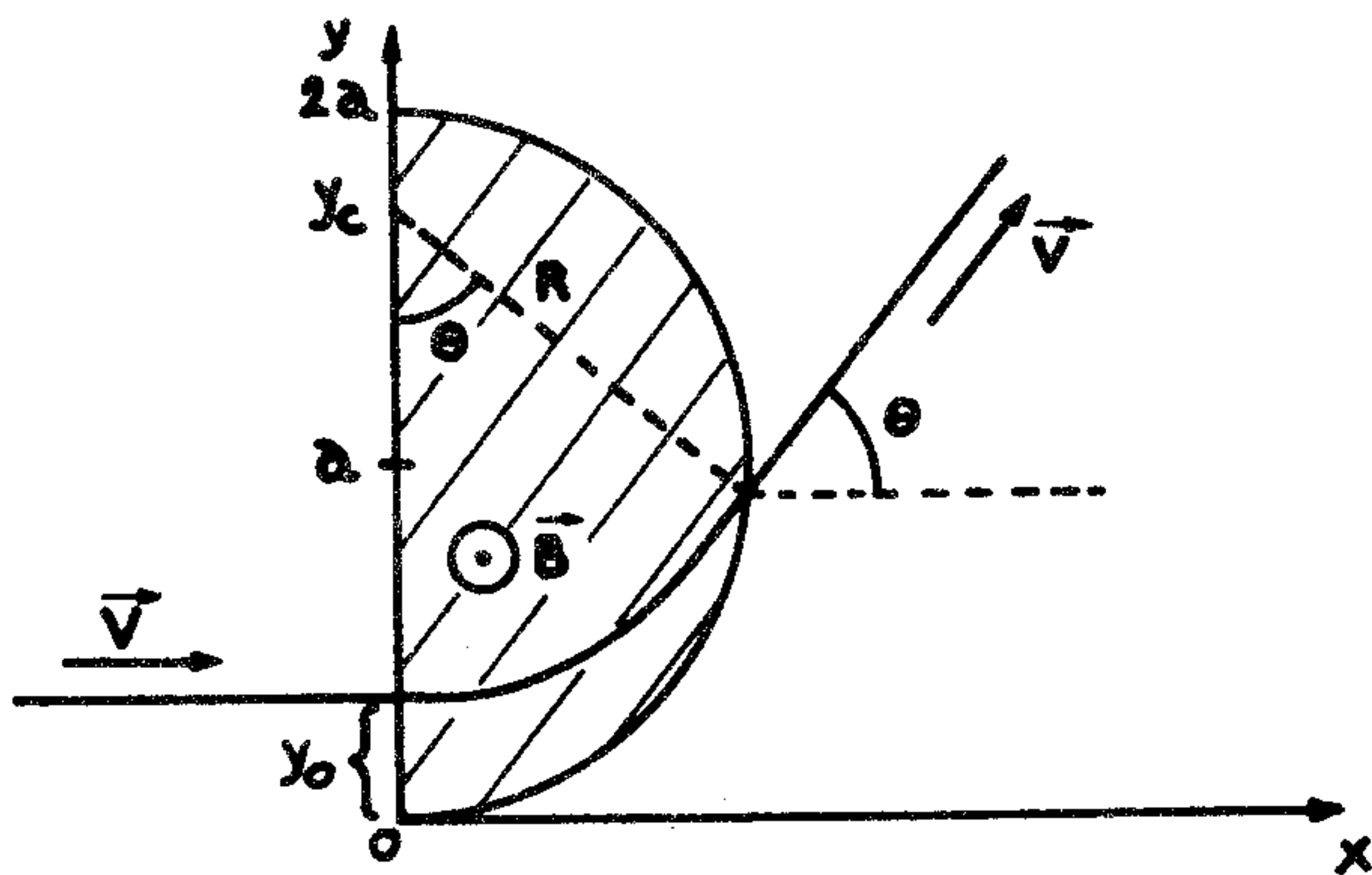


Fig. 124a.

consideremos un electrón que entra al campo magnético a la altura  $y_0$ ; describe entonces una circunferencia de radio  $R$ , cuyo centro lo suponemos a la altura  $y_c = y_0 + R$ ; este radio  $R$  es exactamente el mismo que antes:

$$R = \frac{\sqrt{2m\epsilon}}{eB}.$$

Supongamos que el electrón tiene la velocidad suficientemente baja como para devolverse, saliendo por la región "plana" del campo magnético; es decir, el electrón describe una semicircunferencia dentro del campo y sale hacia atrás con una velocidad  $\vec{v} = -v\hat{i}$ , a una altura  $y_s = y_0 + 2R$ :

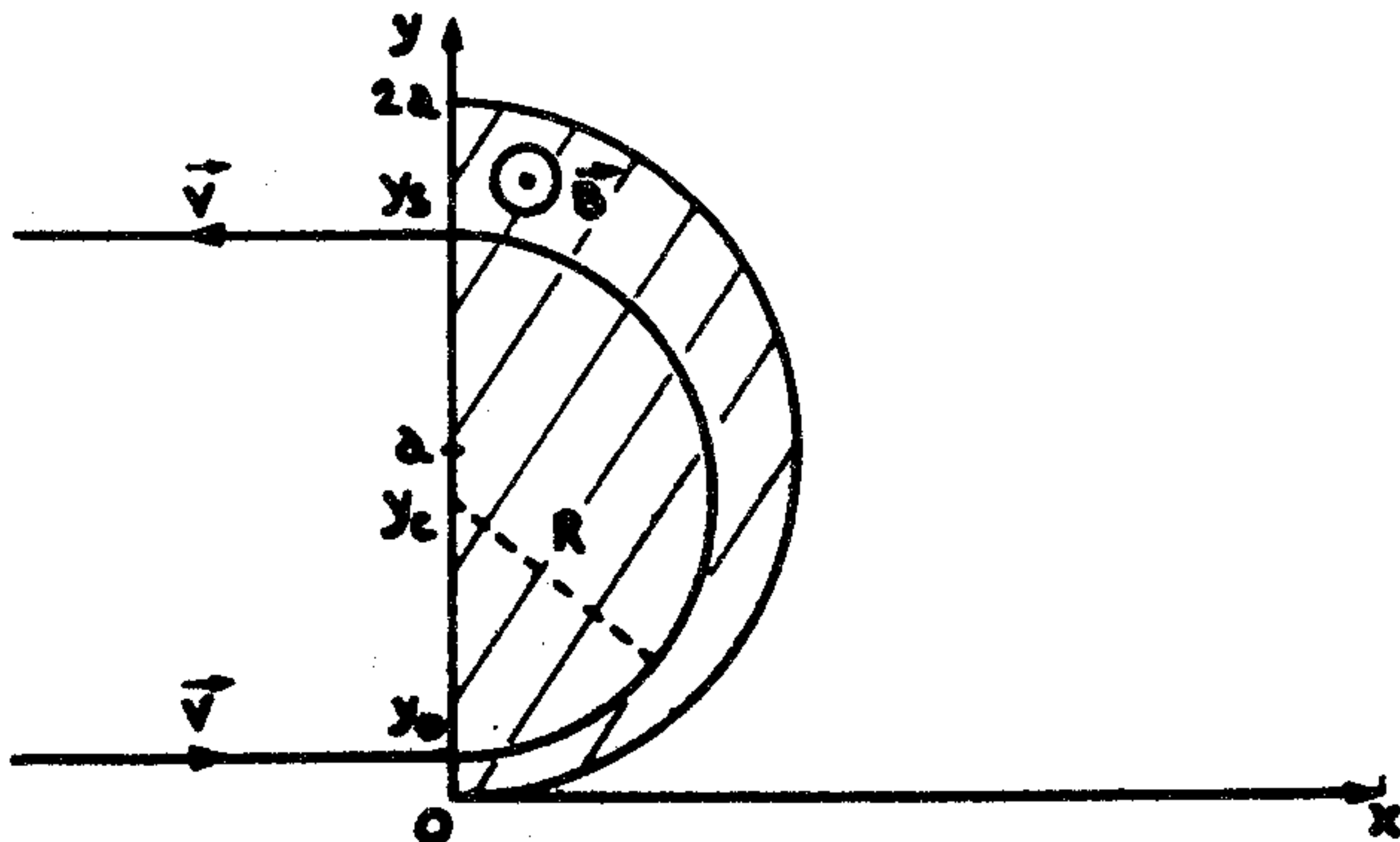


Fig. 124b.

Se cumple entonces:

$$y_s \leq 2a ;$$

para evitar que los electrones se devuelvan, debemos exigir por lo tanto:

$$y_s > 2a$$

o sea

$$y_0 + 2R > 2a$$

$$y_0 + 2 \frac{mv}{eB} > 2a$$

$$v > \frac{eB}{m} \left( a - \frac{y_0}{2} \right).$$

Pero, puesto que tenemos un haz de electrones, la altura de entrada  $y_0$  puede tomar cualquier valor comprendido entre 0 y  $2a$ ; para evitar que ninguno de los electrones se devuelva, debemos ponernos en el peor de los casos, es decir, debemos poner  $y_0 = 0$ ; con esto, resulta:

$$v > \frac{eBa}{m}$$

Esta condición nos asegura que todos los electrones salen del campo magnético por el borde que tiene forma de semicircunferencia.

Calculemos el punto por donde el electrón sale; la ecuación de la trayectoria es:

$$(y - y_c)^2 + x^2 = R^2$$

en que  $y_c$  es la altura del centro de la (circunferencia) trayectoria; (ver Fig. 124a).

$$y_c = y_0 + R$$

$$\text{luego} \quad (y - y_0 - R)^2 + x^2 = R^2.$$

El punto por donde sale el electrón es el punto de intersección de la trayectoria con el borde del campo; éste último tiene por ecuación:

$$(y - a)^2 + x^2 = a^2.$$

Debemos, por lo tanto, resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (y - a)^2 + x^2 = a^2 \\ (y - y_0 - R)^2 + x^2 = R^2 \end{cases}$$

restando:

$$(y - a)^2 - (y - y_0 - R)^2 = a^2 - R^2$$

o bien:

$$(y - a + y - y_0 - R) \cdot (y - a - y + y_0 + R) = a^2 - R^2$$

de donde:



$$y = y_s = \frac{y_o^2 + 2Ry_o}{2(R + y_o - a)}$$

La abscisa correspondiente es:

$$x_s = +\sqrt{a^2 - (y_s - a)^2}$$

$$x_s = +\sqrt{2ay_s - y_s^2}$$

$$x_s = \frac{+\sqrt{y_o(y_o + 2R) \cdot [4a(R + y_o - a) - y_o(y_o + 2R)]}}{2(R + y_o - a)}$$

El ángulo  $\theta$  puede entonces determinarse fácilmente, pues  $\text{tg}\theta$  es igual a la derivada de la trayectoria en el punto de salida  $(x_s, y_s)$ :

$$\text{tg}\theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}}$$

y como:

$$(y - y_c)^2 + x^2 = R^2$$

o bien

$$(y - y_o - R)^2 + x^2 = R^2$$

se tiene:

$$2(y - y_o - R) dy + 2x dx = 0$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y - y_o - R}$$

$$\text{tg}\theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x_s \\ y_s}} = -\frac{x_s}{y_s - y_o - R}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{+\sqrt{y_o(y_o + 2R) \cdot [4a(R + y_o - a) - y_o(y_o + 2R)]}}{2(y_o + R) \cdot (R + y_o - a) - y_o(y_o + 2R)}$$

### PROBLEMA 33.-

Un cable largo, rectilíneo, colocado a lo largo del eje  $z$ , lleva una corriente  $I$  en la dirección positiva de  $z$ . Se coloca un momento dipolo magnético  $\vec{m} = m_o \hat{j}$  en el eje  $x$  a una distancia  $x_p$  del alambre.

- ¿Cuál es la energía potencial de  $\vec{m}$  en el campo magnético del alambre? ¿Qué signo tiene si  $x_p > 0$ ?
- Calcule la fuerza sobre  $\vec{m}$  en la posición descrita. Diga en qué sentido se movería  $\vec{m}$  si se le dejara libre. Calcule el torque que se ejer-

ce sobre  $\vec{m}$ .

- c) Se coloca  $\vec{m}$  en la posición  $\vec{m} = m_0 \hat{i}$ . Calcule la energía, la fuerza y el torque sobre  $\vec{m}$  en este caso.

Indique la posición de  $\vec{m}$  en la cual tiene:

- i) máxima y ii) mínima, energía. ¿A qué caso corresponde la posición del párrafo c)?

### Resolución.-

Calculemos primero el campo magnético producido por la corriente:

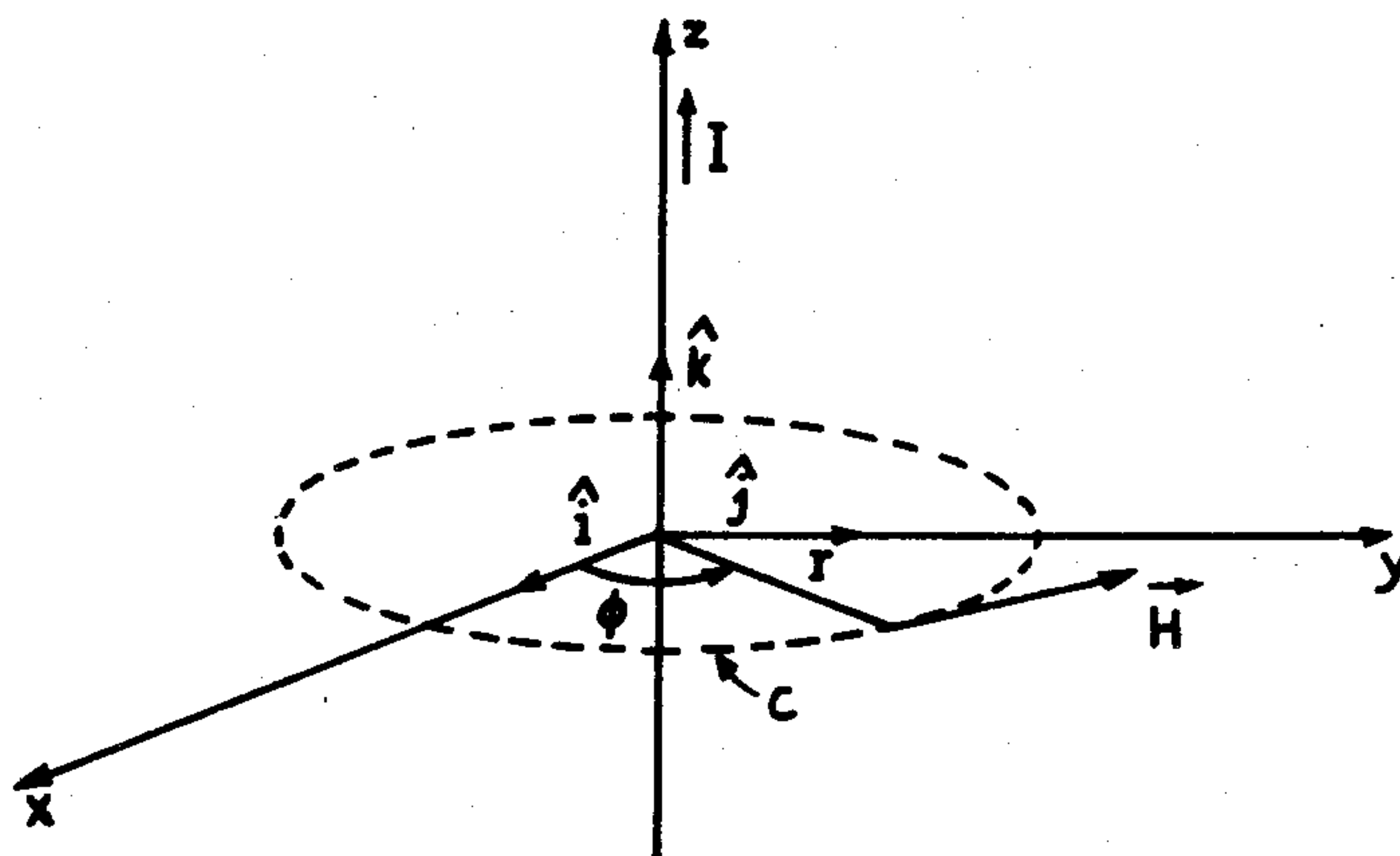


Fig. 125

Por simetría, el campo magnético  $\vec{H}$  tiene la dirección de  $\hat{e}_\phi$ , y su módulo  $H$  depende sólo de la distancia  $r$  al alambre; aplicando la ley circuital de Ampère al trayecto de integración  $C$ , tenemos:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$$

luego:

$$2\pi r H(r) = I$$

y de aquí:

$$\vec{H} = H(r) \hat{e}_\phi$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} (-\hat{i} \sin\phi + \hat{j} \cos\phi).$$

- a) La energía potencial de un dipolo  $\vec{m}$  puesto en un punto  $\vec{r}$  donde existe un campo magnético  $\vec{H}$  es:

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{H}(\vec{r}).$$

En nuestro caso:

$$W = -m_0 \hat{j} \cdot \frac{I}{2\pi r} (-\hat{i} \sin\phi + \hat{j} \cos\phi)$$

y en el punto P, tenemos que:



$$\begin{cases} r = x_p \\ \phi = 0 \end{cases}$$

luego

$$W = - \frac{m_o l}{2\pi x_p},$$

que tiene signo negativo si  $x_p > 0$ .

b) La fuerza es:

$$\vec{F} = \nabla W$$

donde  $W$  es la energía potencial del dipolo; en la parte a) vimos que:

$$W = - \frac{m_o l}{2\pi} \cdot \frac{\cos\phi}{r}$$

y el gradiente en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\text{luego: } \vec{F} = \nabla W = - \frac{m_o l}{2\pi} \left[ - \frac{\hat{e}_r \cos\phi}{r^2} - \frac{\hat{e}_\phi \sin\phi}{r^2} \right]$$

y en el punto 0, donde se encuentra el dipolo  $\vec{m}$ ,  $r = x_p$ ,  $\phi = 0$ , y  $\hat{e}_r = \hat{i}$ ; por lo tanto:

$$\vec{F} = \frac{M_o l}{2\pi} \cdot \frac{\hat{i}}{x_p^2}$$

Si se dejara libre, el dipolo  $\vec{m}$  se movería a lo largo del eje  $x$ , alejándose del alambre (sólo en el instante inicial).

El torque que se ejerce sobre  $\vec{m}$  es:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{H}$$

$$\vec{T} = m_o \hat{j} \times \frac{1}{2\pi r} (-\hat{i} \sin\phi + \hat{j} \cos\phi)$$

y para  $\phi = 0$ , el torque es nulo:

$$\vec{T} = \vec{0}.$$

c) Orientamos el dipolo según el eje  $x$ :

$$\vec{m} = m_o \hat{i}.$$

La energía será ahora:

$$W = - \vec{m} \cdot \vec{H} = - m_o \hat{i} \cdot \frac{1}{2\pi r} (-\hat{i} \sin\phi + \hat{j} \cos\phi)$$

$$W = 0.$$

La fuerza  $\vec{F}$  es:

$$\vec{F} = \nabla W$$

donde  $W = \frac{m_0 I}{2\pi} \cdot \frac{\sin\phi}{r}$

$$\vec{F} = \frac{m_0 I}{2\pi} \left[ -\frac{\hat{e}_r \sin\phi}{r^2} - \frac{\hat{e}_\phi \cos\phi}{r^2} \right]$$

y en el punto P:

$$\vec{F} = \frac{m_0 I}{2\pi} \frac{\hat{j}}{x_p^2}$$

El torque es

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{H}$$

$$\vec{T} = m_0 \hat{i} \times \frac{1}{2\pi r} (-\hat{i} \sin\phi + \hat{j} \cos\phi)$$

$$\vec{T} = \frac{m_0 I}{2\pi x_p} \hat{k}$$

Hagamos un gráfico de la energía del dipolo  $\vec{m}$  vs. el ángulo  $\theta$  que forma con el campo magnético  $\vec{H}$ :

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{H}$$

$$W = -m_0 H \cos\theta$$

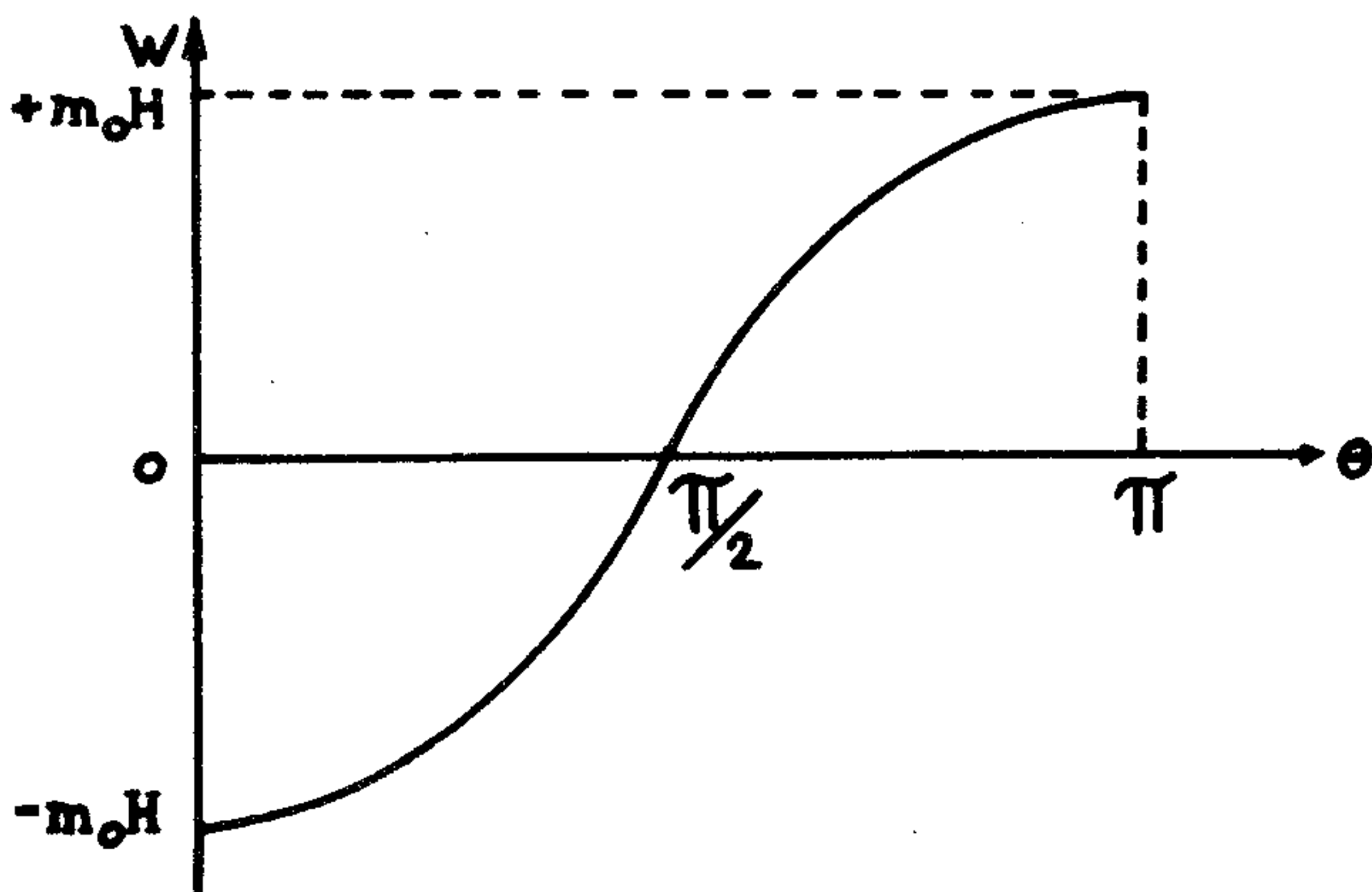


Fig. 126

De aquí se ve que la posición de máxima energía es aquella en que el dipolo  $\vec{m}$  es colineal con el campo  $\vec{H}$  pero apunta en el sentido contrario a él; en el problema nuestro, corresponde al caso  $\vec{m} = -m_0 \hat{j}$ .

La posición de mínima energía es aquella en que el dipolo es colineal con el campo magnético; corresponde en nuestro problema al caso  $\vec{m} = m_0 \hat{j}$ .

La posición  $\vec{m} = m_0 \hat{i}$  del párrafo c) es una posición intermedia, donde la energía vale cero.

PROBLEMA 34.-

En el eje de un solenoide por el que pasa una corriente  $I$  se pone una partícula  $P$  cerca de un extremo, produciéndose en ella una magnetización  $\vec{M} = \mu_0 \chi \vec{H}$ ; esta partícula no es ferromagnética.

- Mostrar que  $P$  no está sujeta a torque,
- Calcular la fuerza sobre la partícula, y determinar su sentido según ella sea para o diamagnética.

Resolución.-

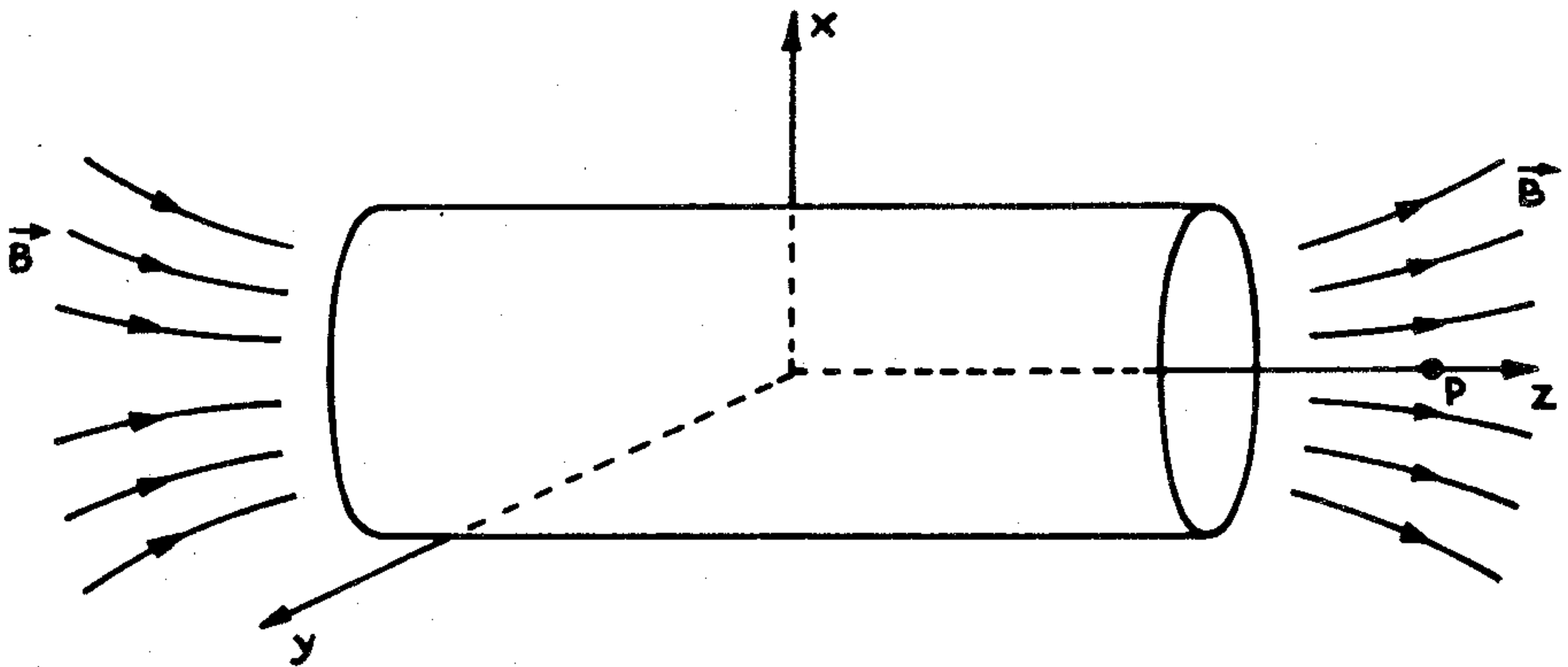


Fig. 127

- Supongamos que el volumen  $V$  de la partícula sea muy pequeño, o más precisamente, que las dimensiones lineales de la partícula sean despreciables frente al tamaño del solenoide; de este modo, el campo magnético en todo el volumen de la partícula es prácticamente constante, y apunta en la dirección positiva del eje  $z$ .

Por definición:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$$

luego:

$$\vec{m} = \iiint_V \vec{M} d\tau \approx \mu_0 \chi \vec{H} V.$$

El torque es:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{H}$$

$$\vec{T} = \mu_0 \chi V \vec{H} \times \vec{H} = \vec{0}.$$

- La fuerza es:

$$\vec{F} = \nabla W$$

donde  $W$  es la energía potencial de la partícula;

$$W = - \vec{m} \cdot \vec{H}$$

$$W = - \mu_0 \chi V H^2.$$

Por simetría, la fuerza debe tener la dirección del eje  $z$ ; luego:

$$\vec{F} = \nabla W = \frac{\partial W}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{F} = - \mu_0 \chi V \cdot 2H \frac{\partial H}{\partial z} \hat{k}$$

Si la partícula es paramagnética (diamagnética), entonces  $\chi > 0$  ( $\chi < 0$ ) y por lo tanto la fuerza apunta en el sentido positivo (negativo) del eje  $z$ .

( $\frac{\partial H^2}{\partial z} < 0$  sobre el eje  $z$ , ver problema 26).

### PROBLEMA 35.-

Calcule la energía almacenada por unidad de largo,  $W_\ell$ , para el cable coaxial de la figura. El cable es de cobre cuya permeabilidad magnética es  $\mu$ , y en el hueco entre los conductores y al exterior hay aire, cuya permeabilidad es uno.

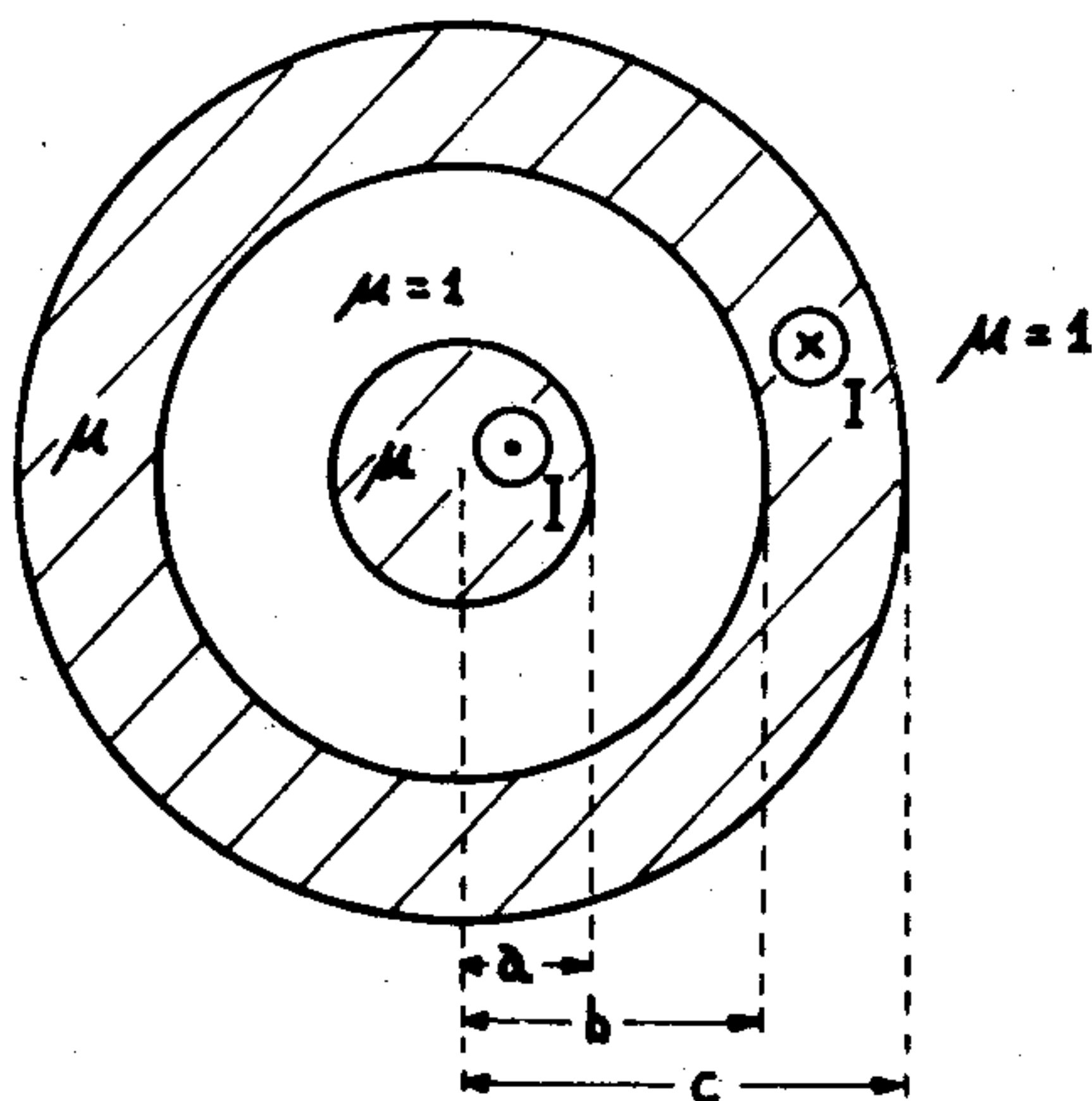


Fig. 128

### Resolución.-

La energía magnética almacenada en un volumen donde existe un campo magnético  $\vec{H}$  es:

$$W = \iiint \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau$$

$$W = \frac{\mu_0}{2} \iiint \mu H^2 d\tau.$$

Tenemos un sistema de referencia ( $x$  y  $z$ ) como se indica en la figura siguiente.

El campo magnético  $\vec{H}$  depende sólo de  $r$  y  $\theta$ , y el módulo  $H$  depende sólo de  $r$ ; si tomamos una unidad de longitud  $\ell$  según el eje  $z$ , entonces podemos calcular (en coordenadas cilíndricas) la energía almacenada por unidad de largo; la energía total almacenada en esta región de altura  $\ell$  es:

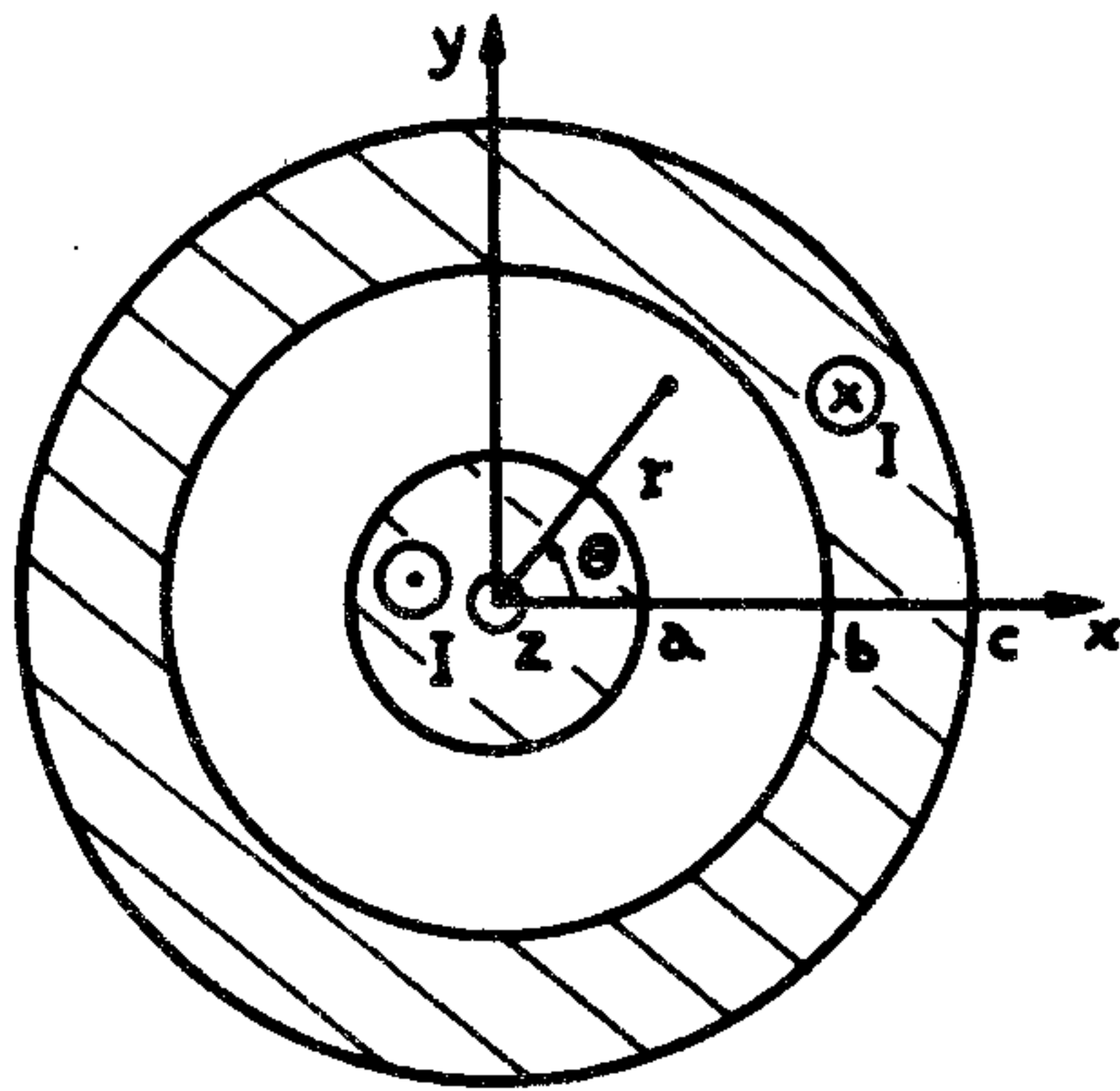


Fig. 129

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\ell} \int_{r=0}^{\infty} \mu(r) H^2(r) r dr d\theta dz$$

$$W = \frac{\mu_0}{2} \cdot 2\pi \cdot \ell \int_0^{\infty} \mu(r) H^2(r) r dr,$$

y la energía almacenada por unidad de largo  $\ell$  es:

$$W_{\ell} = \frac{W}{\ell} = \mu_0 \pi \int_0^{\infty} \mu(r) H^2(r) dr.$$

En el problema 29, parte c), nosotros calculamos el campo magnético  $H$  producido por el cable coaxial: para las regiones  $r \leq a$  y  $a \leq r \leq b$ , el campo es:

$$H(r) = \begin{cases} \frac{Jr}{2} , & r \leq a \\ \frac{a^2 J}{2r} , & a \leq r \leq b \end{cases}$$

donde  $J$  es la densidad de corriente del cilindro central; ésta es fácil de expresar en términos de la corriente  $I$ , que es un dato en este problema:

$$I = \pi a^2 J$$

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

y luego:

$$H(r) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi a^2} r , & r \leq a \\ \frac{I}{2\pi r} , & a \leq r \leq b \end{cases}$$

Sin embargo, para las regiones  $b \leq r \leq c$  y  $r \gg c$ , el campo magnético que calculamos en el problema 29 no será igual al de este problema; la razón es que en el problema 29, supusimos que las densidades de corriente  $J$  eran iguales en el cilindro interno y en la "cáscara" cilíndrica externa; esto es incompatible con el problema presente (donde se supone que las corrientes  $I$  son iguales en ambas partes), salvo en el caso excepcional en que se cumpla:

$$c^2 - b^2 = a^2,$$

condición que, naturalmente, no podemos suponer.

Calculemos entonces el campo magnético para  $b \leq r \leq c$  y  $r \gg c$ , de la misma manera que lo hicimos en el problema 29. Para esto, supongamos que la densidad de corriente de la "cáscara" cilíndrica sea  $J'$ :

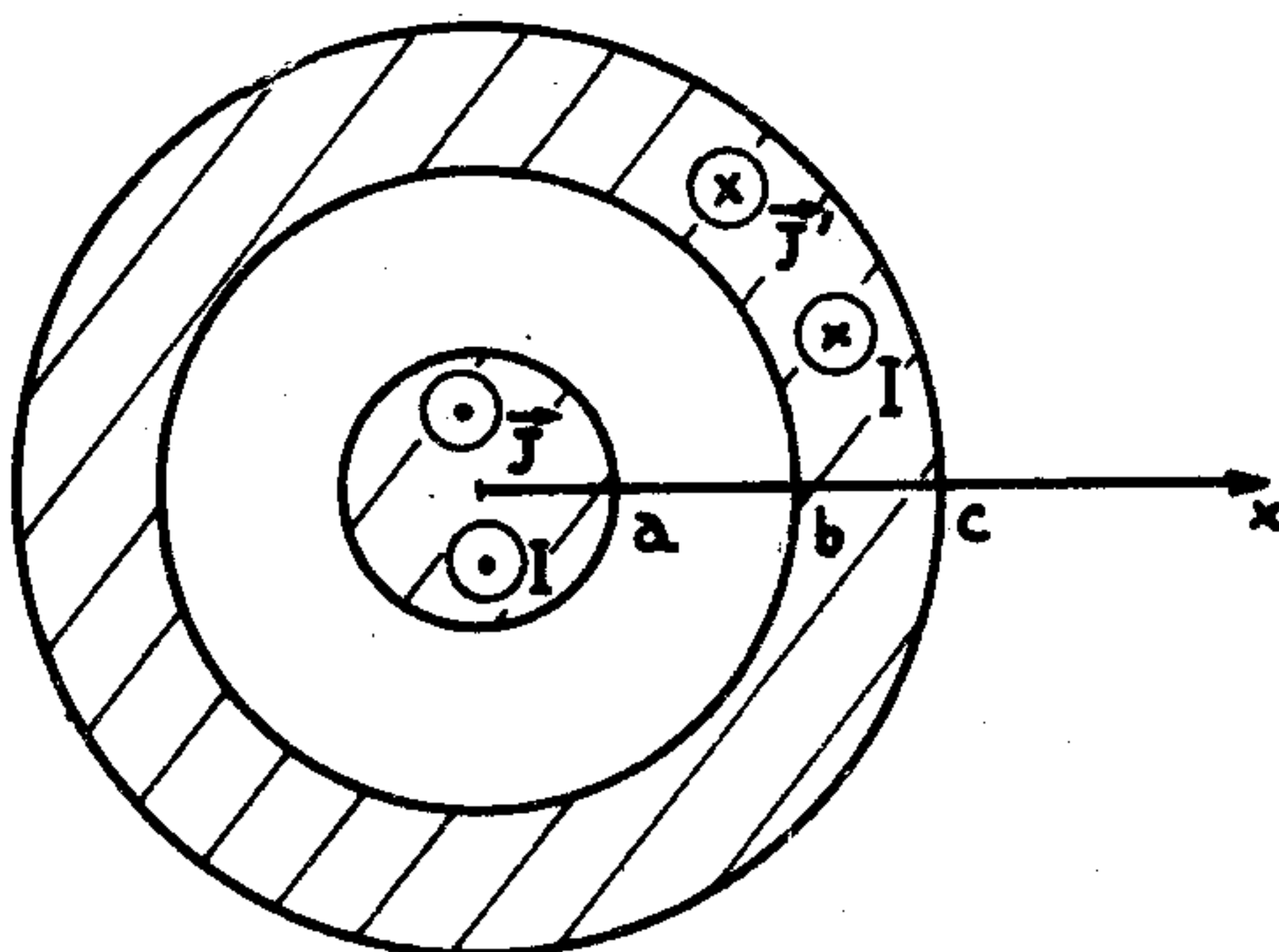


Fig. 130

Para la cáscara externa tenemos:

$$I = J' \pi (c^2 - b^2)$$

$$J' = \frac{I}{\pi (c^2 - b^2)}$$

La ley circuital de Ampère dice:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i = \iint_{S(C)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

donde  $i$  es la corriente total enlazada por el trayecto de integración  $C$ .

Para  $b \leq r \leq c$ , tomemos un trayecto  $C$  de integración que sea una circunferencia de radio  $r$ ; entonces:

$$2\pi rH = J\pi a^2 - J'\pi (r^2 - b^2)$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \left[ 1 - \frac{(r^2 - b^2)}{c^2 - b^2} \right],$$

Y para  $r \gg c$ , el campo magnético es nulo pues la corriente total enlazada por



el trayecto de integración es nula.

Tenemos, finalmente, entonces:

$$H(r) = \begin{cases} \frac{lr}{2\pi a^2} & , \quad r \leq a \\ \frac{l}{2\pi r} & , \quad a \leq r \leq b \\ \frac{l}{2\pi r} - \frac{l(r^2 - b^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)} & , \quad b \leq r \leq c \\ 0 & , \quad r > c \end{cases}$$

Los datos del problema nos dicen también que:

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu & r \leq a \\ 1 & a \leq r \leq b \\ \mu & b \leq r \leq c \\ 1 & r > c \end{cases}$$

Podemos introducir todo esto en la expresión para la energía almacenada por unidad de largo:

$$\begin{aligned} W_{\ell} &= \mu_0 \pi \mu \int_0^a \left( \frac{lr}{2\pi a^2} \right)^2 r dr + \mu_0 \pi \int_a^b \left( \frac{l}{2\pi r} \right)^2 r dr + \\ &+ \mu_0 \pi \mu \int_b^c \left( \frac{l}{2\pi r} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right)^2 r dr. \end{aligned}$$

Las integrales son todas inmediatas, aunque algo largas.

El resultado final es:

$$W_{\ell} = \frac{\mu_0 l^2}{4\pi} \left[ \text{Log } \frac{b}{a} + \frac{\mu c^4}{(c^2 - b^2)^2} \cdot \text{Log } \frac{c}{b} - \frac{\mu c^2}{c^2 - b^2} \right].$$



PROBLEMA 36.-

Se construye un electroimán de hierro como el de la figura. El largo de cada uno de los trozos de hierro es  $a$ , y su sección es circular de área  $S$ ; la permeabilidad magnética del hierro es  $\mu$ , y la del aire es uno. Los trozos de hierro están separados por una distancia  $b$  que es mucho menor que el diámetro del hierro, de modo que los efectos de borde pueden despreciarse. La corriente es  $i$  y da  $N$  vueltas.

- Haga un dibujo de las líneas de campo magnético.
- Calcule la densidad de flujo  $\vec{B}$  dentro del hierro.
- Calcule la intensidad de campo magnético  $\vec{H}$  en el hierro y en el entrehierro.
- Calcule la magnetización del hierro.
- Calcule la fuerza de atracción entre los hierros.

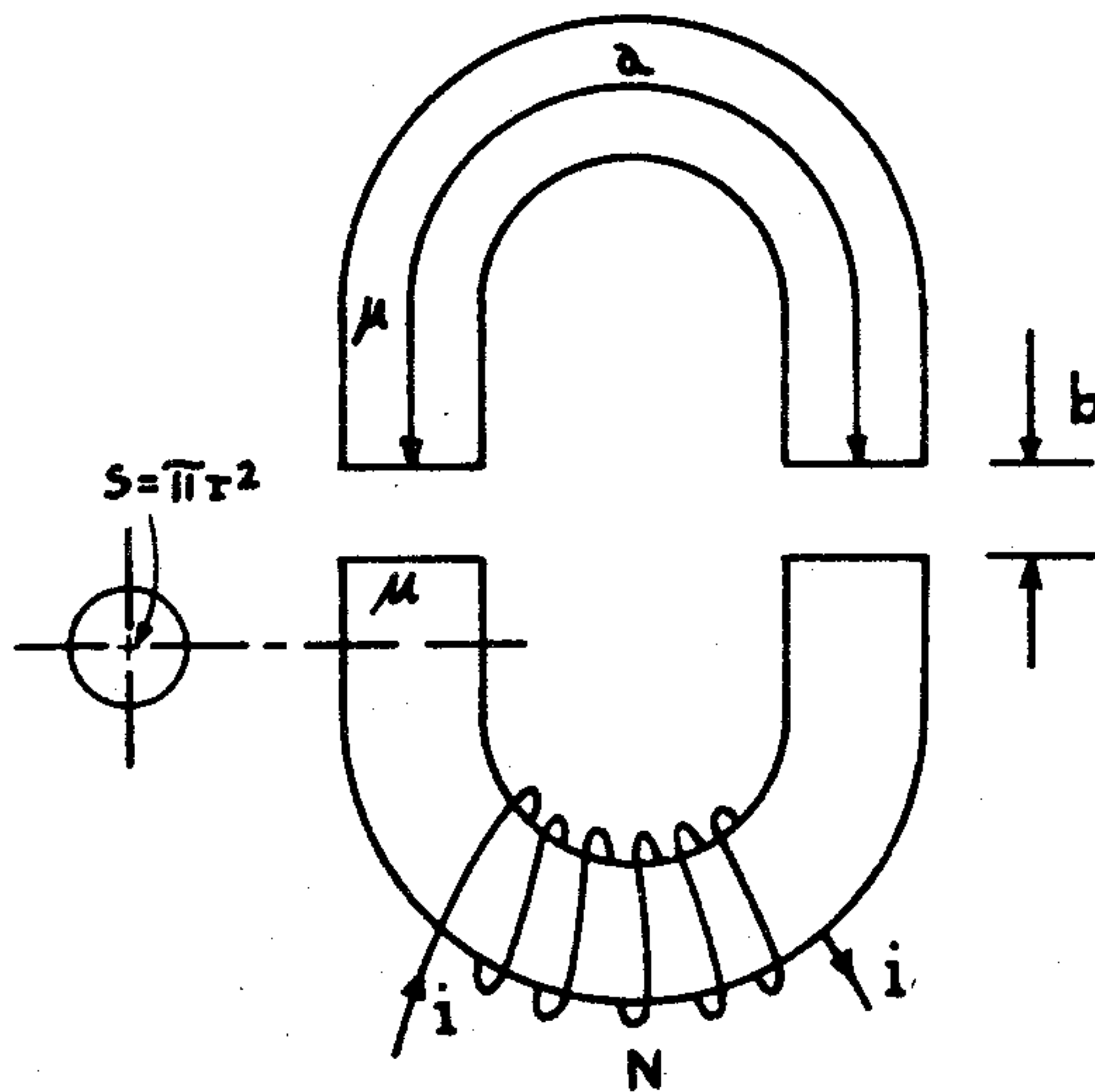


Fig. 131

Resolución.-

- Dado que el electroimán está hecho de hierro, el flujo queda prácticamente todo confinado dentro de él; en el entrehierro, dado que tiene dimensiones pequeñas, el campo se deforma muy poco con respecto al que existe en el hierro. Un esquema de las líneas de flujo es entonces el siguiente: (ver Fig. 132).
- El campo magnético es constante en módulo dentro de cada trozo de hierro, puesto que prácticamente no se pierde flujo hacia afuera del electroimán; las líneas de campo tienen prácticamente la misma forma del aparato. Calculemos el campo magnético  $H$  aplicando la ley circuital de Ampère a un trayecto que pasa por todo el electroimán; la corriente total que atraviesa este trayecto es  $Ni$ :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = Ni$$

$$\text{Luego } H_1 a + H_2 b + H_3 a + H_4 b = Ni.$$

Pero, por conservación de la componente normal de la densidad de flujo,  $B_n$ , en cualquier superficie de separación, tenemos

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 \equiv B;$$

y como, en general,  $B = \mu\mu_0 H$ , tenemos:

$$\frac{B}{\mu\mu_0} a + \frac{B}{\mu_0} b + \frac{B}{\mu\mu_0} a + \frac{B}{\mu_0} b = Ni$$

luego:

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\left(\frac{a}{\mu} + b\right)}$$

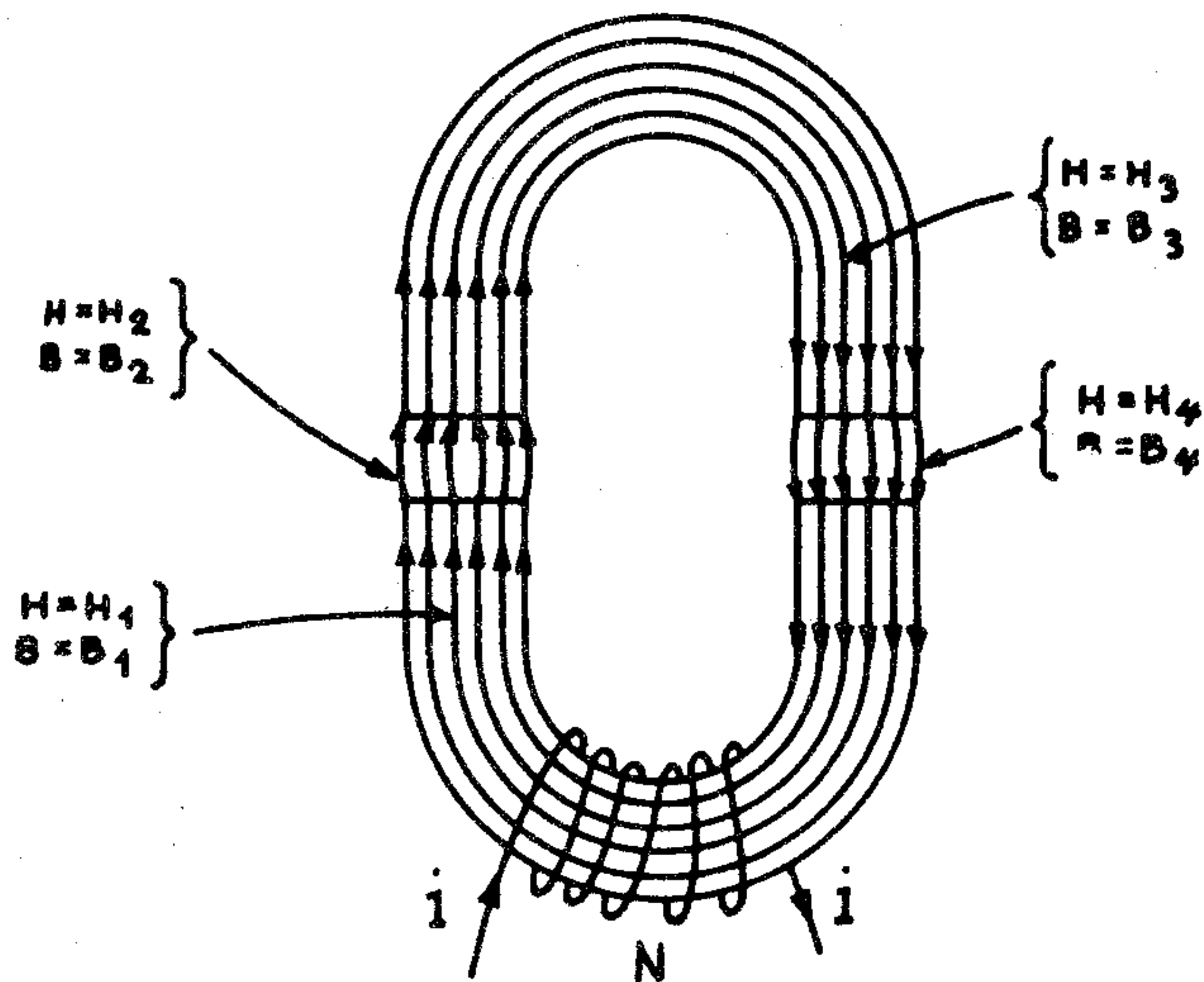


Fig. 132

c) El campo magnético  $H$  dentro del hierro es:

$$H_1 = H_3 = \frac{B}{\mu\mu_0} = \frac{Ni}{2(a + b\mu)},$$

y en el entrehierro es:

$$H_2 = H_4 = \frac{B}{\mu_0} = \frac{Ni}{2\left(\frac{a}{\mu} + b\right)}.$$

d) Sabemos que:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

y también:

$$\vec{M} = \mu_0 \chi \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} \equiv \mu_0 \mu \vec{H}$$

$$\vec{M} = \mu\mu_0 \vec{H} - \mu_0 \vec{H} = \mu_0 (\mu - 1) \vec{H}$$

$$\text{Luego } M = \frac{\mu_0 (\mu - 1) Ni}{2(a + b\mu)}$$

En realidad, puesto que  $\mu \gg 1$ , se tiene que  $\mu - 1 \approx \mu$ ; luego:

$$\vec{M} \simeq \mu_0 \mu \vec{H} = \vec{B}.$$

e) Si suponemos la corriente  $i$  constante, la fuerza es

$$\vec{F} = \nabla W$$

donde  $W$  es la energía almacenada; consideremos la distancia  $b$  como variable y llamémosla  $x$ :

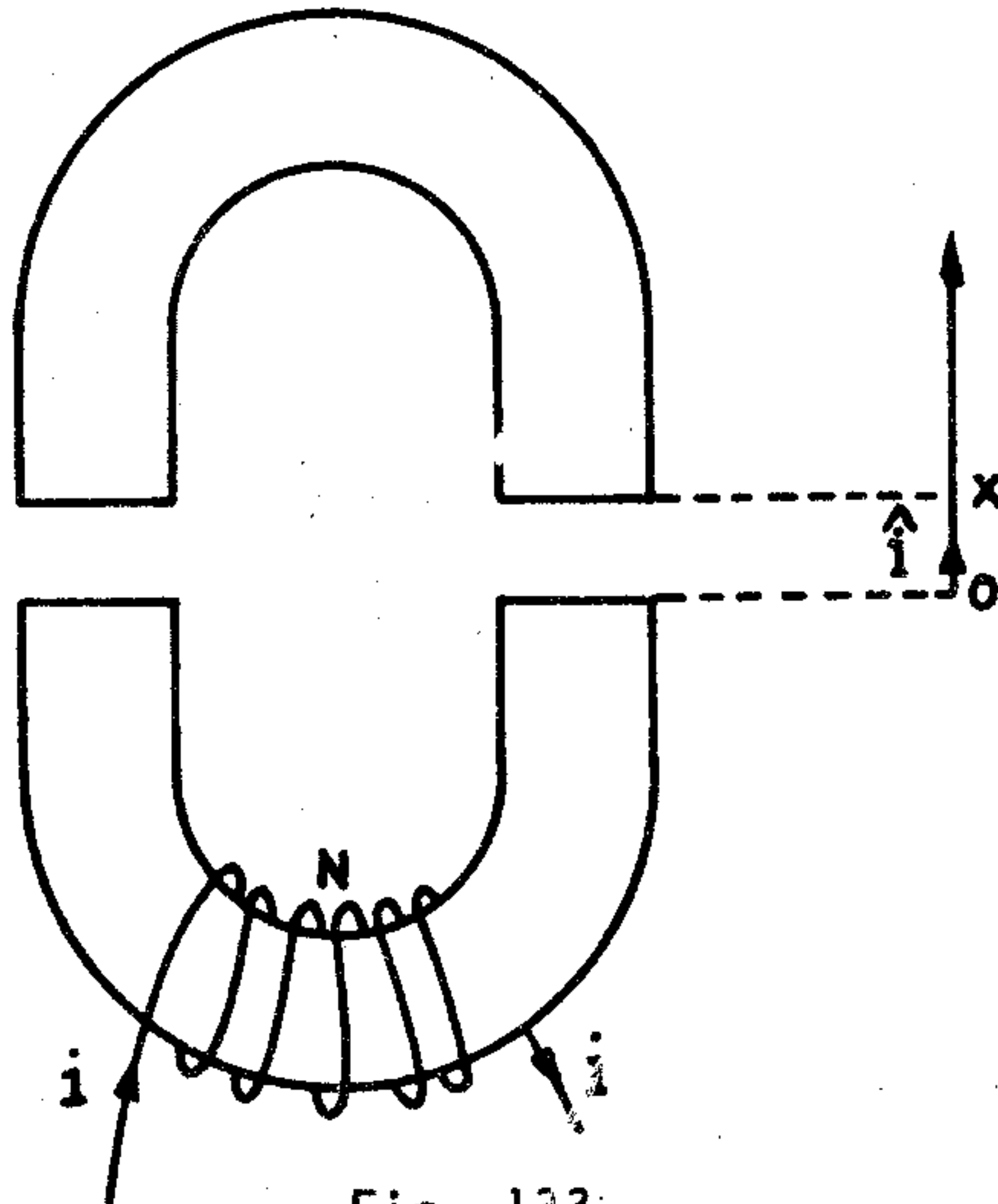


Fig. 133

Por simetría, la fuerza tiene la dirección del eje  $x$  dibujado en la figura de arriba; calculemos la energía  $W$  en función de  $x$ ; para esto hay varias maneras de hacerlo (p.ej. integrando  $\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$  dentro de todo el imán), pero una forma es particularmente simple: sabemos que para un sistema de  $n$  circuitos, cada uno de los cuales enlaza un flujo magnético  $\phi_j$  y es recorrido por una corriente  $i_j$ , entonces:

$$W = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} i_j \phi_j,$$

y en nuestro caso:

$$W = \frac{1}{2} N i \phi = \frac{1}{2} N i B S$$

luego:

$$W = \frac{\mu_0 N^2 i^2 S}{4 \left( \frac{a}{\mu} + x \right)}.$$

La fuerza será:

$$\vec{F} = \nabla W \Big|_{x=b} = \frac{\partial W(x)}{\partial x} \Big|_{x=b} \hat{i}$$

$$\vec{F} = - \frac{\mu_0 N^2 i^2 S}{4 \left( \frac{a}{\mu} + b \right)^2} \hat{i}$$

La fuerza tiende a juntar los dos trozos de hierro, y de aquí la utilidad del electroimán.

### PROBLEMA 37.-

I) Una espira rectangular plana de lados  $a$  y  $b$  que es recorrida por una corriente  $I$ , se encuentra en un campo magnético de densidad de flujo  $\vec{B}$ . Se define el vector unitario  $\hat{n}$  como aquél que es perpendicular a la espira, y que apunta en el sentido en que avanzaría un tornillo derecho que se hiciera girar en el sentido de la corriente  $I$ .

Suponga un sistema de coordenadas  $Oxyz$  cuyo origen se encuentra en el centro de la espira; suponga también que sus lados de longitud  $b$  son paralelos al eje  $Oy$ , de modo que  $\hat{n}$  pertenece al plano  $(Oy, Oz)$ . Se define el ángulo  $\alpha$  como aquél que forma  $\hat{n}$  con el eje  $Oz$ .

A) Suponga que la densidad de flujo  $\vec{B}$  es uniforme:  $\vec{B} = B\hat{k}$ ;

- calcule la fuerza neta que se ejerce sobre la espira, y convénzase de que el resultado es válido para cualquier espira;
- calcule la fuerza sobre cada uno de los lados de la espira, y de aquí el torque que se ejerce sobre ella;
- defina el momento magnético  $\vec{m}$  de la bobina y compruebe que  $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{H}$ .

B) Suponga que el campo magnético no es uniforme, sino que  $\vec{B} = \vec{B}(x, z)$  (independiente de  $y$ ), pero que varía muy suavemente en toda la región en que se encuentra la espira, de modo que puede usar el desarrollo de Taylor a primer orden;

- calcule la fuerza sobre la espira cuando  $\alpha = 0$ ;
- calcule el torque sobre la espira cuando  $\alpha \neq 0$ .

II) Repita d) y e) para una espira circular de radio  $a$  situada en un campo de densidad de flujo  $\vec{B} = \vec{B}(r, z)$  (es decir,  $\vec{B}$  tiene simetría alrededor del eje  $Oz$ ).

### Resolución.-

A) a) El elemento de fuerza que se ejerce sobre un elemento de corriente  $I d\vec{\ell}$  es:

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

y por lo tanto la fuerza neta que se ejerce sobre la espira es:

$$\vec{F} = \oint I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

donde la integral se realiza sobre la espira en el sentido de la corriente  $I$ .

En este caso,  $\vec{B}$  es uniforme, de modo que

$$\vec{F} = -I \vec{B} \times \oint d\vec{\ell} = \vec{0}$$

pues la integral cerrada de una diferencial exacta es nula. Este resultado no depende de la forma de la espira, y por lo tanto el resultado es válido para cualquiera (siempre que  $\vec{B}$  sea uniforme)

b) La figura es:

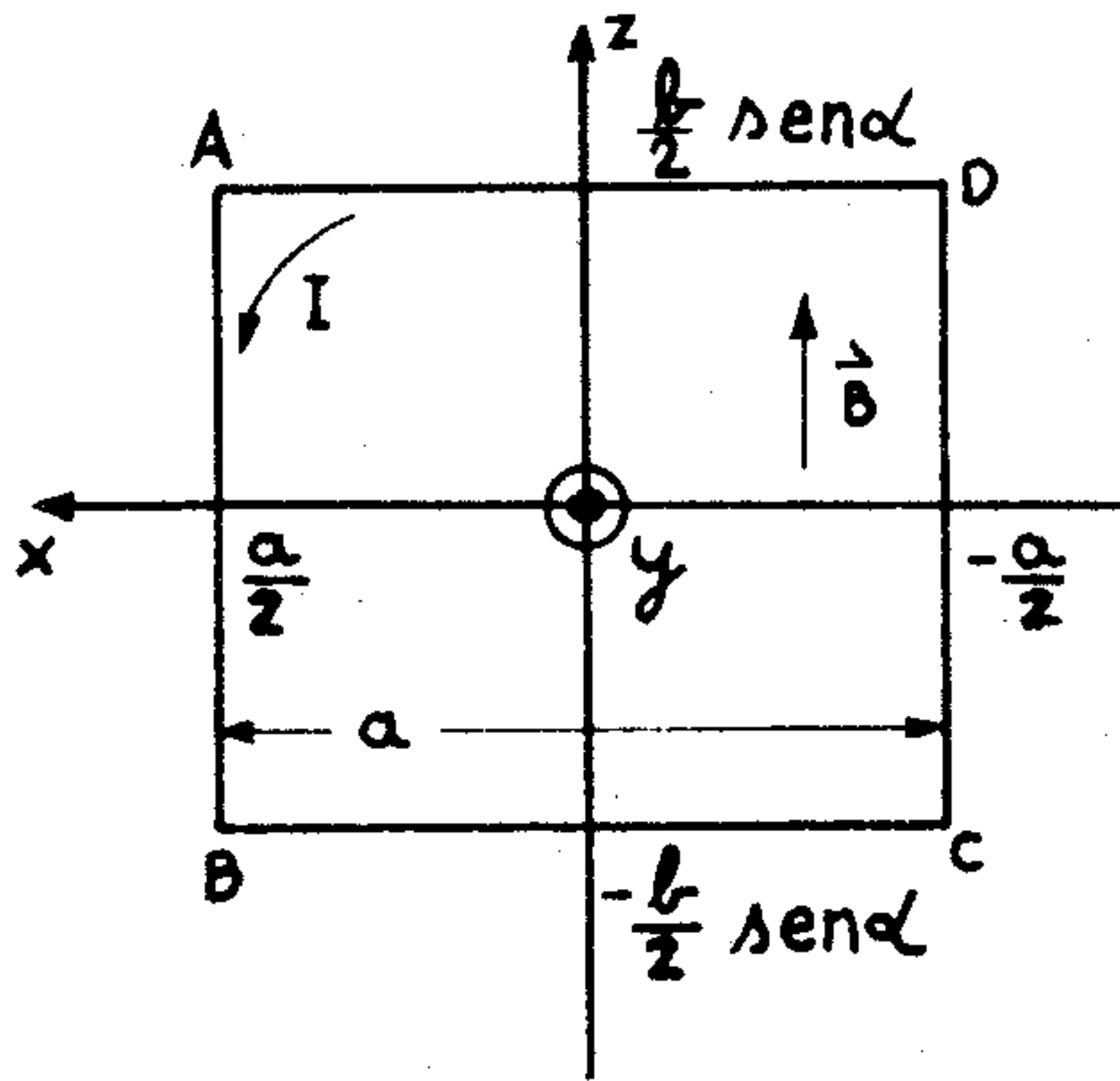
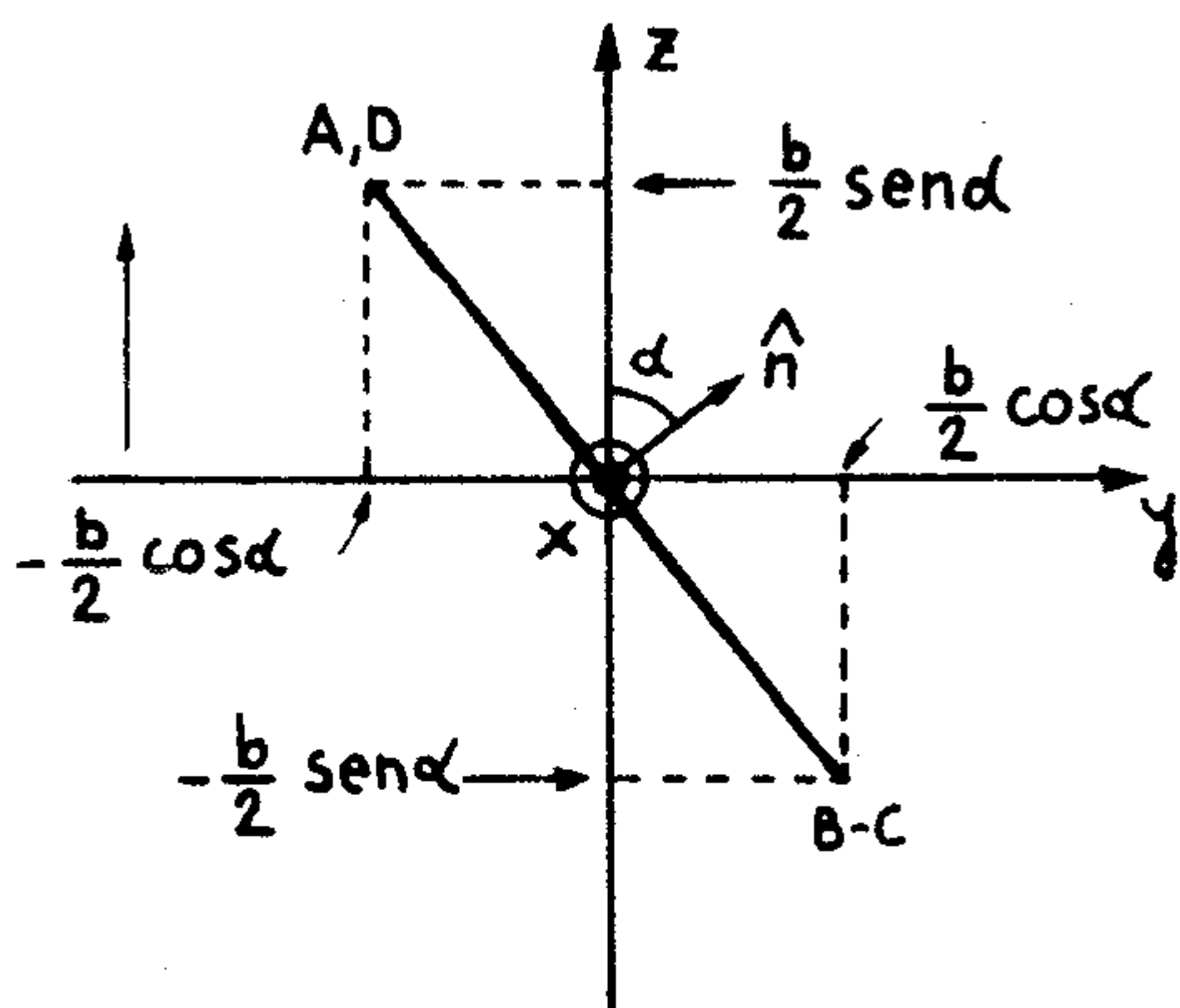


Fig. 134

Las fuerzas sobre cada uno de los lados de la espira son:

$$\vec{F}_{BC} = \int_B^C I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \vec{BC} \times \vec{B} = -aIB \hat{i} \times \hat{k}$$

$$\vec{F}_{BC} = aIB \hat{j};$$

$$\vec{F}_{DA} = \int_D^A I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \vec{DA} \times \vec{B} = aIB \hat{i} \times \hat{k}$$

$$\vec{F}_{DA} = -aIB \hat{j};$$

$$\vec{F}_{CD} = \int_C^D I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \vec{CD} \times \vec{B}$$

pero  $\vec{CD} = b (\text{sen } \alpha \hat{k} - \text{cos } \alpha \hat{j})$   
luego:

$$\vec{F}_{CD} = -bIB \text{cos } \alpha \hat{i};$$

$$\vec{F}_{AB} = \int_A^B I d\vec{\ell} \times \vec{B} = I \vec{AB} \times \vec{B} = -I \vec{CD} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_{AB} = bIB \text{cos } \alpha \hat{i}$$



Puesto que el campo  $\vec{B}$  es uniforme, la fuerza por unidad de longitud que se ejerce sobre cualquiera de los lados de la espira es constante; podemos afirmar entonces que la fuerza que se ejerce sobre cada lado actúa en el centro de éste:

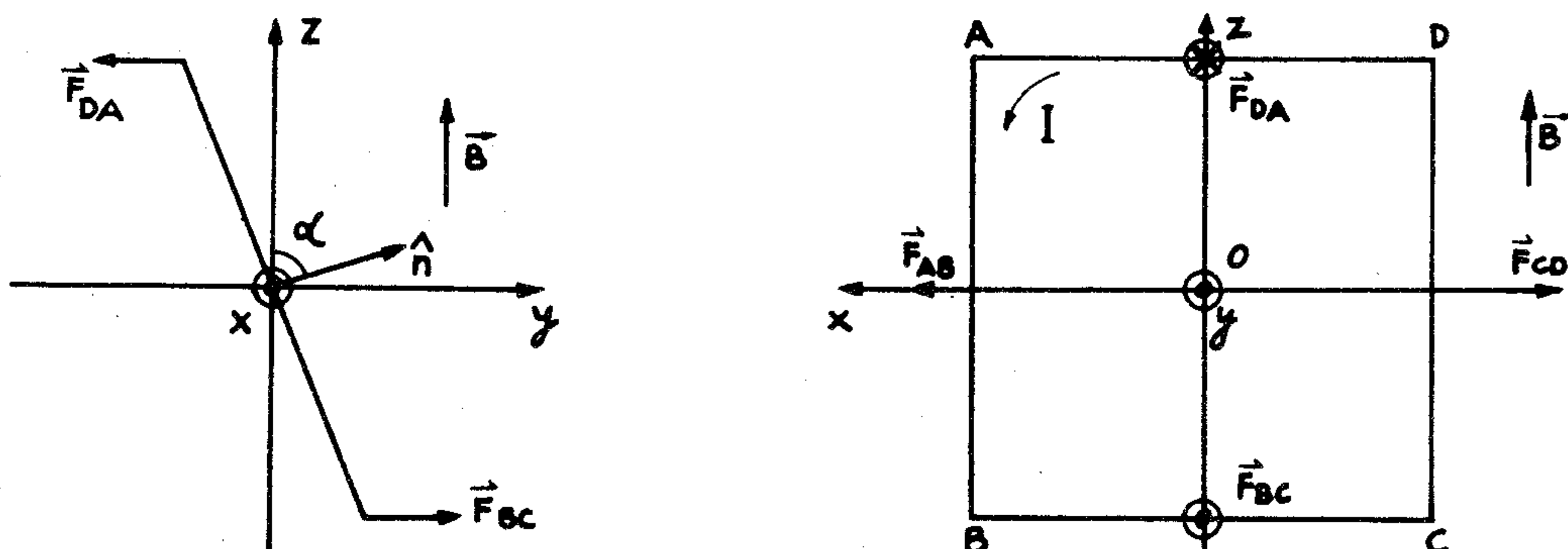


Fig. 135

El torque que se ejerce sobre la espira es:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

donde  $\vec{r}_i$  son los vectores de posición de cada uno de los puntos medios de los lados de la espira, y  $\vec{F}_i$  son cada una de las fuerzas que calculamos:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{AB}}{2} \times \vec{F}_{BC} + \frac{\vec{BA}}{2} \times \vec{F}_{DA} + \frac{\vec{DA}}{2} \times \vec{F}_{AB} + \frac{\vec{AD}}{2} \times \vec{F}_{CD}$$

$$\vec{\tau} = \vec{BA} \times \vec{F}_{DA}$$

$$\vec{\tau} = ab \cdot IB \sin \alpha \hat{n}$$

El momento magnético  $\vec{m}$  de la espira se define como:

$$\vec{m} = \mu_0 I \Delta \vec{S} = \mu_0 I ab \hat{n}$$

$$\vec{m} = \mu_0 I ab (\hat{j} \sin \alpha + \hat{k} \cos \alpha)$$

y el torque es

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{H}$$

$$\vec{\tau} = \mu_0 I ab (\hat{j} \sin \alpha + \hat{k} \cos \alpha) \times H \hat{k}$$

$$\vec{\tau} = ab I B \sin \alpha \hat{i},$$

donde hemos utilizado que  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ . Hay que notar que el torque es exactamente igual a  $\vec{m} \times \vec{H}$  sólo en el caso de que el campo magnético sea uniforme; si esto no ocurre, será igual a  $\vec{m} \times \vec{H}$  en primera aproximación solamente.

B) d) Cuando  $\alpha = 0$ , tenemos que la figura es la que sigue:

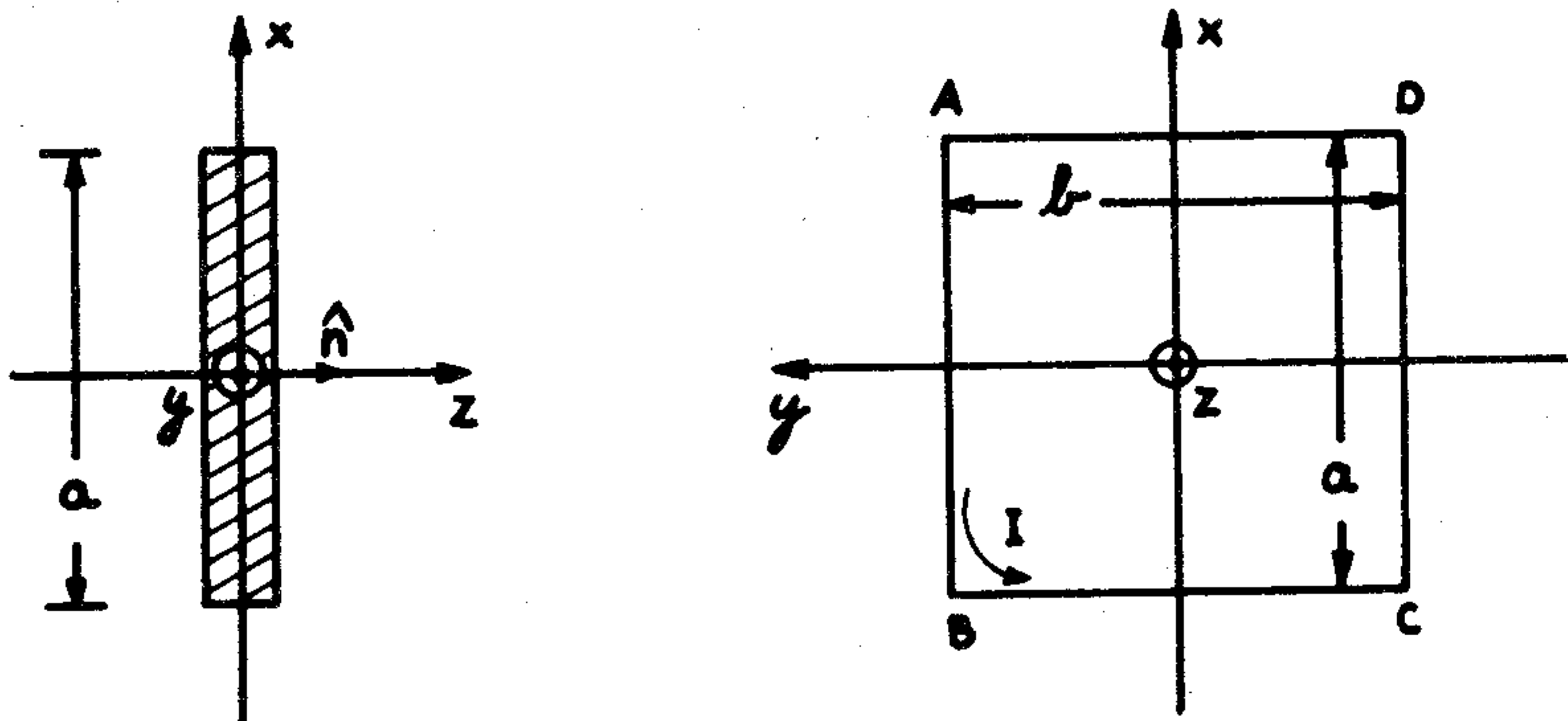


Fig. 136

La fuerza neta sobre la espira es:

$$\vec{F} = \oint I d\vec{\ell} \times \vec{B}(x, z)$$

Tal como antes, descomponemos la integral cerrada en cuatro integrales correspondientes a cada uno de los lados de la espira:

$$\vec{F}_{BC} = I \int_B^C d\vec{\ell} \times \vec{B}\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$\vec{F}_{BC} = I \vec{BC} \times \vec{B}\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$\vec{F}_{BC} = -I b \hat{j} \times \vec{B}\left(-\frac{a}{2}, 0\right);$$

$$\vec{F}_{DA} = \int_D^A I d\vec{\ell} \times \vec{B}\left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$\vec{F}_{DA} = I \vec{DA} \times \vec{B}\left(\frac{a}{2}, 0\right) = I b \hat{j} \times \vec{B}\left(\frac{a}{2}, 0\right);$$

$$\vec{F}_{CD} = \int_C^D I d\vec{\ell} \times \vec{B}(x, z) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} I dx \hat{i} \times \vec{H}(x, 0)$$

$$\vec{F}_{AB} = \int_A^B I d\vec{\ell} \times \vec{B}(x, z) = \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} I dx \hat{i} \times \vec{H}(x, 0) = -\vec{F}_{CD}$$

La fuerza neta es entonces:



$$\vec{F} = I b \hat{j} \times \left[ \vec{B}\left(\frac{a}{2}, 0\right) - \vec{B}\left(-\frac{a}{2}, 0\right) \right]$$

La expresión del desarrollo en serie de Taylor para una función vectorial de un espacio de  $n$  dimensiones es la siguiente:

$$\vec{F}(\vec{x} + \vec{h}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k \vec{F}(\vec{x})$$

donde  $\vec{x}$  es un punto del espacio y  $\vec{h}$  un desplazamiento independiente de  $\vec{x}$ :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

Volviendo a nuestro problema, podemos desarrollar el campo magnético  $\vec{B}(x, z)$  en torno al origen a primer orden en las coordenadas:

$$\vec{B}(x, z) = \vec{B}(0, 0) + x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}(0, 0) + z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}(0, 0) + \dots,$$

con lo cual podemos obtener una expresión aproximada para la fuerza que se ejerce sobre la espira:

$$\vec{F} \simeq ab I \hat{j} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}(0, 0).$$

e) Sobre un elemento de espira situado en el punto  $\vec{r}$  actúa un elemento de fuerza  $d\vec{F}$ , de modo que el elemento de torque es:

$$\begin{aligned} d\vec{T} &= \vec{r} \times d\vec{F} \\ &= \vec{r} \times (I d\vec{r} \times \vec{B}) \\ &= I \left[ (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B} \right] \end{aligned}$$

y el torque neto que se ejerce sobre la espira es:

$$\vec{T} = I \oint_{\text{espira}} \left[ (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B} \right]$$

Nuevamente descomponemos la integral cerrada en cuatro, correspondiente a cada uno de los lados de la espira:

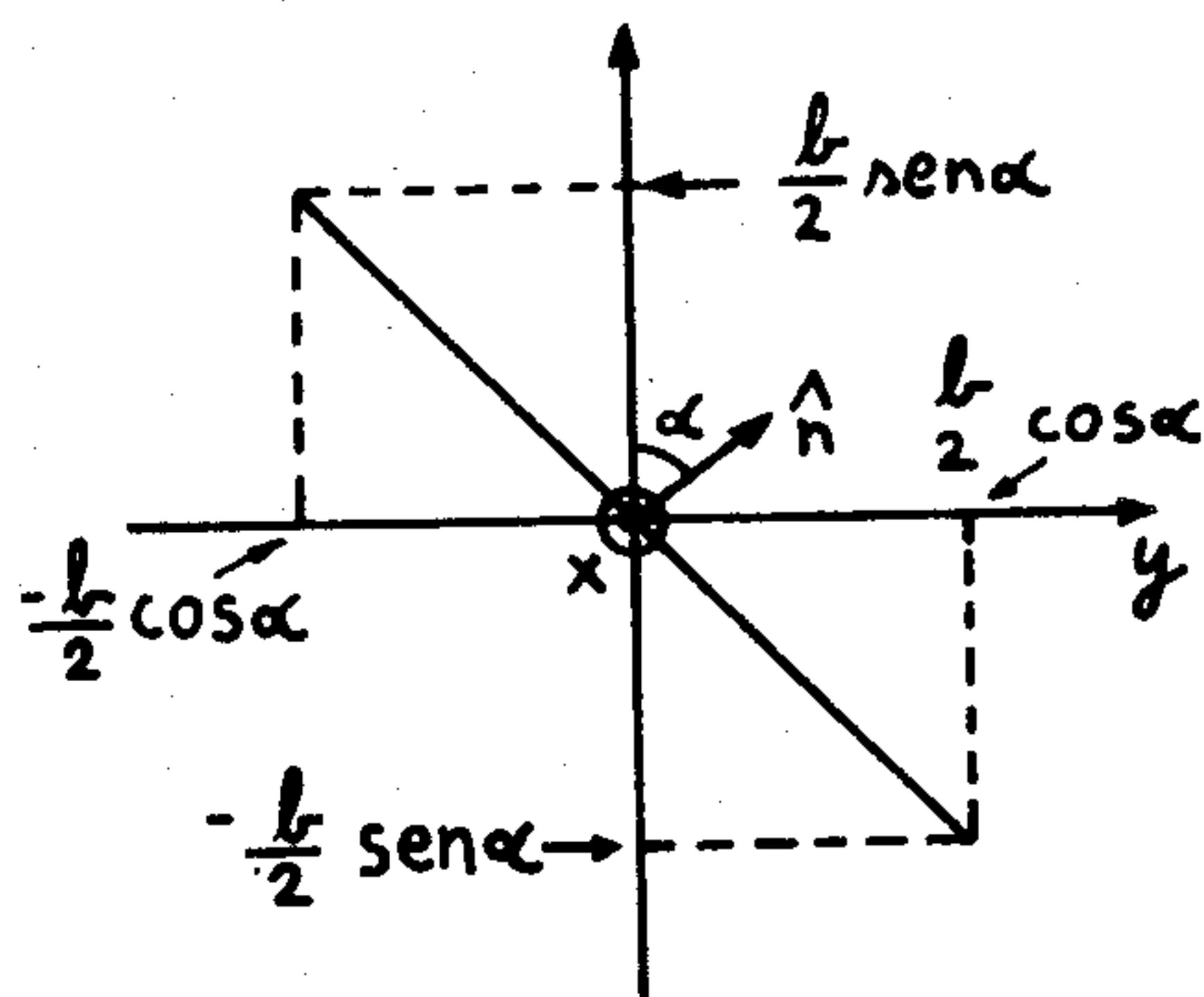
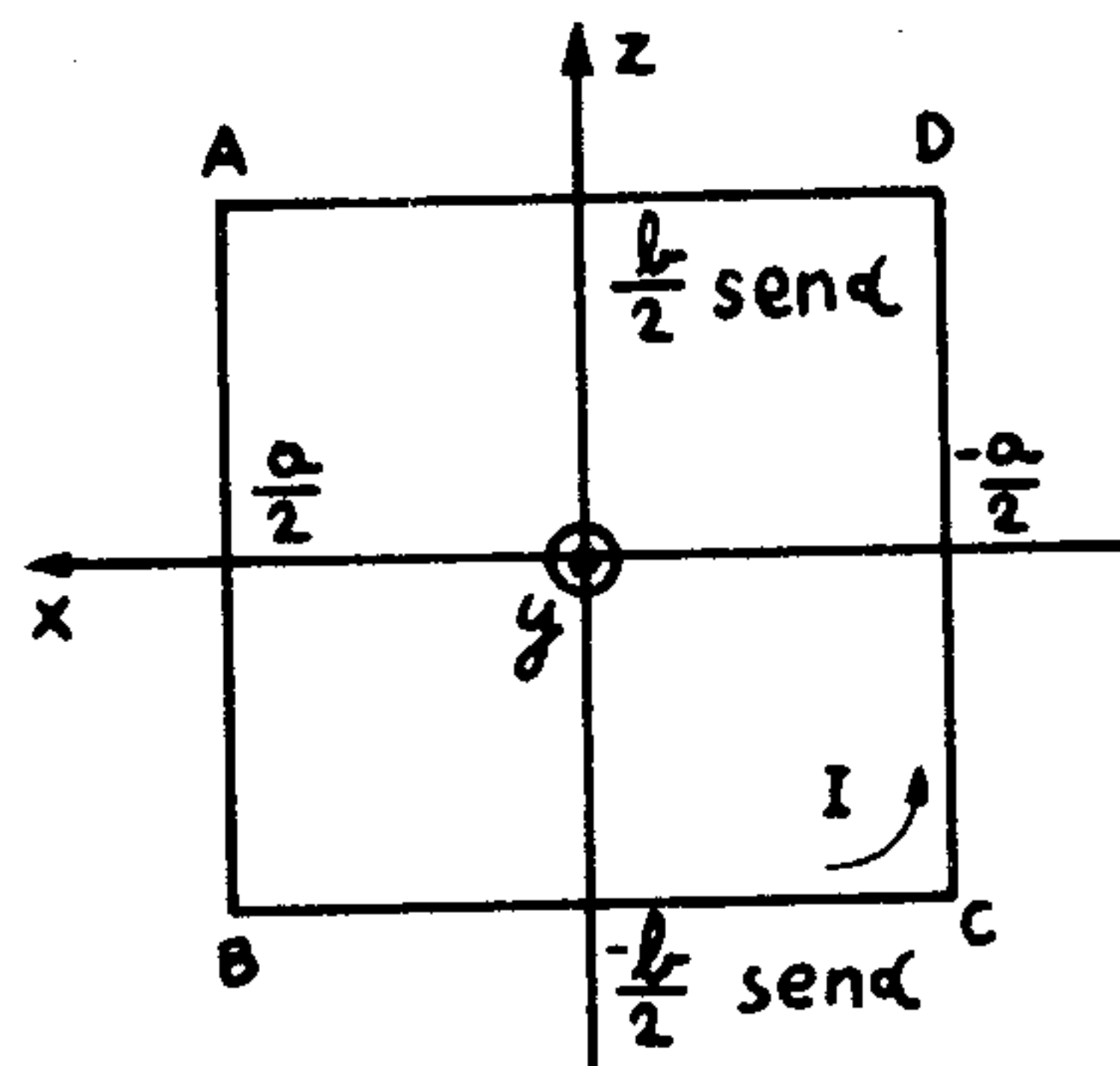


Fig. 137



El trazo CD está descrito por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{a}{2} \\ y = y \\ z = -y \operatorname{tg} \alpha \end{array} \right\} \quad \vec{r} = \left( -\frac{a}{2}, y, -y \operatorname{tg} \alpha \right)$$

y el torque es

$$\vec{T}_{CD} = I \int_{y=\frac{b}{2} \cos \alpha}^{-\frac{b}{2} \cos \alpha} \left[ (\vec{r} \cdot \vec{B}) \frac{d\vec{r}}{dy} - (\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dy}) \vec{B} \right] dy,$$

donde hemos escogido la variable de integración  $y$

$$\frac{d\vec{r}}{dy} = (0, 1, -\operatorname{tg} \alpha)$$

$$\vec{B}(x, z) = \vec{B}\left(-\frac{a}{2}, z\right) \simeq \vec{B}\left(-\frac{a}{2}, 0\right) + z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$\vec{B}(x, z) \simeq \vec{B}\left(-\frac{a}{2}, 0\right) - y \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$$

luego:

$$\vec{r} \cdot \vec{B} \simeq \left(-\frac{a}{2}, y, -y \operatorname{tg} \alpha\right) \cdot \vec{B}\left(-\frac{a}{2}, 0\right) - y \operatorname{tg} \alpha \left(-\frac{a}{2}, y, -y \operatorname{tg} \alpha\right) \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$$

y también:

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dy} = y + y \operatorname{tg}^2 \alpha = y(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{y}{\cos^2 \alpha}$$

Con esto, tenemos todo el integrando expresado en función de la variable  $y$  solamente; la integral es trivial, aunque un poco larga, y da como resultado:

$$\vec{T}_{CD} = I (\hat{j} \cos \alpha - \hat{k} \sin \alpha) \left\{ \frac{ab}{2} \hat{i} \cdot \vec{B}\left(-\frac{a}{2}, 0\right) + \frac{b^3 \sin \alpha}{12} (\hat{j} \cos \alpha - \hat{k} \sin \alpha) \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \left(-\frac{a}{2}, 0\right) \right\} - \frac{I b^3 \sin \alpha}{24} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$$

La contribución al torque producida por el segmento AB se calcula en forma muy similar; allí se tiene:

$$\vec{r} = \left(\frac{a}{2}, y, -y \operatorname{tg} \alpha\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dy} = (0, 1, -\operatorname{tg} \alpha)$$

$$\vec{B}(x, z) \simeq \vec{B}\left(\frac{a}{2}, 0\right) - y \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

y el torque es:

$$\vec{T}_{AB} = I \int_{-\frac{b}{2} \cos \alpha}^{\frac{b}{2} \cos \alpha} \left[ (\vec{r} \cdot \vec{B}) \frac{d\vec{r}}{dy} - (\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dy}) \vec{B} \right] dy$$

$$\begin{aligned} \vec{T}_{AB} = I (\hat{j} \cos \alpha - \hat{k} \sin \alpha) & \left\{ \frac{ab}{2} \hat{i} \cdot \vec{B} \left( \frac{a}{2}, 0 \right) - \frac{b^3 \sin \alpha}{12} (\hat{j} \cos \alpha - \hat{k} \sin \alpha) \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \left( \frac{a}{2}, 0 \right) \right\} + \frac{I b^3 \sin \alpha}{24} \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \left( \frac{a}{2}, 0 \right) \end{aligned}$$

En los segmentos DA y BC escogemos a x como la variable de integración; en DA, se tiene:

$$\vec{r} = (x, -\frac{b}{2} \cos \alpha, \frac{b}{2} \sin \alpha)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = (1, 0, 0) = \hat{i}$$

$$\vec{B}(x, z) = \vec{B}(x, \frac{b}{2} \sin \alpha) \simeq \vec{B}(0, \frac{b}{2} \sin \alpha) + x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} (0, \frac{b}{2} \sin \alpha)$$

y el torque es:

$$\vec{T}_{DA} = I \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ (\vec{r} \cdot \vec{B}) \frac{d\vec{r}}{dx} - (\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dx}) \vec{B} \right] dx$$

$$\begin{aligned} \vec{T}_{DA} = \frac{aI}{2} \hat{i} & \left\{ b(\hat{k} \sin \alpha - \hat{j} \cos \alpha) \cdot \vec{B} \left( 0, \frac{b}{2} \sin \alpha \right) + \frac{a^2}{6} \hat{i} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \left( 0, \frac{b}{2} \sin \alpha \right) \right\} - \\ & - \frac{a^3 I}{12} \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \left( 0, \frac{b}{2} \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

Análogamente, para el trazo BC, se tiene:

$$\vec{r} = (x, \frac{b}{2} \cos \alpha, -\frac{b}{2} \sin \alpha)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = (1, 0, 0) = \hat{i}$$

$$\vec{B}(x, z) = \vec{B}(x, -\frac{b}{2} \sin \alpha) \simeq \vec{B}(0, -\frac{b}{2} \sin \alpha) + x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} (0, -\frac{b}{2} \sin \alpha)$$

y el torque es:

$$\vec{T}_{BC} = I \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} \left[ (\vec{r} \cdot \vec{B}) \frac{d\vec{r}}{dx} - (\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dx}) \vec{B} \right] dx$$

$$\vec{T}_{BC} = \frac{aI}{2}\hat{i} \left\{ b(\hat{k} \sin \alpha - \hat{j} \cos \alpha) \cdot \vec{B}(0, -\frac{b}{2} \sin \alpha) - \frac{a^2}{6}\hat{i} \cdot \vec{B}(0, -\frac{b}{2} \sin \alpha) \right\} \\ + \frac{a^3I}{12} \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} (0, -\frac{b}{2} \sin \alpha).$$

El torque neto es la suma de los cuatro:

$$\vec{T} = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{BC} + \vec{T}_{CD} + \vec{T}_{DA} \\ \vec{T} = I (\hat{j} \cos \alpha - \hat{k} \sin \alpha) \left\{ \frac{ab}{2} \hat{i} \cdot [\vec{B}(-\frac{a}{2}, 0) - \vec{B}(\frac{a}{2}, 0)] + \right. \\ + \frac{b^3 \sin \alpha}{12} (\hat{j} \cos \alpha - \hat{k} \sin \alpha) \cdot \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} (-\frac{a}{2}, 0) - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} (\frac{a}{2}, 0) \right] \left. \right\} - \\ - \frac{Ib^3 \sin \alpha}{24} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} (-\frac{a}{2}, 0) - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} (\frac{a}{2}, 0) \right] + \frac{IabI}{2} (\hat{k} \sin \alpha - \hat{j} \cos \alpha) \cdot \\ \cdot [\vec{B}(0, \frac{b}{2} \sin \alpha) + \vec{B}(0, -\frac{b}{2} \sin \alpha)] + \frac{Ia^3I}{12} \hat{i} \cdot \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} (0, \frac{b}{2} \sin \alpha) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} (0, -\frac{b}{2} \sin \alpha) \right] - \frac{a^3I}{12} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} (0, \frac{b}{2} \sin \alpha) - \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} (0, -\frac{b}{2} \sin \alpha) \right].$$

El campo magnético y sus derivadas con respecto a x y z pueden ser desarrollados en serie en torno al origen; obteniendo un resultado más aproximado para el torque; despreciando los términos proporcionales

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x \partial z}, \text{ se obtiene:}$$

$$\vec{T} = Iab I (\hat{k} \sin \alpha - \hat{j} \cos \alpha) \cdot \vec{B}(0,0) + \frac{a^2 b I}{2} (\hat{k} \sin \alpha - \hat{j} \cos \alpha) \hat{i} \cdot \\ \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} (0,0).$$

II) El cálculo de la fuerza sobre la espira circular cuando  $\alpha = 0$  es análogo al que hicimos para la espira rectangular; en efecto, la fuerza que se ejerce sobre ella es:

$$\vec{F} = I \oint d\vec{\ell} \times \vec{B}(r,z)$$

pero cuando  $\alpha = 0$ , la ecuación de la espira es:

$$\begin{cases} r = a \\ z = 0, \end{cases}$$

de modo que

$$\vec{F} = - I \vec{B}(a,0) \times \oint d\vec{\ell} = \vec{0}.$$

Para el cálculo del torque, hagamos una figura de la espira:

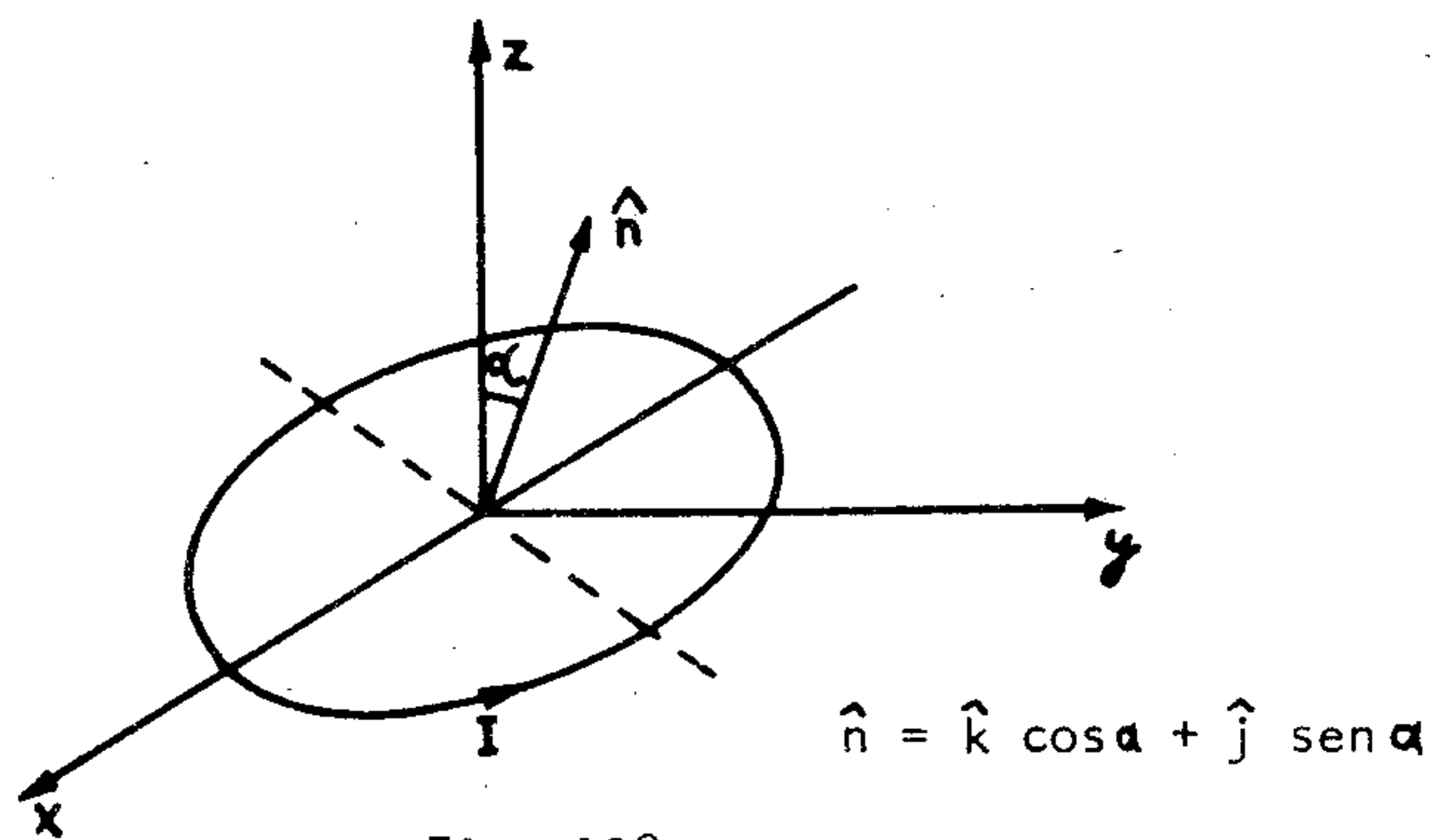


Fig. 138

Conviene hacer de inmediato un cambio de coordenadas de  $(0x\ yz)$  a  $(0x'\ y'z')$ , de modo que el eje  $Oz'$  tenga la dirección de  $\hat{n}$ :

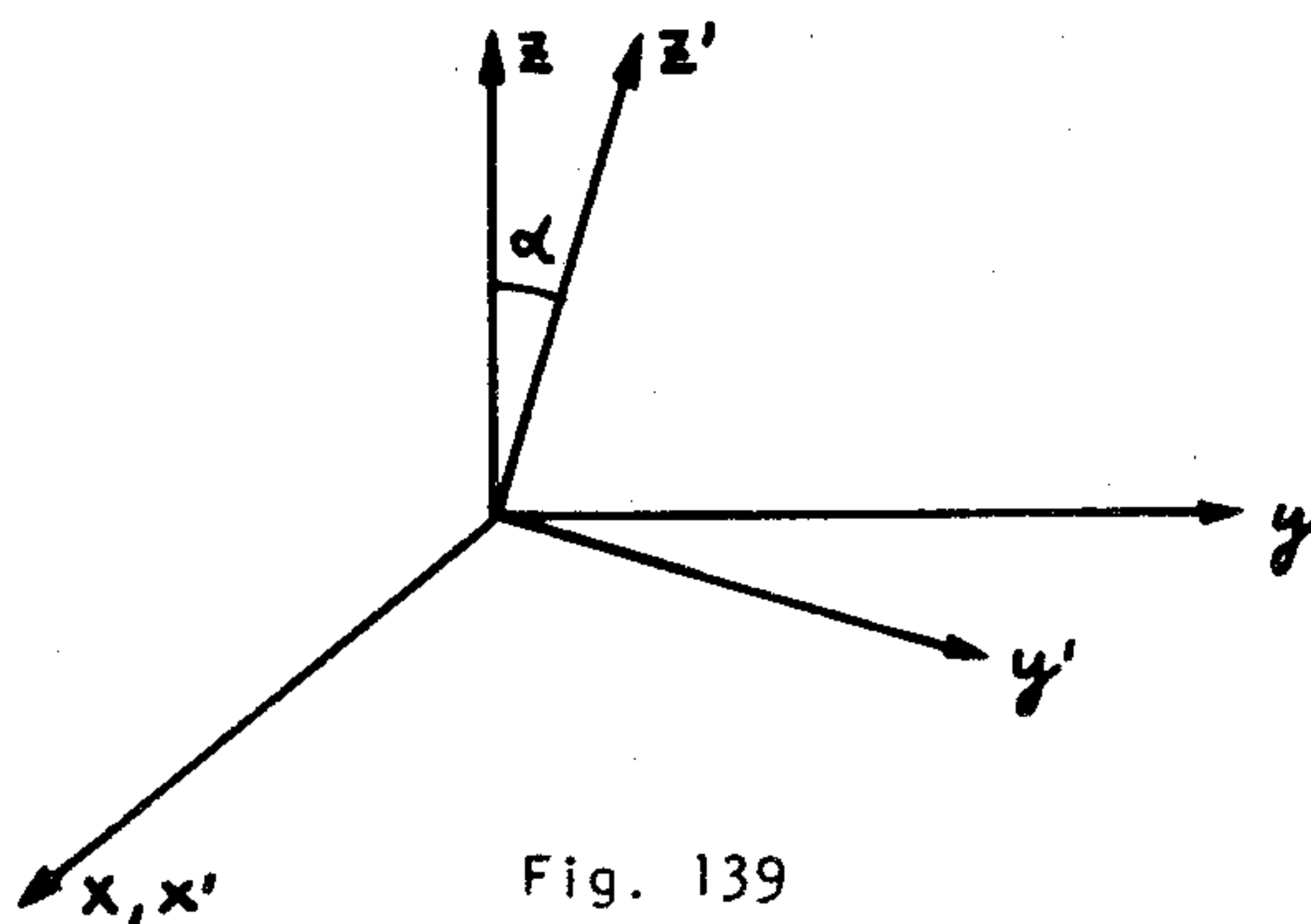


Fig. 139

Las ecuaciones del cambio son:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \cos \alpha + z' \sin \alpha \\ z = y' \sin \alpha + z' \cos \alpha \end{cases}$$

En las coordenadas primitivas  $0xyz$ , definimos las coordenadas polares  $(r, \phi, z)$  mediante:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

Definimos también otras nuevas coordenadas polares  $(r', \phi', z')$  mediante:

$$\begin{cases} x' = r' \cos \phi' \\ y' = r' \sin \phi' \\ z' = z' \end{cases}$$

De donde resulta que las ecuaciones de transformación entre  $(r, \phi, z)$  y  $(r', \phi', z')$  son:

$$\begin{cases} r = \sqrt{r'^2 \cos^2 \phi' + (z' \operatorname{sen} \alpha + r' \operatorname{sen} \phi' \cos \alpha)^2} \\ \operatorname{tg} \phi = \frac{z' \operatorname{sen} \alpha + r' \cos \alpha \operatorname{sen} \phi'}{r' \cos \phi'} \\ z = z' \cos \alpha - r' \operatorname{sen} \phi' \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

El campo magnético  $\vec{B}(r, z)$  puede ser desarrollado en serie en primera aproximación en torno al origen:

$$\vec{B}(r, z) \approx \vec{B}(0, 0) + r \frac{\partial \vec{B}}{\partial r}(0, 0) + z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}(0, 0),$$

y, escrito en las nuevas coordenadas, queda:

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, z) \approx \vec{B}(0, 0) + \sqrt{r'^2 \cos^2 \phi' + (z' \operatorname{sen} \alpha + r' \operatorname{sen} \phi' \cos \alpha)^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial r}(0, 0) \\ + (z' \cos \alpha - r' \operatorname{sen} \phi' \operatorname{sen} \alpha) \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}(0, 0). \end{aligned}$$

La ecuación de la espira en las coordenadas nuevas es:

$$\begin{cases} r' = a \\ z' = 0, \end{cases}$$

de modo que el campo magnético allí será:

$$\vec{B} \approx \vec{B}_0 + a \sqrt{\cos^2 \phi' + \operatorname{sen}^2 \phi' \cos^2 \alpha} \vec{B}_r - a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi' \vec{B}_z,$$

donde hemos introducido las abreviaturas  $\vec{B}_0, \vec{B}_r$  y  $\vec{B}_z$ , por  $\vec{B}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial r}(0, 0)$  y  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}(0, 0)$ , respectivamente.

El torque que se ejerce sobre la espira es, tal como en el caso de la espira rectangular:

$$\vec{T} = I \oint_{\text{espira}} \left[ (\vec{r}' \cdot \vec{B}) d\vec{r}' - (\vec{r}' \cdot d\vec{r}') \vec{B} \right];$$

o sea, eligiendo como variable de integración a  $\phi'$ ,

$$\vec{T} = I \int_0^{2\pi} \left[ (\vec{r}' \cdot \vec{B}) \frac{d\vec{r}'}{d\phi'} - (\vec{r}' \cdot \frac{d\vec{r}'}{d\phi'}) \vec{B} \right] d\phi'.$$

En este caso,



$$\vec{r}' = a (\hat{i}' \cos \phi' + \hat{j}' \sin \phi')$$

$$\frac{d\vec{r}'}{d\phi'} = a (-\hat{i}' \sin \phi' + \hat{j}' \cos \phi')$$

$$\text{Luego } \vec{r}' \cdot \frac{d\vec{r}'}{d\phi'} = 0$$

$$\vec{r}' \cdot \vec{B} = \vec{r}' \cdot \vec{B}_0 + a \sqrt{\cos^2 \phi' + \sin^2 \phi' \cos^2 \alpha} \vec{r}' \cdot \vec{B}_r - a \sin \alpha \sin \phi' \vec{r}' \cdot \vec{B}_z$$

$$\vec{r}' \cdot \vec{B} = a (\vec{B}_0 \cdot \hat{i}' \cos \phi' + \vec{B}_0 \cdot \hat{j}' \sin \phi') + a^2 \sqrt{\cos^2 \phi' + \sin^2 \phi' \cos^2 \alpha} \cdot$$

$$\cdot (\vec{B}_r \cdot \hat{i}' \cos \phi' + \vec{B}_r \cdot \hat{j}' \sin \phi') - a^2 \sin \alpha \sin \phi' (\vec{B}_z \cdot \hat{i}' \cos \phi' + \vec{B}_z \cdot \hat{j}' \sin \phi').$$

Introduciendo esto en la expresión del torque, puede integrarse; conviene calcularlo componente por componente, y el resultado es:

$$\vec{T} \cdot \hat{i}' = -a \left\{ a \vec{B}_0 \cdot \hat{j}' \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi' d\phi' + \right. \\ \left. + a \vec{B}_r \cdot \hat{i}' \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \phi' + \cos^2 \alpha \sin^2 \phi'} \cos \phi' \sin \phi' d\phi' + \right.$$

$$\vec{T} \cdot \hat{j}' = a \left\{ a \vec{B}_0 \cdot \hat{i}' \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' + \right. \\ \left. + a \vec{B}_r \cdot \hat{i}' \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \phi' + \cos^2 \alpha \sin^2 \phi'} \cos^2 \phi' d\phi' + \right. \\ \left. + a \vec{B}_r \cdot \hat{j}' \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \phi' + \cos^2 \alpha \sin^2 \phi'} \sin^2 \phi' d\phi' \right\};$$

$$\vec{T} \cdot \hat{k}' = 0.$$

Las integrales tienen los siguientes valores:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' = \pi ;$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \phi' + \cos^2 \alpha \sin^2 \phi'} \cos \phi' \sin \phi' d\phi' =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \phi' \sin^2 \alpha} \cos \phi' \sin \phi' d\phi' =$$



$$= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \phi' \sin^2 \alpha} \cos \phi' \sin \phi' d\phi' =$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha} x dx \quad (x = \cos \phi')$$

= 0, pues el integrando es una función impar y la región de integración es simétrica con respecto al origen. Las integrales que restan, que las llamaremos  $S(\alpha)$  y  $C(\alpha)$ , son elípticas, y no pueden integrarse sino numéricamente:

$$S(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi'} \sin^2 \phi' d\phi' = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi'} \sin^2 \phi' d\phi'$$

$$C(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi'} \cos^2 \phi' d\phi' = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \phi'} \cos^2 \phi' d\phi'$$

Las componentes del torque son, entonces:

$$\vec{T} \cdot \hat{i}' = -\pi a^2 I \vec{B}_0 \cdot \hat{j}' - a^3 I S(\alpha) \vec{B}_r \cdot \hat{j}'$$

$$\vec{T} \cdot \hat{j}' = \pi a^2 I \vec{B}_0 \cdot \hat{i}' + a^3 I S(\alpha) \vec{B}_r \cdot \hat{j}'$$

$$\vec{T} \cdot \hat{k}' = 0.$$

El torque es:

$$\vec{T} = (\vec{T} \cdot \hat{i}') \hat{i}' + (\vec{T} \cdot \hat{j}') \hat{j}' + (\vec{T} \cdot \hat{k}') \hat{k}',$$

que puede reescribirse dando:

$$\vec{T} = \pi a^2 I \hat{k}' \times \vec{B}_0 - a^3 I \cdot \left\{ S(\alpha) (\vec{B}_r \cdot \hat{j}') \hat{i}' - C(\alpha) (\vec{B}_r \cdot \hat{i}') \hat{j}' \right\};$$

para obtener el torque expresado en el sistema antiguo de coordenadas, basta sustituir los vectores  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  y  $\hat{k}'$  expresados en función de  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ :

$$\begin{cases} \hat{i}' = \hat{i} \\ \hat{j}' = \hat{j} \cos \alpha - \hat{k} \sin \alpha \\ \hat{k}' = \hat{j} \sin \alpha + \hat{k} \cos \alpha \equiv \hat{n} \end{cases}$$

La sustitución de estas igualdades no simplifica la expresión de  $\vec{T}$ , y no vale la pena hacerla.

Hay otra forma de calcular el torque que se ejerce sobre una espira circulada por una corriente  $I$  en un campo magnético  $\vec{B}$ . En efecto, podemos suponer una superficie arbitraria, abierta, cuyo contorno se apoye sobre la espira. Esta superficie la dividimos en pequeñas espiras ficticias de corriente  $I$  y de superficie  $ld\vec{S}$ , de modo que cada una de ellas constituye un

pequeño dipolo magnético  $d\vec{m} = \mu_0 I d\vec{S}$ . Suponemos también que la corriente circula en todas las espiras en el mismo sentido de modo que las espiras contiguas cancelan sus corrientes entre sí; la única corriente que sobrevive es la de la espira real:

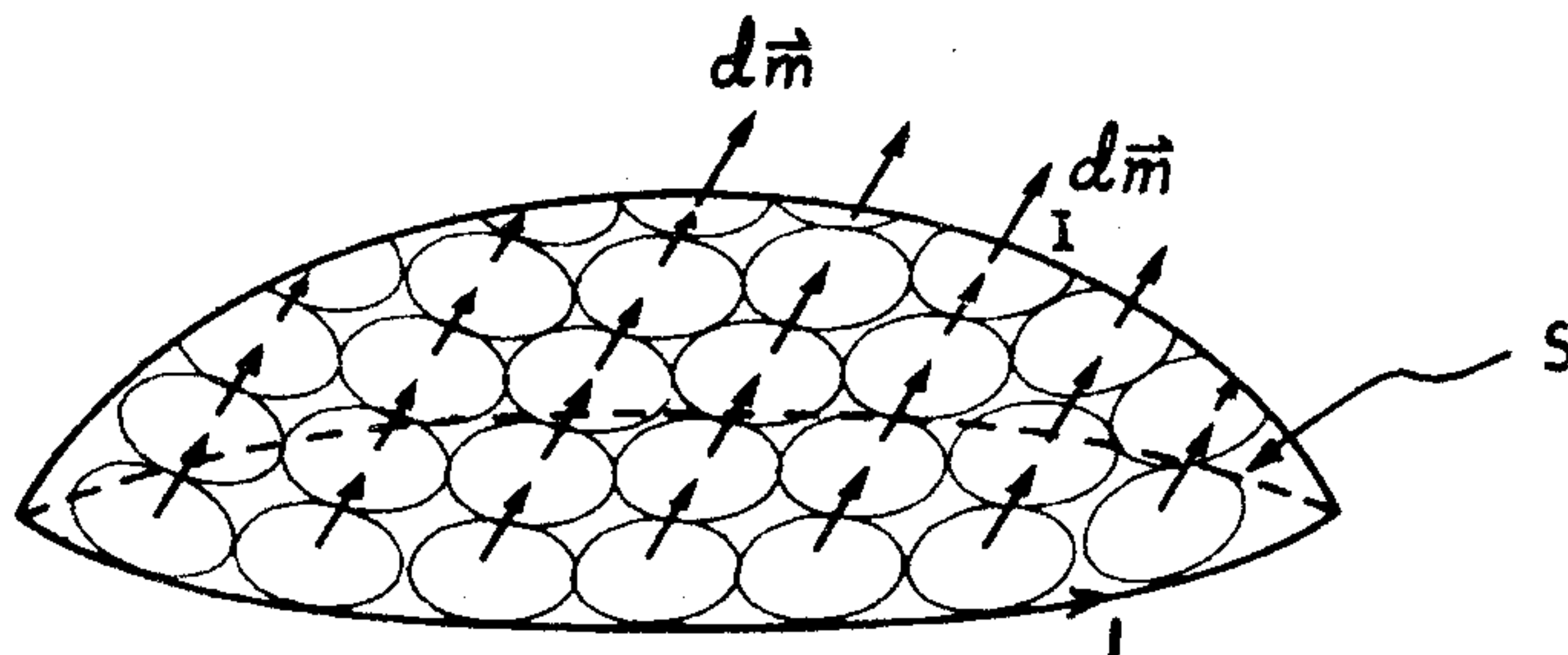


Fig. 140

El torque que se ejerce sobre cada uno de los dipolos es:

$$d\vec{T} = d\vec{m} \times \vec{H} = I d\vec{S} \times \vec{B},$$

y el torque neto será:

$$\vec{T} = I \iint_S d\vec{S} \times \vec{B}$$

Se deja propuesto calcular los torques mediante este método.

### PROBLEMA 38.-

Un átomo de hidrógeno se encuentra en un campo magnético uniforme  $\vec{B}_0$ , de modo que la normal al plano de la órbita (circular) forma un ángulo  $\alpha$  con respecto a la dirección del campo.

- Demuestre que la órbita toma un movimiento de precesión por efecto del campo magnético; calcule la velocidad angular de precesión;
- Considerando al electrón girando en su órbita como un pequeño dipolo magnético, calcule el campo magnético total fuera de la órbita.

### Resolución.-

Sea  $\hat{n}$  la normal a la órbita, que escogemos en el mismo sentido en que avanzaría un tornillo derecho que girase junto con el electrón. Suponemos que el núcleo está inmóvil en el origen, y que  $\vec{B}$  tiene la dirección del eje Oz.

- Debido al movimiento del electrón, éste tiene un momentum angular  $\vec{L}$  y por consiguiente existe un momento dipolar magnético  $\vec{m} = \gamma \vec{L}$ , donde  $\gamma$  es la razón giromagnética (ver al final del problema):

$$\gamma = \frac{\mu_0 q}{2m} = - \frac{\mu_0 e}{2m}$$

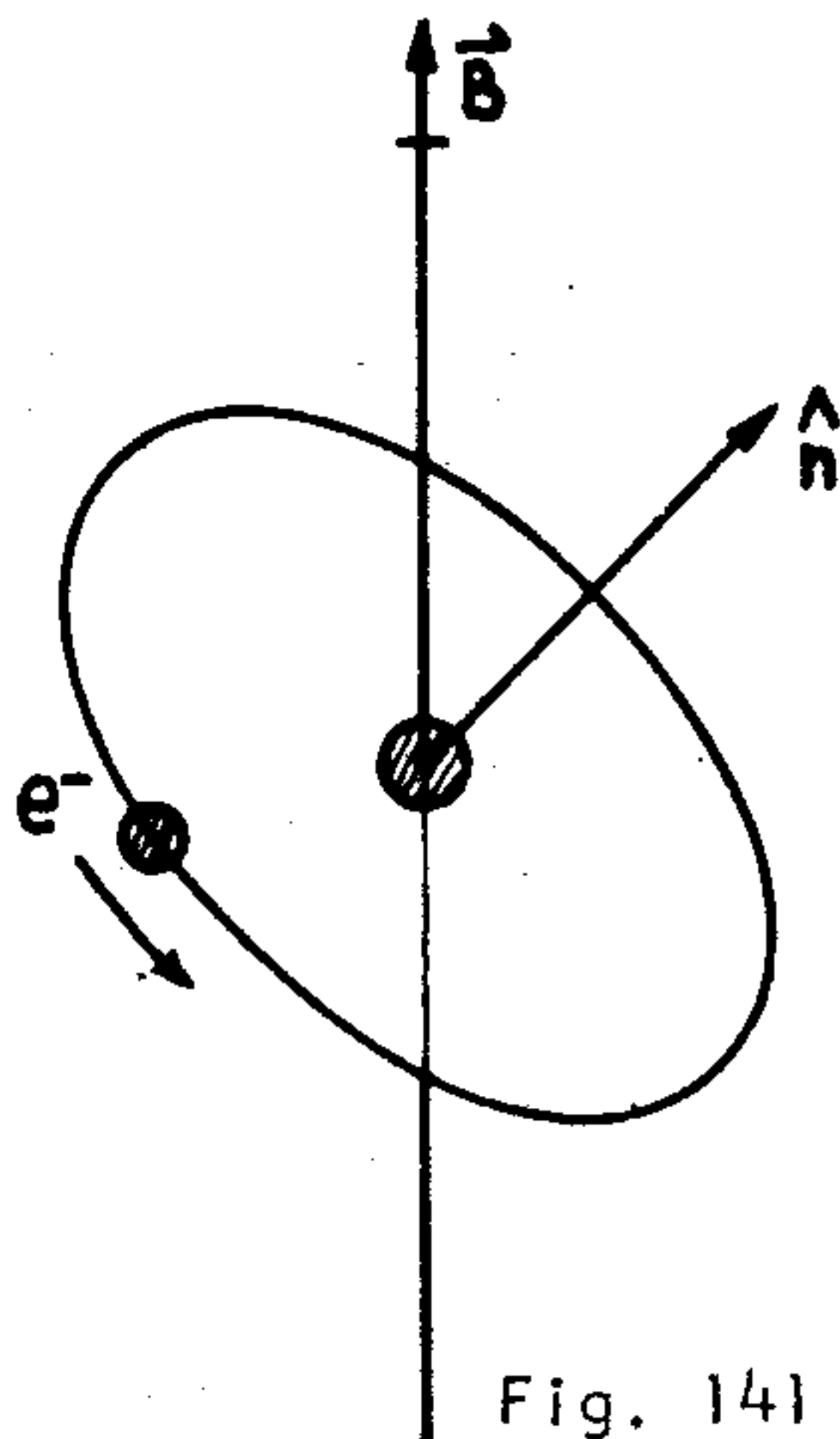


Fig. 141

El momentum angular es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = m R v \hat{n},$$

donde  $m$ ,  $R$  y  $v$  son la masa del electrón, el radio de la órbita y la velocidad del electrón, respectivamente.

La velocidad puede calcularse igualando la fuerza centrífuga con la atracción del núcleo:

$$\frac{m v^2}{R} = |q\vec{E}| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

luego:

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m R}} ;$$

luego:

$$\vec{L} = e \sqrt{\frac{m R}{4\pi\epsilon_0}} \hat{n}$$

$$\vec{m} = -\frac{\mu_0 e^2}{2} \sqrt{\frac{R}{4\pi\epsilon_0 m}} \hat{n}$$

El hecho de que exista un momento dipolo magnético en un campo magnético implica la existencia de un torque:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{H}$$

Este torque es igual a la derivada del momentum angular con respecto al tiempo, y es el responsable del movimiento de precesión; en efecto,

$$\hat{n} = \hat{i} \text{ sen } \alpha \cos \phi + \hat{j} \text{ sen } \alpha \sin \phi + \hat{k} \cos \alpha$$

$$\text{luego: } \frac{d\vec{L}}{dt} = e \sqrt{\frac{m R}{4\pi\epsilon_0}} (-\text{sen } \alpha \sin \phi \dot{\phi} \hat{i} + \text{sen } \alpha \cos \phi \dot{\phi} \hat{j});$$

por otra parte el torque:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{H} = \frac{\mu_0 e^2}{2} \sqrt{\frac{R}{4\pi\epsilon_0 m}} \hat{n} \times H_0 \hat{k}$$

$$\vec{T} = \frac{e^2 B_0}{2} \sqrt{\frac{R}{4\pi \epsilon_0 m}} (\hat{i} \sin \alpha \sin \phi - \hat{j} \sin \alpha \cos \phi)$$

e igualándolo con  $\frac{d\vec{T}}{dt}$ , se obtiene:

$$\dot{\phi} = \frac{eB_0}{2m}$$

Esto demuestra que la normal a la órbita,  $\hat{n}$ , rota en torno al campo magnético con frecuencia constante, manteniendo un ángulo constante con él; ésta es la precesión de Larmor, y es de fundamental importancia para la teoría del paramagnetismo.

b) El campo magnético total es el campo  $\vec{B}_0$  más el producido por el electrón que gira en torno al núcleo; fuera de la órbita no existen corrientes, de modo que

$$\vec{H} = -\nabla V_m,$$

donde  $V_m$  es el potencial magnético escalar; este potencial, para un dipolo  $\vec{m}$  es:

$$V_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi \mu_0 r^3}$$

$$V_m = -\frac{e^2}{8\pi} \sqrt{\frac{R}{4\pi \epsilon_0 m}} \cdot \frac{\hat{n} \cdot \hat{r}}{r^3}$$

Si

$$\vec{r} = r (\sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k})$$

y

$$\hat{n} = (\sin \alpha \cos \phi' \hat{i} + \sin \alpha \sin \phi' \hat{j} + \cos \alpha \hat{k}),$$

$$(\phi' = \phi t + \beta),$$

entonces el coseno del ángulo  $\gamma$  que forman  $\vec{r}$  y  $\vec{n}$  está dado por

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos (\phi - \phi'),$$

y el campo magnético producido por el electrón girando será:

$$\vec{B}_{at} = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi} \sqrt{\frac{R}{4\pi \epsilon_0 m}} \nabla \left( \frac{\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos (\phi - \phi')}{r^2} \right)$$

El gradiente en coordenadas esféricas es:

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

y de aquí obtenemos de inmediato:

$$\vec{B}_{at} = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi r^3} \sqrt{\frac{R}{4\pi \epsilon_0 m}} \left\{ -2\hat{r} \left[ \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos (\phi - \phi') \right] + \right.$$



$$+ \hat{e}_\theta \left[ -\sin\theta \cos\alpha + \cos\theta \sin\alpha \cos(\phi-\phi') \right] + \hat{e}_\phi \left[ -\sin\alpha \sin(\phi-\phi') \right] \Big\}$$

(recordemos que  $\phi' = \dot{\phi}t + \beta$ , de modo que  $\vec{B}_{at}$  depende explícitamente de  $r, \theta, \phi$  y  $t$ ).

El campo magnético total será entonces:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{at}$$

Nota 1.

En la primera parte del problema, hemos hecho implícitamente una serie de hipótesis, por ejemplo, que el campo magnético es suficientemente pequeño como para no romper el átomo por efecto de la fuerza de Lorentz, que el ángulo  $\alpha$  es constante, etc. Esto requiere una discusión más detallada, y el resultado a que se llega, llamado teorema de Lamor, es más general que nuestro ejemplo (que es un caso particular de aquél); ver Bleaney and Bleaney: "Electricity and Magnetism", pág. 753.

Nota 2.

Deduzcamos una expresión más general para el dipolo magnético  $\vec{m}$ , válida para un cuerpo en general.

Sabemos que para una espira de corriente,

$$\Delta \vec{m} = \mu_0 i \Delta \vec{S};$$

por un teorema de geometría diferencial,

$$\Delta \vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{\ell},$$

donde la integral se realiza sobre la espira; luego:

$$\Delta \vec{m} = \frac{\mu_0}{2} \oint \vec{r} \times i d\vec{\ell};$$

pero la corriente  $i$  es igual a  $j \Delta S$ , donde  $j$  es la densidad de corriente (en módulo), y  $\Delta S$  un elemento de área perpendicular a  $\vec{j}$ ; y como  $\vec{j}$  es colineal con  $d\vec{\ell}$  resulta:

$$\vec{m} = \frac{\mu_0}{2} \iiint \vec{r} \times \vec{j} d\tau.$$

Supongamos que el cuerpo tiene una densidad de carga por unidad de masa constante e igual a  $q/m$ , donde  $q$  y  $m$  son la carga y la masa total del cuerpo; entonces, usando la definición de la densidad de corriente  $\vec{j}$ :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \frac{dq}{dm} \frac{dm}{d\tau} \vec{v} = \frac{q}{m} \frac{dm}{d\tau} \vec{v},$$

resulta:

$$\vec{m} = \frac{\mu_0 q}{2m} \iiint \vec{r} \times \vec{v} dm = \frac{\mu_0 q}{2m} \vec{L},$$

que es el resultado al que queríamos llegar; la cantidad

$$\gamma \equiv \frac{\mu_0 q}{2m}$$

recibe el nombre de razón giromagnética;  $\vec{L}$  es el momentum angular total del cuerpo.

En el caso de una sola partícula puntual que gira describiendo una circunferencia, el resultado es el mismo, aunque ya no se puede hacer el cálculo utilizando una integral de volumen; supongamos que la partícula es de carga  $q$  y masa  $m$ , y describe la órbita de tal modo que la normal  $\hat{n}$  a ella cumple con la regla del tornillo derecho; entonces

$$\vec{m} = \mu_0 i \Delta \vec{S} = \mu_0 i \pi R^2 \hat{n}.$$

La corriente  $i$  es

$$i = \frac{dq}{dt},$$

y si tomamos una vuelta de la partícula,

$$i = \frac{q}{T},$$

donde  $T$  es el período de revolución; como  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , resulta

$$\vec{m} = \frac{\mu_0 q R^2 \omega}{2} \hat{n} = \frac{\mu_0 q}{2m} \cdot m R^2 \omega \hat{n}$$

$$\vec{m} = \frac{\mu_0 q}{2m} \vec{L}$$

que es lo que queríamos demostrar.

### PROBLEMA 39.-

- Escriba la expresión matemática y demuestre la fórmula de Neumann.
- Se tienen dos anillos conductores cuyos planos son paralelos al plano (Oxy) de un sistema cartesiano de coordenadas Oxyz; los anillos llevan corrientes iguales y en el mismo sentido, y tienen radios  $a$  y  $b$ ,  $a > b$ ; están separados por una distancia  $d$  y sus centros están sobre el eje Oz.

Calcule el campo magnético  $\vec{B}$  en el centro del anillo más chico producido sólo por la corriente que circula por el anillo más grande. Suponiendo que el campo magnético es uniforme ( $d \gg a$ ) en toda la sección del anillo más chico, calcule la inductancia mutua entre los circuitos.

- Usando la fórmula de Neumann demuestre que:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{b}{c} \oint d\vec{\ell}_1 \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) (1 + \frac{2ab}{c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{6a^2b^2}{c^4} \cos^4 \frac{\theta}{2} + \frac{20a^2b^2}{c^6} \cos^6 \frac{\theta}{2} + \dots) d\theta$$

en que  $c = \sqrt{(a+b)^2 + d^2}$  (Escriba  $d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$ ,  $\cos\theta$  y  $r$  en potencias de  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  y desarrolle  $r^{-1}$  en potencias de  $\frac{4ab}{c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$ , usando el desarrollo en serie de Taylor).



c) Utilizando que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^p x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots p} \frac{\pi}{2}$$

con  $p = \text{número par}$ , demuestre que

$$m = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2 c^3} \left( 1 + \frac{3 ab}{c^2} + \frac{75 a^2 b^2}{8 c^4} + \dots \right)$$

y compare este resultado con el obtenido en la parte b).

Resolución.-

a) Si se tienen dos circuitos,  $C_1$  y  $C_2$  recorridos por sendas corrientes  $i_1$  e  $i_2$ , como se muestra en la figura siguiente:

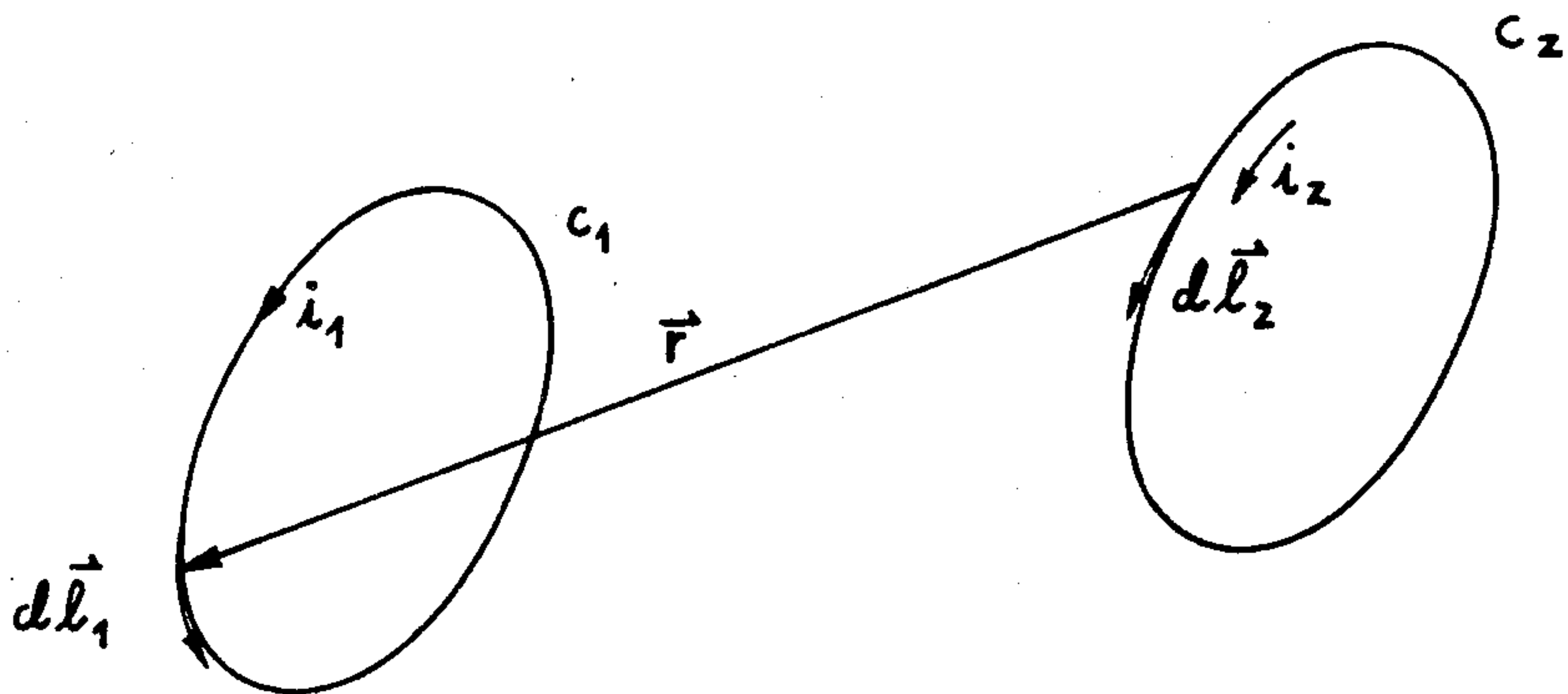


Fig. 142

entonces el flujo magnético enlazado por el circuito  $C_1$  debido al campo magnético  $\vec{B}_2$  producido por el circuito  $C_2$ , es:

$$\phi_{12} = \iint_{S_1(C_1)} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_1(C_1)} \nabla \times \vec{A}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

donde  $S_1(C_1)$  es una superficie arbitraria, abierta, cuyo contorno es el circuito  $C_1$ ; por el teorema de Stokes, se tiene que:

$$\phi_{12} = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1 ;$$

esta integral se realiza en el mismo sentido en que la corriente  $i_1$  recorre el circuito  $C_1$ .

Pero

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2}{r},$$

donde  $r = |\vec{r}|$ ; luego:

$$\phi_{12} = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r},$$

y si definimos la inductancia  $M_{12}$  del circuito  $C_1$  debido al circuito  $C_2$  como

$$\phi_{12} = i_2 M_{12},$$

se tiene

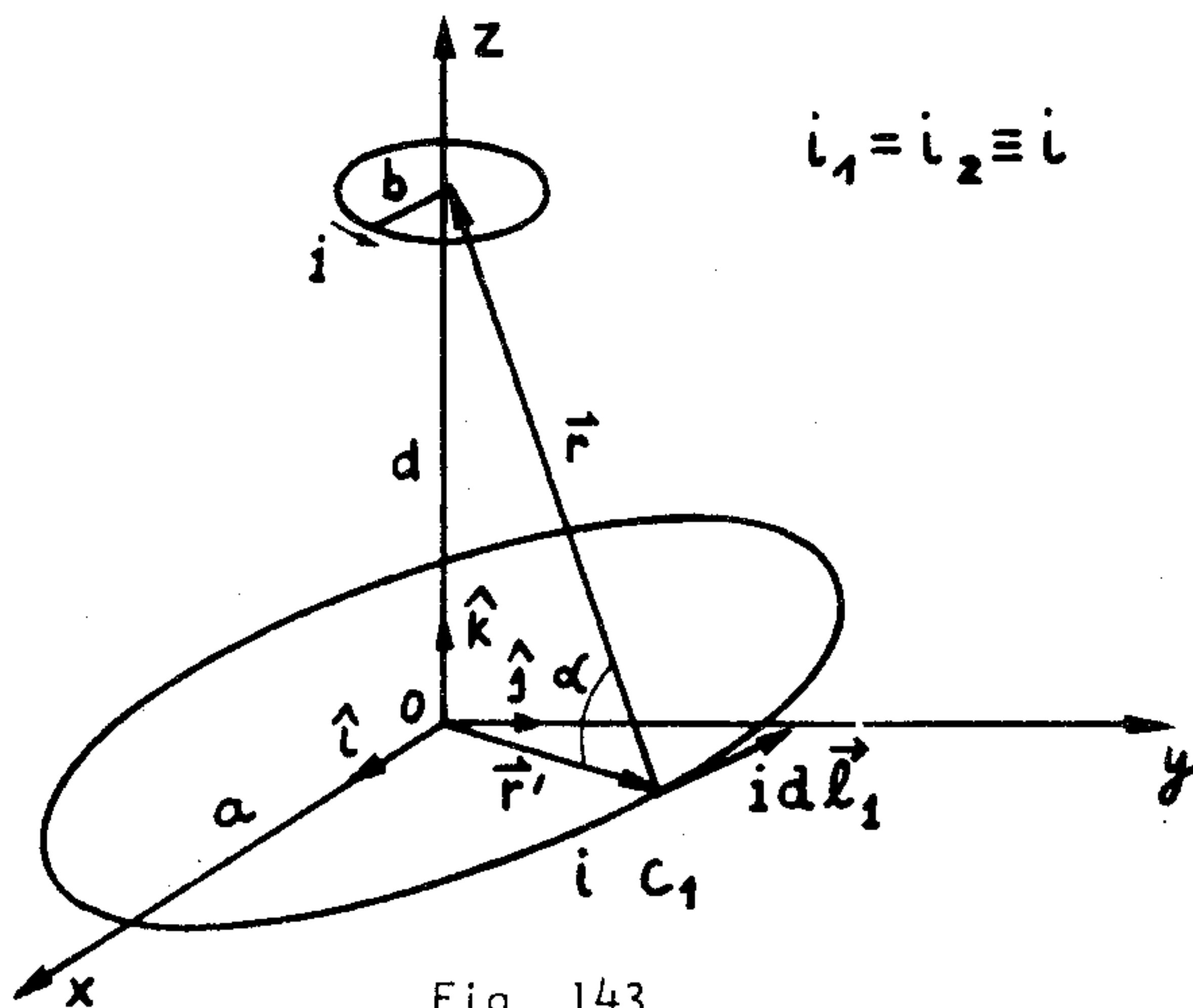
$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r}.$$

Dada la simetría en los índices 1 y 2, resulta evidente que  $M_{12} = M_{21}$ , por lo que definimos una inductancia mutua entre los circuitos:

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r}$$

donde las integrales se realizan en el mismo sentido en que las corrientes recorren sus respectivos circuitos.

b) Hagamos una figura de la geometría de la situación:



El campo magnético  $\vec{B}$  en el centro del anillo chico ( $z = d$ ) producido por el anillo grande es:

$$\vec{B}(d) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}}{r^3} ;$$

por simetría,  $\vec{B}(d) = B_z(d) \hat{k}$ ;

$$B_z(d) = \vec{B}(d) \cdot \hat{k} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \times \vec{r} \cdot \hat{k}}{r^3}$$

$$B_z(d) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\ell_1 \cos\alpha}{r^2}$$

$$B_z(d) = \frac{\mu_0 i \cos\alpha}{4\pi r^2} \oint_{C_1} d\ell_1 = \frac{\mu_0 i \cos\alpha}{4\pi r^2} 2\pi a$$

y como

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{d^2 + a^2}},$$

se tiene:

$$\vec{B}(d) = \frac{\mu_0 i a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}} \hat{k}$$

El flujo a través del anillo chico debido al campo magnético  $\vec{B}_1$  producido por el anillo grande es:

$$\phi_{21} = \iint_{S_2(C_2)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 ,$$

pero como  $\vec{B}_1 = \vec{B}(d)$  en toda la sección del anillo chico ( $d \gg a, b$ ), se tiene:

$$\phi_{21} \approx \vec{B}(d) \cdot \iint_{S_2(C_2)} d\vec{S}_2 ,$$

la inductancia mutua entre los circuitos será

$$M = \frac{\phi_{21}}{i} \approx \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}$$

c) Hagamos un esquema más completo de la situación:

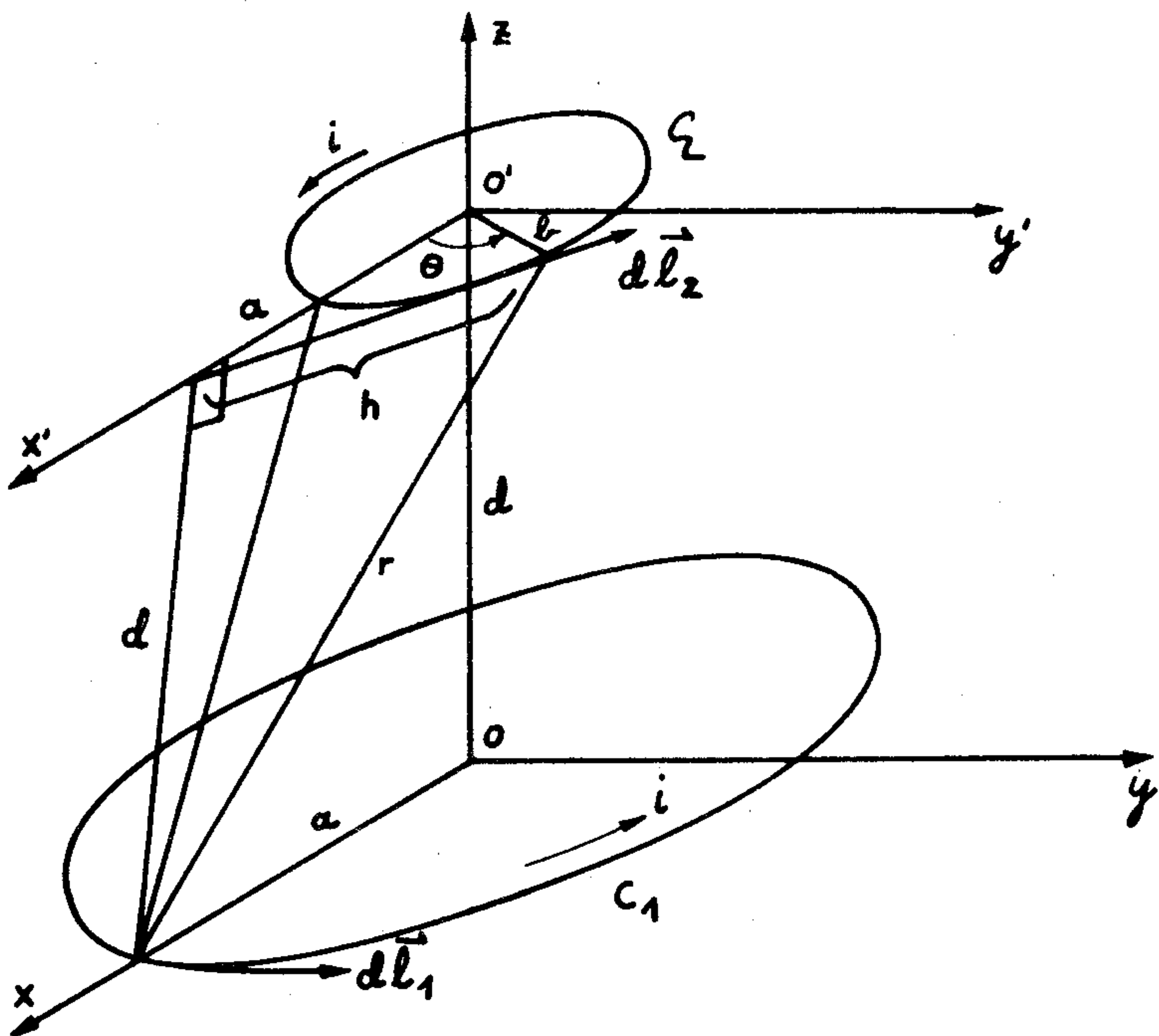


Fig. 144

La geometría de la figura nos dice que:

$$r^2 = d^2 + h^2$$

$$h^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

$$d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 = dl_1 dl_2 \cos \theta$$

$$dl_2 = b d\theta$$

Luego:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} dl_1 \int_0^{2\pi} \frac{b \cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2 - 2ab \cos \theta}}$$

Pero

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$$

$$\text{Luego } a^2 + b^2 + d^2 - 2ab \cos \theta = (a + b)^2 + d^2 - 4ab \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$= c^2 - 4ab \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Entonces: } M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} dl_1 \int_0^{2\pi} \frac{b(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) d\theta}{\sqrt{c^2 - 4ab \cos^2 \frac{\theta}{2}}}$$

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{b}{c} \oint_{C_1} d\ell_1 \int_0^{2\pi} \left( 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{4ab}{c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

Pero sabemos que  $d \gg a, b$ ; luego tenemos:

$$\frac{4ab}{c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \ll 1,$$

y aprovechando el desarrollo de Taylor siguiente:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots,$$

tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{4ab}{c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1/2} &= 1 + \frac{2ab}{c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{6a^2b^2}{c^4} \cos^4 \frac{\theta}{2} + \\ &+ \frac{20a^3b^3}{c^6} \cos^6 \frac{\theta}{2} + \dots \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado lo que se nos pedía.

d) Prosigamos con el cálculo de  $M$ ; la integral

$$\oint_{C_1} d\ell_1$$

es trivial, siendo igual a  $2\pi a$ ; con esto, nos queda solamente por calcular

$$\int_0^{2\pi} \left( 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \left( 1 + \frac{2ab}{c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \dots \right) d\theta;$$

efectuando el producto de ambos paréntesis, y haciendo el cambio de variable

$$\frac{\theta}{2} = \phi,$$

se tiene:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0 ab}{c} \int_0^{\pi} \left[ -1 + \left( 2 - \frac{2ab}{c^2} \right) \cos^2 \phi + \left( \frac{4ab}{c^2} - \frac{6a^2b^2}{c^4} \right) \cos^4 \phi + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{12a^2b^2}{c^4} - \frac{20a^3b^3}{c^6} \right) \cos^6 \phi + \frac{40a^3b^3}{c^6} \cos^8 \phi \right] d\phi \end{aligned}$$

donde hemos despreciado el término proporcional a  $\frac{a^4b^4}{c^8}$ .

La integral

$$\int_0^{\pi} \cos^p x dx; p = \text{número par},$$

es igual al doble de la integral de  $\cos^p x$  entre 0 y  $\pi/2$ :

$$\int_0^{\pi} \cos^p x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots p} \pi;$$

utilizando este resultado, y reduciendo términos semejantes, se obtiene de inmediato el resultado buscado:

$$M = \frac{\mu_0 a^2 b^2 \pi}{2 [(a+b)^2 + d^2]^{3/2}} \left( 1 + \frac{3ab}{c^2} + \frac{75a^2 b^2}{8 c^4} + \dots \right),$$

que es evidentemente más exacto que el que obtuvimos en la parte b):

$$M = \frac{\mu_0 a^2 b^2 \pi}{2 (a^2 + d^2)^{3/2}}.$$

#### PROBLEMA 40.-

a) Una línea de transmisión (ver Fig. 145), consta de dos cables de radio  $a$  separados por una distancia  $d$ .  
Calcule la inductancia propia del sistema por unidad de largo,  $L'$ .

b) Demuestre que

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \log \frac{d}{a}$$

cuando  $a \ll d$ .

c) Se reemplaza uno de los cables utilizando la tierra como retorno. Suponiéndola un conductor perfecto, calcule la inductancia  $L'$  si el cable está a una distancia  $h$  del suelo.

d) Calcule la inductancia propia del sistema de la Fig. 146, cuando se envía la mitad de la corriente por cada uno de los cables, y el retorno se efectúa por tierra.

#### Resolución.-

a) Hagamos un esquema en un sistema de coordenadas cartesianas: (Fig. 147)  
Calculamos el campo magnético  $\vec{H}_1$  producido por el cable  $C_1$ , sobre el plano  $Oxy$ . Para esto utilizamos la ley circuital de Ampère aplicada a las circunferencias de radio  $y$ , y cuyos centros se encuentran sobre el eje  $Ox$ ; las circunferencias son paralelas al plano  $Oyz$ :

para  $|y| \leq a$ ,



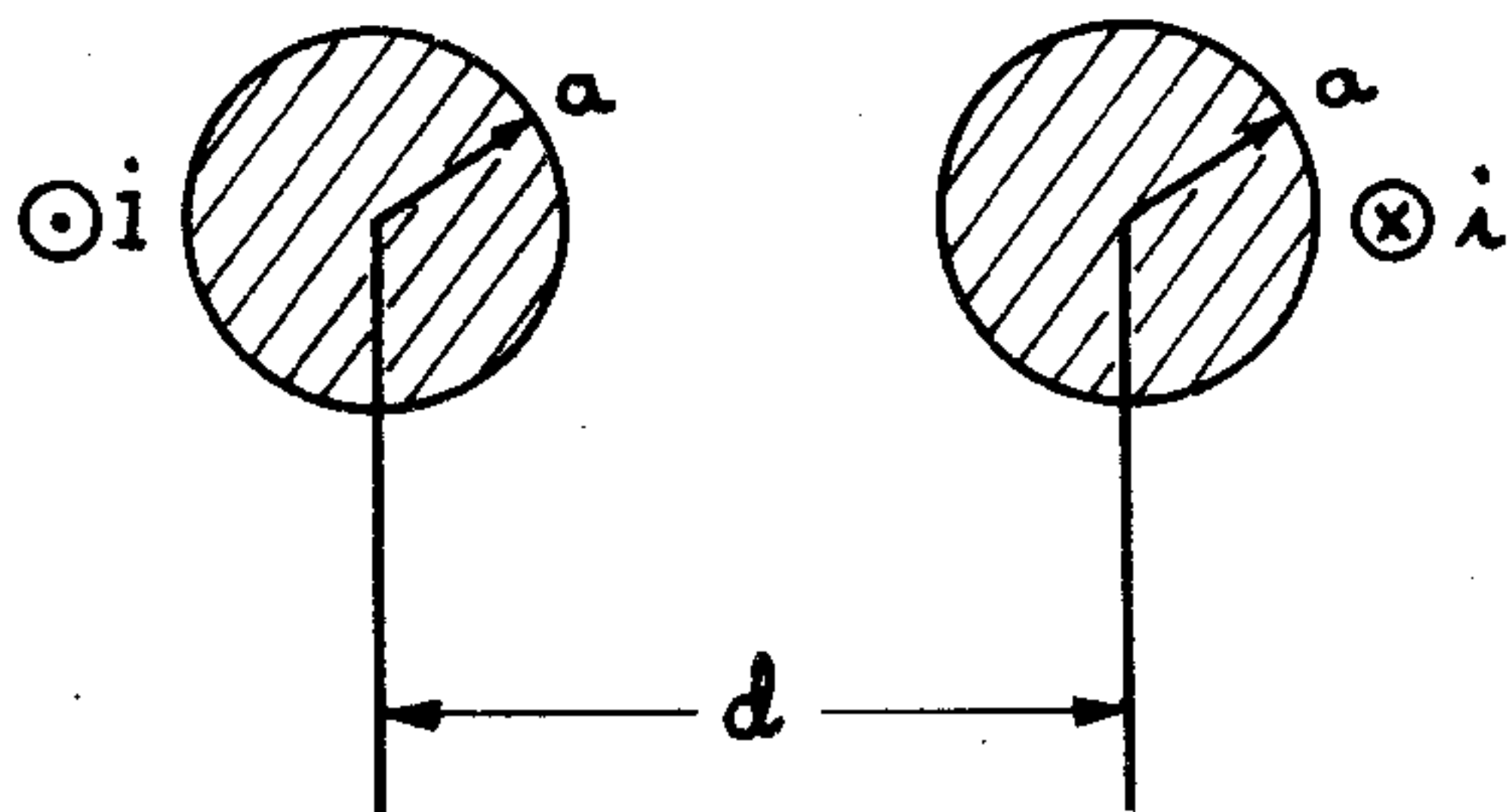


Fig. 145

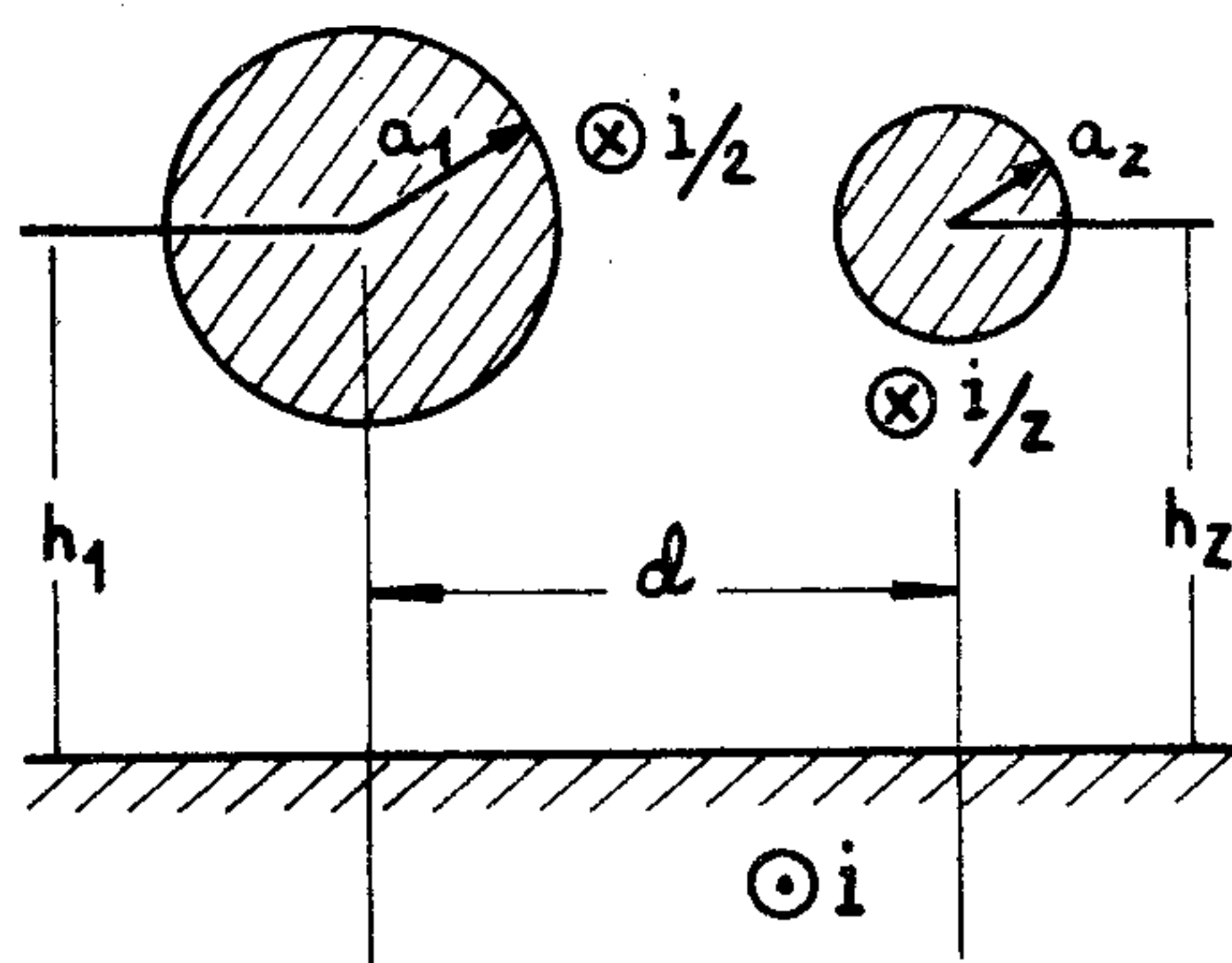


Fig. 146

$$\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell} = \frac{\pi y^2}{\pi a^2} i$$

$$H_1 \cdot 2\pi y = \frac{y^2}{a^2} i$$

$$\vec{H}_1 = \frac{iy}{2\pi a^2} \hat{k}$$

para  $|y| \gg a$ ,

$$\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell} = i$$

$$H_1 \cdot 2\pi y = i$$

$$\vec{H}_1 = \frac{i}{2\pi y} \hat{k}$$

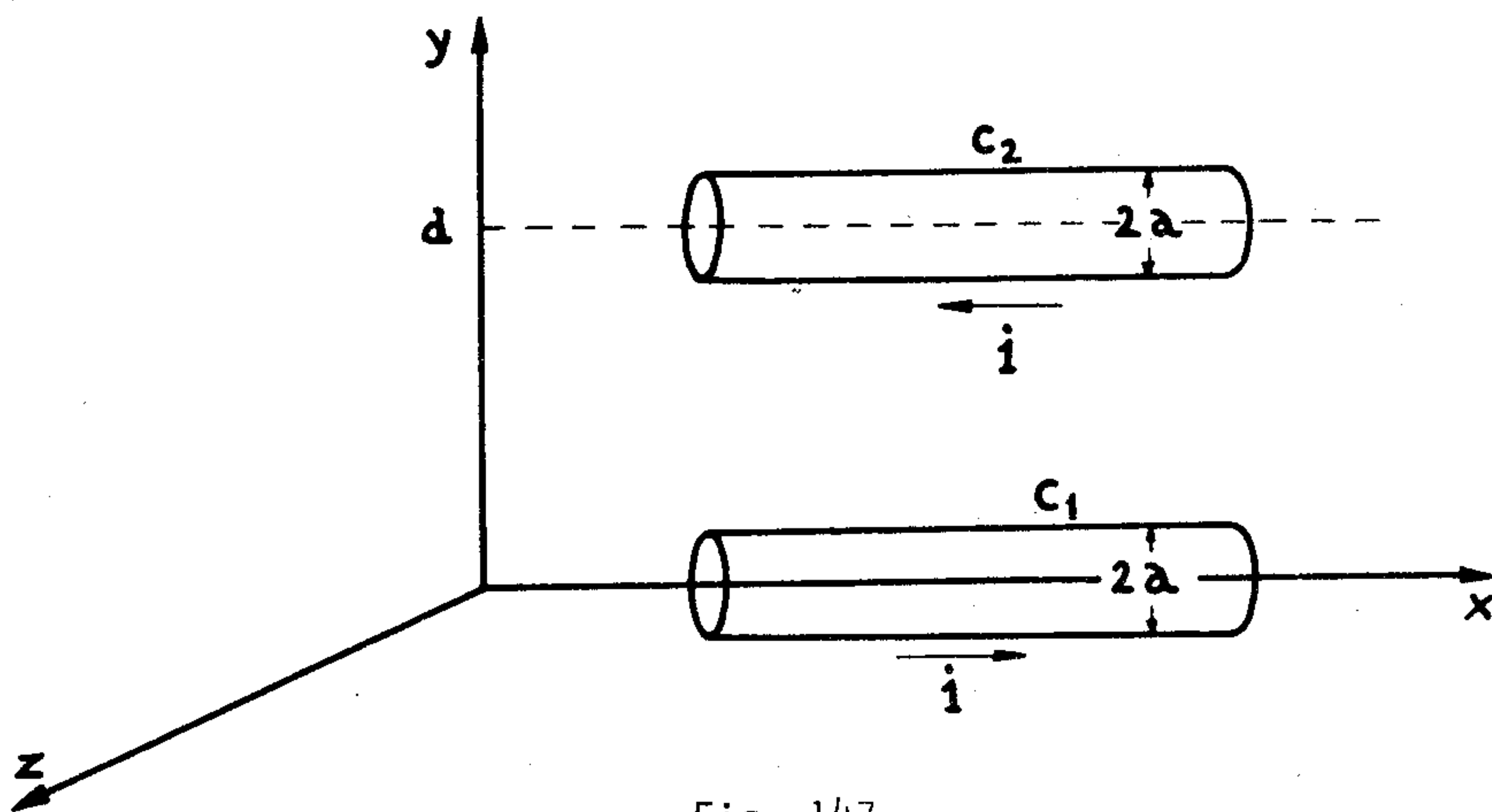


Fig. 147

El campo magnético producido por el cable  $C_2$  se calcula en forma análoga, y es claro que basta remplazar  $y$  por  $d-y$  en las expresiones para  $\vec{H}_1$  para obtener  $\vec{H}_2$ :

$$\vec{H}_2 = \frac{i (d - y)}{2\pi a^2} \hat{k} , \quad d-a \leq y \leq d+a$$

$$\vec{H}_2 = \frac{i}{2\pi (d-y)} \hat{k} , \quad \begin{cases} y \leq d-a \\ y \geq d+a \end{cases}$$

El campo magnético total sobre el plano (0xy) es la suma de ambos:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{i\hat{k}}{2\pi} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right) , & y \leq -a \\ \frac{i\hat{k}}{2\pi} \left( -\frac{y}{a^2} + \frac{1}{d-y} \right) , & -a \leq y \leq a \\ \frac{i\hat{k}}{2\pi} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right) , & a \leq y \leq d-a \\ \frac{i\hat{k}}{2\pi} \left( \frac{1}{y} + \frac{d-y}{a^2} \right) , & d-a \leq y \leq d+a \\ \frac{i\hat{k}}{2\pi} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right) , & y \geq d+a \end{cases}$$

Calculamos el flujo enlazado por unidad de largo por el circuito; para esto, integramos  $\vec{B} \cdot d\vec{S}$  sobre la superficie  $S$  que está achurada en la figura siguiente:

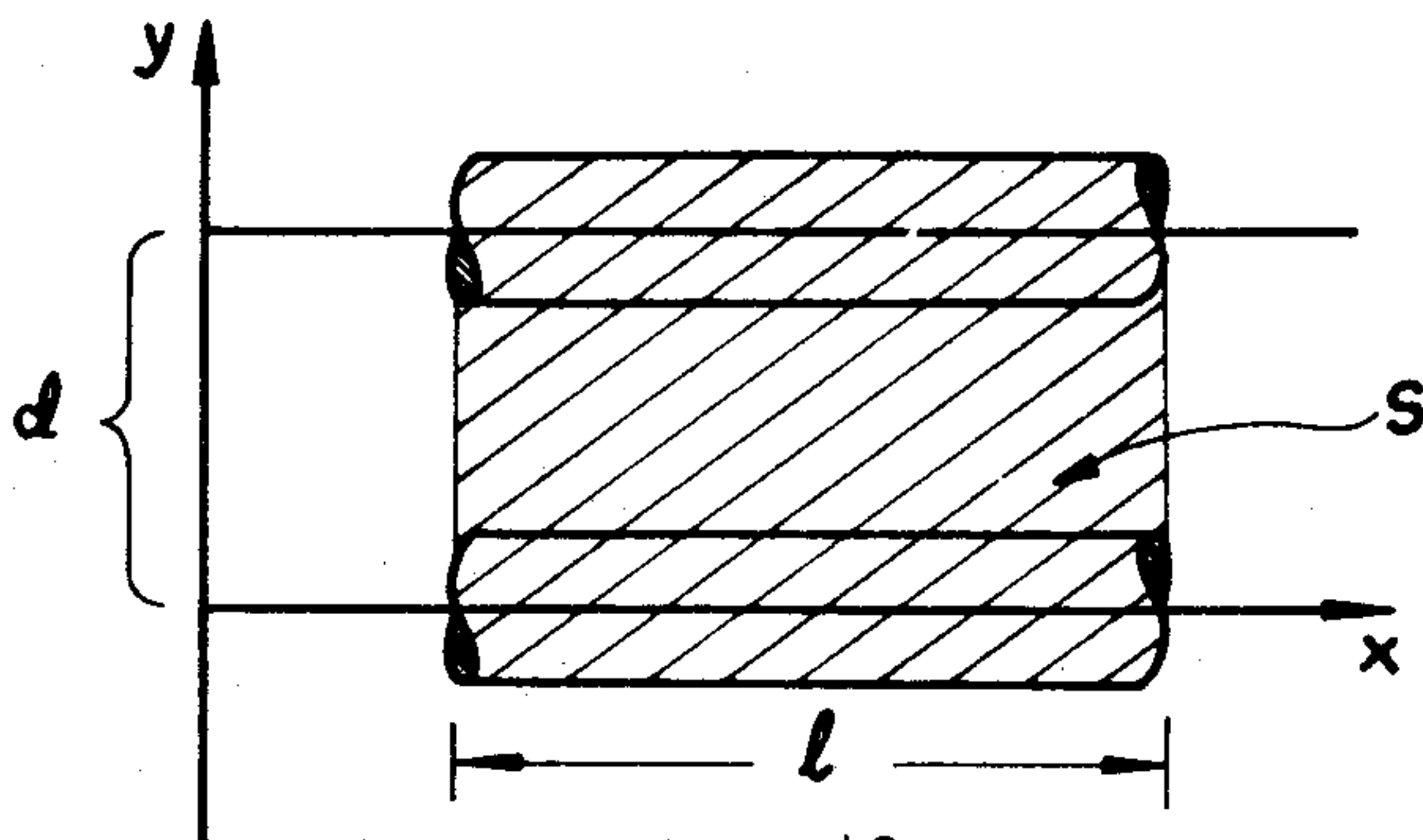


Fig. 148

$$\phi' = L' i = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = \hat{k} \, dx \, dy$$

$$\phi' = \int_{x=x_0}^{x_0 + \ell} \int_{y=-a}^{d+a} \mu_0 H(y) dy dx$$

$$\phi' = \mu_0 \ell \left[ \int_{-a}^a H(y) dy + \int_{+a}^{d-a} H(y) dy + \int_{d-a}^{d+a} H(y) dy \right]$$

Los integrales son triviales, y el resultado final es:

$$\phi' = \frac{\mu_0 \ell i}{\pi} \text{Log} \frac{d+a}{a}$$

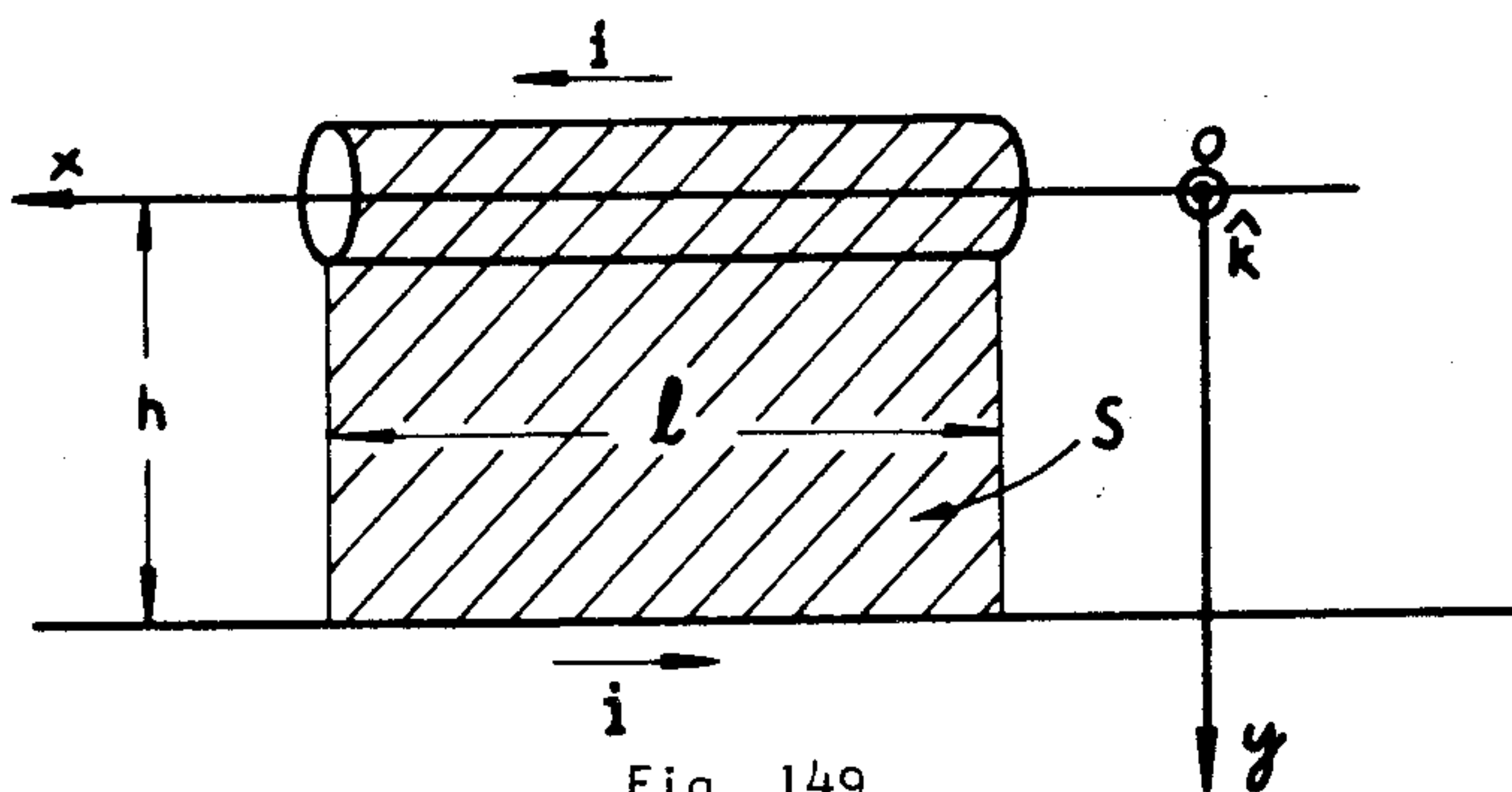
y la inductancia propia por unidad de largo es:

$$L' = \frac{\phi'}{i \ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \text{Log} \frac{d+a}{a}$$

b) Si  $a \ll d$ , entonces  $d + a \approx d$ , y el resultado es:

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \text{Log} \frac{d}{a}$$

c) El campo magnético producido por la corriente que retorna por la tierra es nulo, pues se supone que ella es infinitamente extendida; esta corriente que retorna lo hace por la superficie, pues ella es un conductor perfecto.



El campo magnético es, entonces:

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{iy}{2\pi a^2} \hat{k} & , \quad |y| \leq a \\ \frac{i}{2\pi y} \hat{k} & , \quad |y| \geq a \end{cases}$$

y el flujo es:

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

donde:

$$d\vec{S} = \hat{k} \, dx \, dy$$

$$\phi' = \int_{x=x_0}^{x_0+l} \int_{y=-a}^h \mu_0 H(y) dy \, dx$$

$$\phi' = \frac{\mu_0 \ell i}{2\pi} \text{Log} \frac{h}{a},$$

y la inductancia propia por unidad de largo será:

$$L' = \frac{\phi'}{\ell i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Log} \frac{h}{a}$$

d) El esquema es:

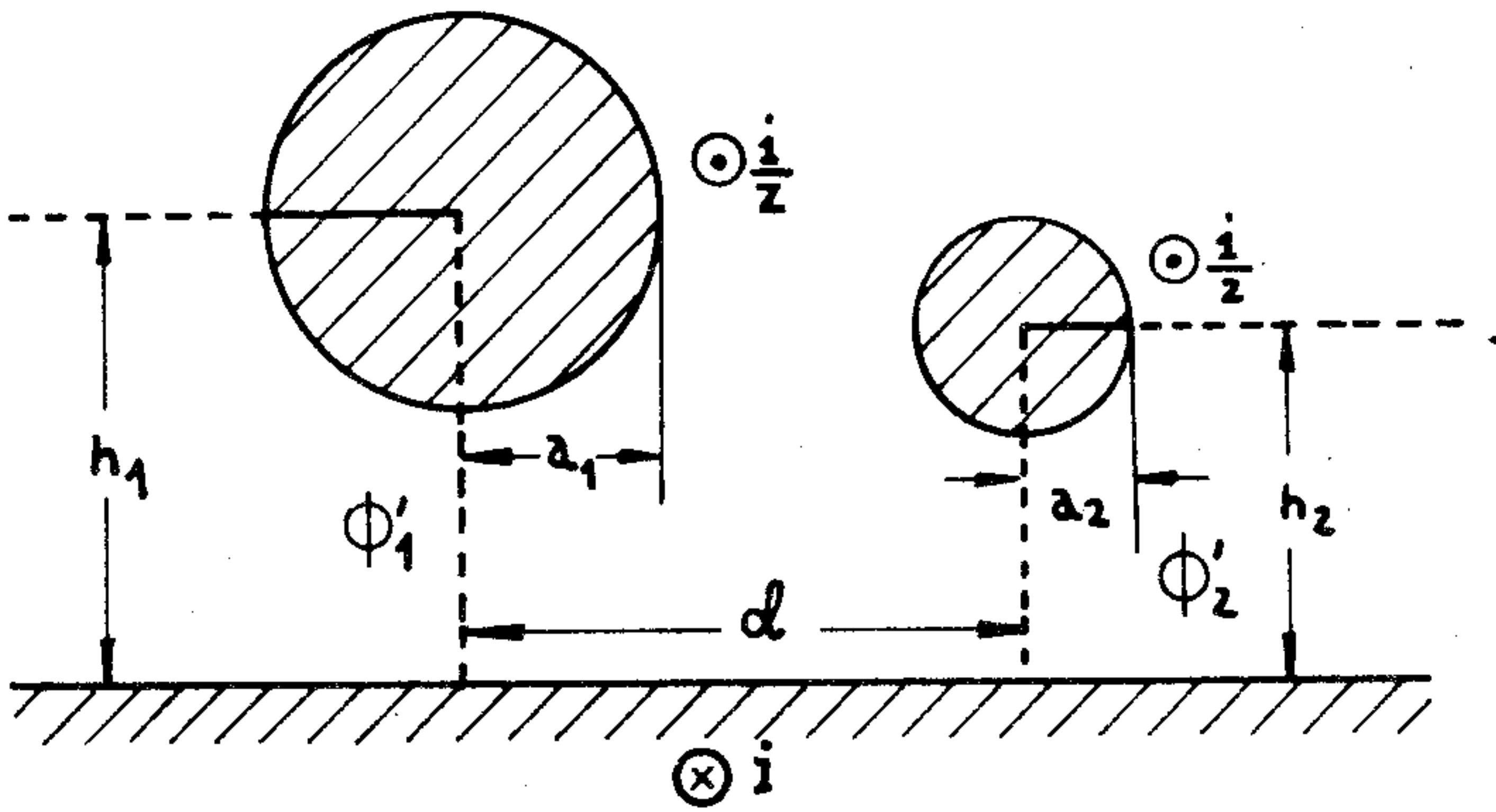


Fig. 150

Nuevamente la corriente que retorna por la tierra no produce campo magnético.

El flujo total por unidad de largo es:

$$\phi' = \phi'_1 + \phi'_2$$

$$\phi'_1 = \frac{\mu_0 \ell i/2}{2\pi} \text{Log} \frac{h_1}{a_1}$$

$$\phi'_2 = \frac{\mu_0 \ell i/2}{2\pi} \text{Log} \frac{h_2}{a_2};$$

luego: 
$$\phi' = \frac{\mu_0 \ell i}{4\pi} \text{Log} \frac{h_1 h_2}{a_1 a_2}$$

y la inductancia propia por unidad de largo será:

$$L' = \frac{\phi'}{\ell i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{Log} \frac{h_1 h_2}{a_1 a_2}.$$

PROBLEMA 41.-

a) Calcule la inductancia mutua  $M$  del circuito de la figura. La bobina 2 posee  $N$  espiras enrolladas sobre un cilindro de radio  $b$  y largo  $d$ . El solenoide tiene  $n$  espiras por unidad de largo, y tiene largo  $D$  y radio  $a$ . ( $D \gg a, d$ ).

b) Calcule el coeficiente de acoplamiento  $k$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

en que  $L_1$  y  $L_2$  son las inductancias propias de cada circuito.

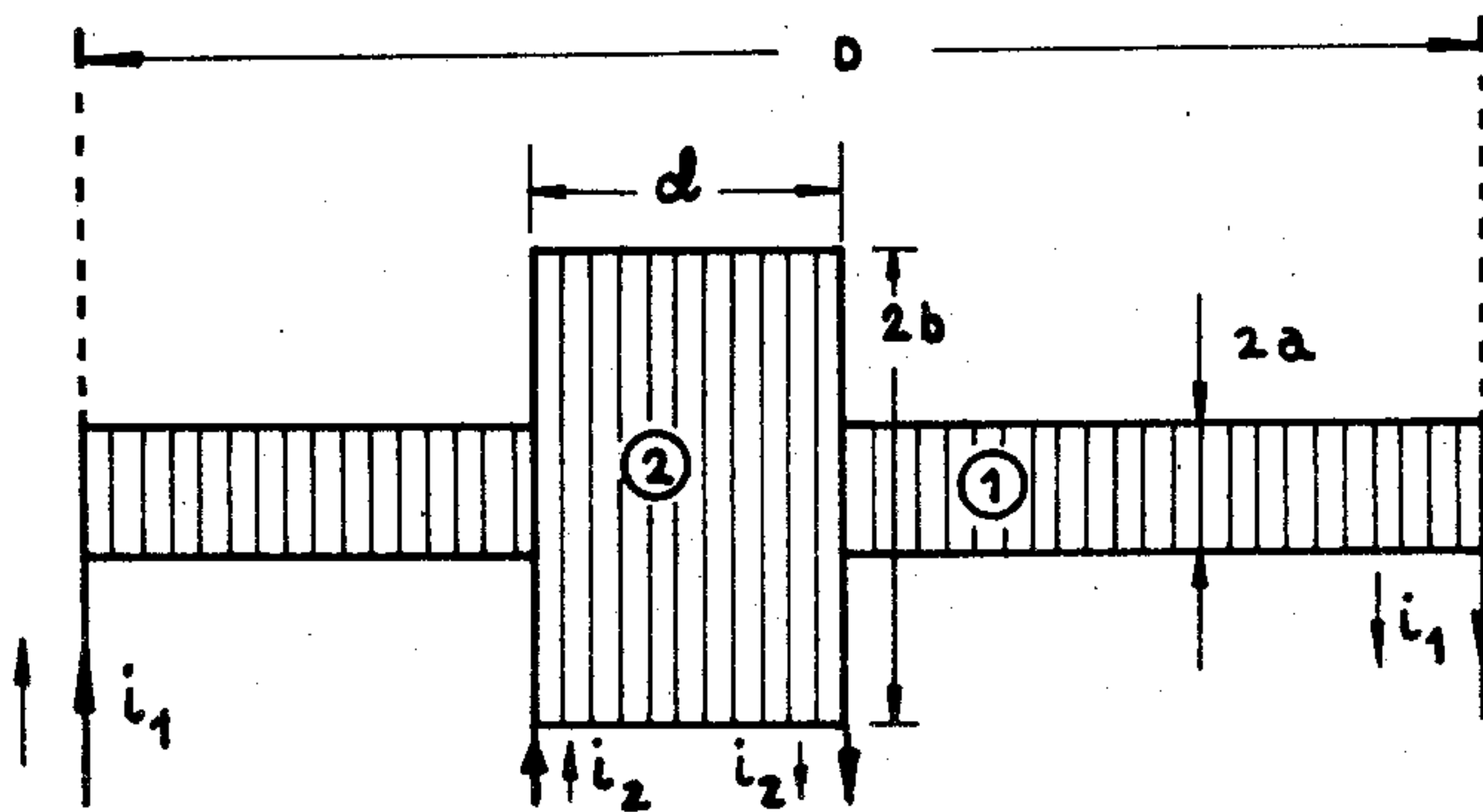


Fig. 151

Resolución.-

Suponemos que las corrientes  $i_1$  e  $i_2$  circulan en el mismo sentido; si esto no fuera así en la realidad, la inductancia mutua sólo cambiaría de signo.

Por definición,

$$M = \frac{\phi_{12}}{i_2} = \frac{\phi_{21}}{i_1}$$

donde  $\phi_{12}$  es el flujo a través del circuito 1 producido por la corriente que circula por el circuito 2, y viceversa para  $\phi_{21}$ ; en nuestro caso, conviene más aplicar

$$M = \frac{\phi_{21}}{i_1} = \frac{N}{i_1} \int \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 ;$$

el campo magnético  $\vec{B}_1$  es aproximadamente constante en toda la sección del solenoide, y es nulo fuera de él.

El campo magnético en el interior del solenoide,

$$H_1 = ni_1,$$

y si elegimos  $\hat{k}$  como la dirección del eje del solenoide,

$$\vec{H}_1 = ni_1 \hat{k}$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 ni_1 \hat{k}$$

$$M = \frac{N}{i_1} \mu_0 ni_1 \pi a^2 = Na^2 n \pi \mu_0$$

b) La inductancia propia del solenoide es:

$$L_1 = \frac{\phi_1}{i_1} = \frac{nDB_1 \pi a^2}{i_1} = \mu_0 \pi a^2 n^2 D.$$

Para calcular la inductancia propia de la bobina, debemos suponer que el campo magnético producido por ella es constante en toda su sección; entonces la inductancia propia de la bobina es:

$$L_2 = \mu_0 \pi b^2 \left( \frac{N}{d} \right)^2 d$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 \pi b^2 N^2}{d}$$

La constante de acoplamiento es entonces:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\mu_0 \pi a^2 n N}{\sqrt{\mu_0 \pi a^2 n^2 D \frac{\mu_0 \pi N^2 b^2}{d}}}$$

$$k = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{d}{D}},$$

con lo que hemos comprobado que la constante de acoplamiento debe ser menor que la unidad.

Para que  $k$  sea igual a uno, debe cumplirse que  $a = b$  y  $d = D$ , que es lo que uno esperaría intuitivamente.

#### PROBLEMA 42.-

La energía almacenada en un sistema de  $n$  conductores recorridos por corrientes permanentes  $i_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , está dada por

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \phi_k i_k$$



- a) ¿Cuál es el significado físico de  $\phi_k$ ?
- b) Suponga que se reduce el sistema a un circuito único alimentado por una fuente de fuerza electromotriz  $\varepsilon_0$  que realiza un trabajo  $\Delta W_B$  en mover un elemento de carga  $\Delta q$  a lo largo del circuito. Demuestre la relación  $\Delta W_B = 2\Delta W$  y explique su significado físico.
- c) Calcule el trabajo mecánico realizado en un desplazamiento rígido  $\Delta \vec{r}$  a expensas de la energía almacenada en el sistema, con la definición  $\Delta W_{\text{mec.}} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ .

Resolución.-

- a)  $\phi_k$  es el flujo magnético total enlazado por el conductor  $k$ ;  $\phi_k$  es la suma de los flujos producidos por todo el resto de los conductores más el flujo producido por él mismo:

$$\phi_k = \sum_{j=1}^n M_{jk} I_j \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{jj} \equiv L_j \\ M_{jk} = M_{kj} \end{array} \right.$$

- b) Podemos imaginar un circuito formado por una fuente de f.e.m.  $\varepsilon_0$  y una inductancia a través de la cual cae una diferencia de potencial  $\varepsilon$ :

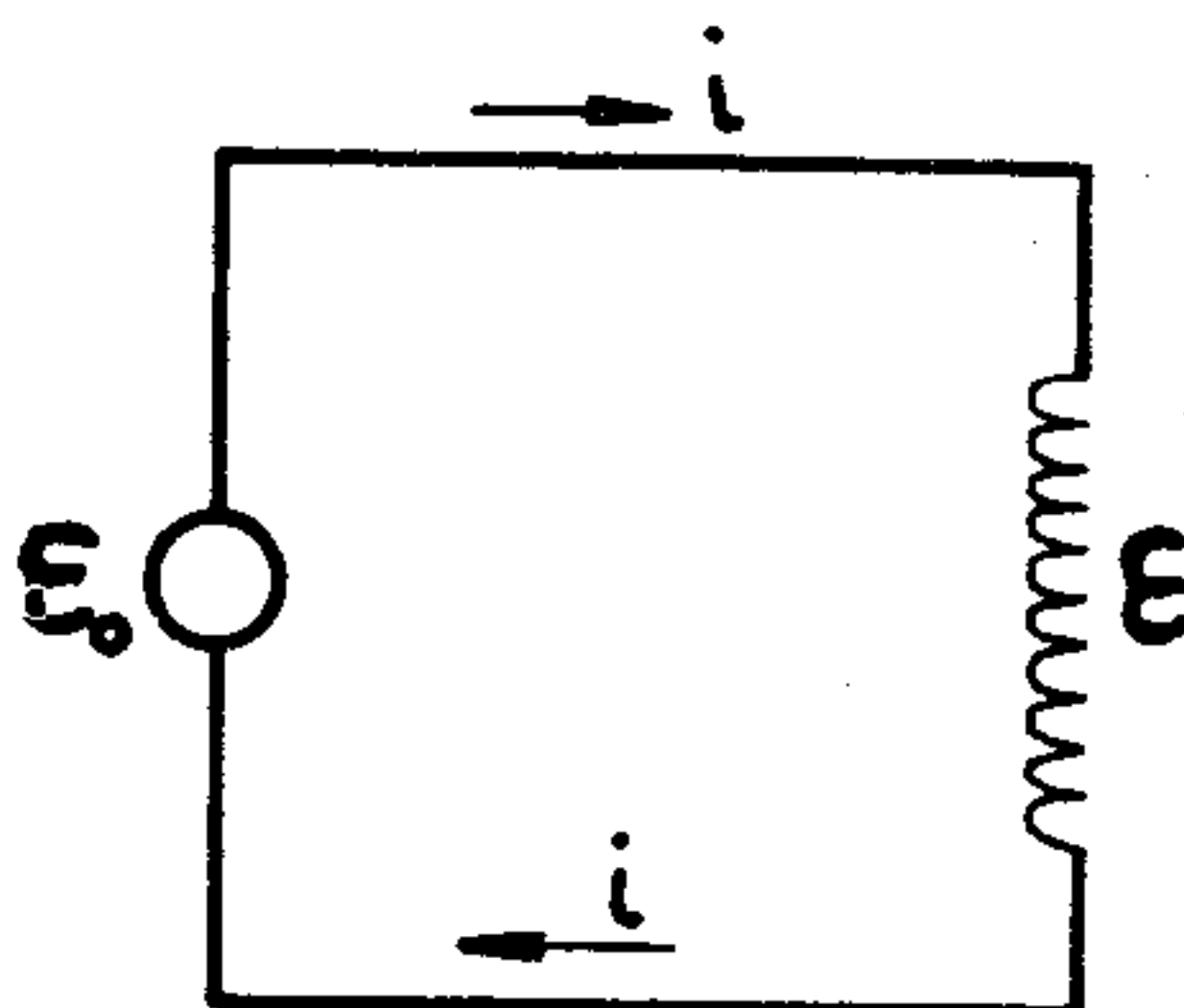


Fig. 152

Una ley de Kirchhoff nos dice que

$$\varepsilon_0 + \varepsilon = 0$$

pero

$$\Delta W_B = \varepsilon_0 \Delta q = \varepsilon_0 i \Delta t$$

y como

$$\varepsilon = - \frac{\Delta \phi}{\Delta t},$$

se tiene

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

luego

$$\Delta W_B = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} i \Delta t = i \Delta \phi$$

Por otra parte:

$$W = \frac{1}{2} i \phi$$

luego:

$$\Delta W = \frac{1}{2} i \Delta \phi,$$

pues la corriente  $i$  es permanente; luego

$$\Delta W_B = 2 \Delta W.$$

Esto significa que la energía almacenada por el circuito es sólo la mitad de la energía gastada por la batería. Esto es porque la batería debe trabajar para mover las cargas eléctricas, y además para mantener constante la corriente, pues ésta tiende a reducirse a cero debido a la f.e.m. inducida por el campo magnético; esta f.e.m. inducida actúa en contra de la causa que produce el campo (que es la corriente), de acuerdo con la ley de inducción de Faraday-Lenz.

c) Sabemos que

$$\Delta W_{\text{mec.}} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

y también:

$$\vec{F} = \nabla W$$

luego:

$$\Delta W_{\text{mec.}} = \nabla W \cdot \Delta \vec{r} = \Delta W$$

$$\Delta W_{\text{mec.}} = \Delta \left( \frac{1}{2} i \phi \right) = \frac{1}{2} i \Delta \phi.$$

#### PROBLEMA 43.-

a) Calcule  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$  producida por la rotación de una espira circular en un campo magnético uniforme.

b) Para medir el campo magnético terrestre se dispone de un solenoide de 1000 espiras y 11,3 cm. de diámetro, que se hace rotar en torno a un eje paralelo a un plano de las espiras, con una velocidad angular  $\omega$  de 100 rad/seg. El eje de giro del solenoide se coloca horizontal en la dirección Este-Oeste. Mediante un oscilógrafo, conectado a los extremos del solenoide, se determina una f.e.m. inducida

$$\mathcal{E} = 50 \text{ sen } (\omega t + \phi) \text{ [mV]} ,$$

en donde el tiempo se mide a partir de la horizontal (ver figura).

Se pide:

- i) La magnitud del campo magnético en ese punto de la tierra.
- ii) La dirección del campo con respecto a la horizontal.
- iii) ¿Cuánto vale  $\phi$  en el ecuador y en los polos magnéticos terrestres?

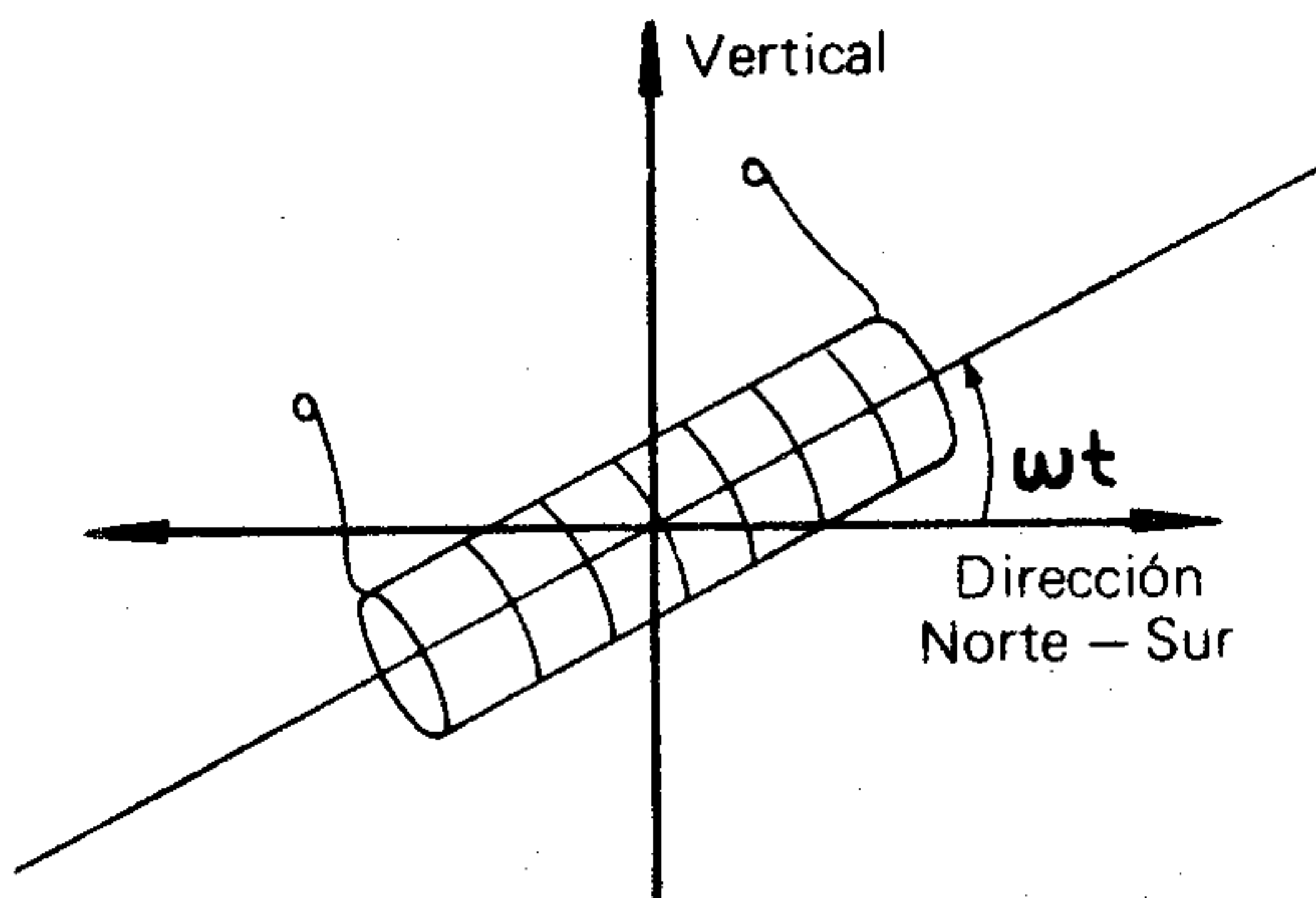


Fig. 153

Resolución.-

- a) Supongamos que el campo magnético sea

$$\vec{B} = B \hat{r},$$

donde  $B$  es la magnitud (constante), y  $\hat{r}$  es la dirección del campo (constante también).

Supongamos que el eje de rotación de la espira coincide con uno de sus diámetros y sea el eje  $Ox$  de un sistema de referencia cartesiano de coordenadas. Sea  $d\vec{S}$  un elemento de superficie del plano de la espira.

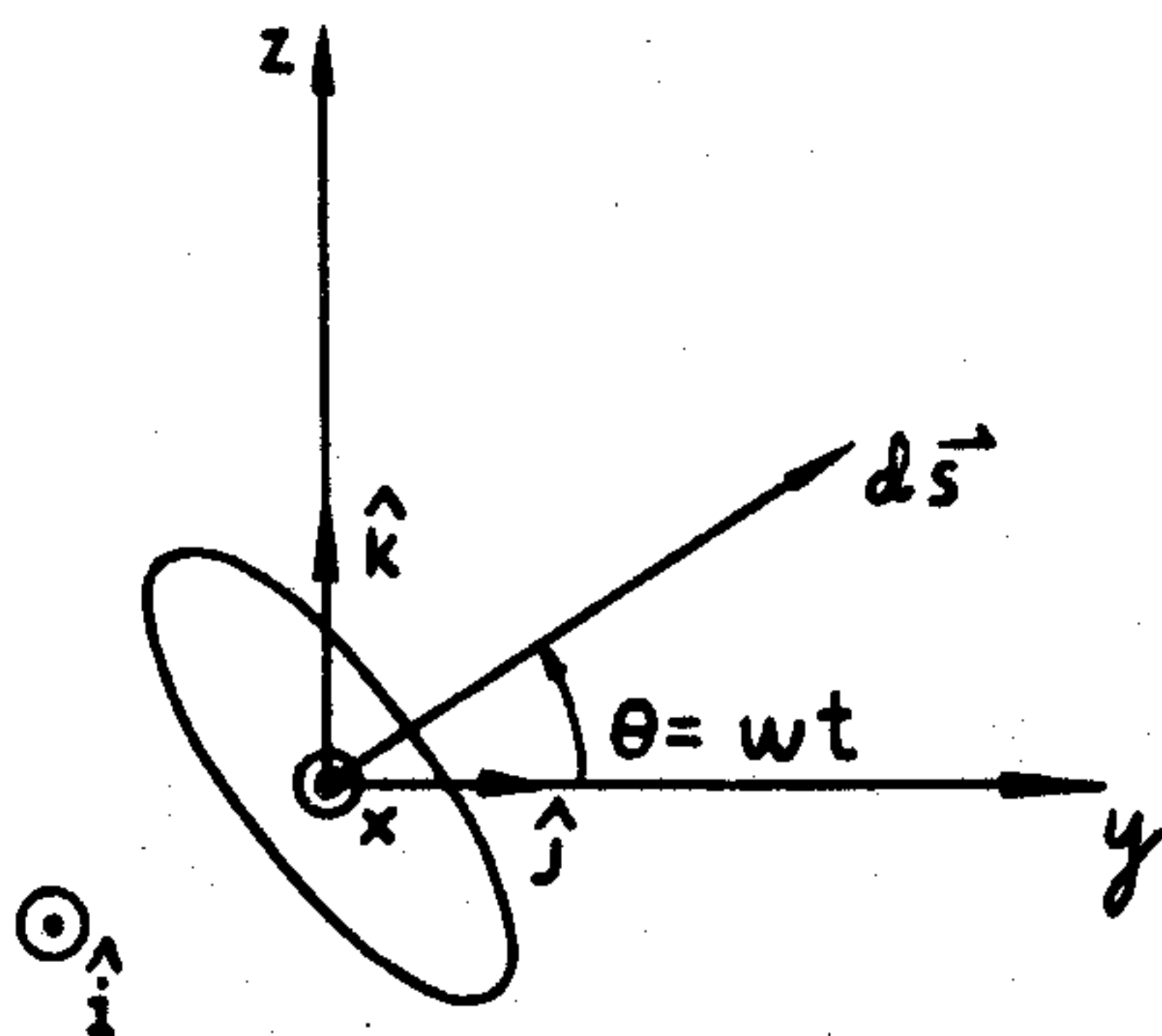


Fig. 154

$$d\vec{S} = dS (\hat{j} \cos\theta + \hat{k} \sin\theta).$$

El flujo enlazado por la espira es

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S B dS (\hat{j} \cdot \hat{r} \cos\theta + \hat{k} \cdot \hat{r} \sin\theta)$$

$$\phi = \pi R^2 B (\hat{j} \cdot \hat{r} \cos \omega t + \hat{k} \cdot \hat{r} \sin \omega t)$$

Y la f.e.m. inducida será:

$$\varepsilon = - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \pi R^2 B \omega (\hat{j} \cdot \hat{r} \sin \omega t - \hat{k} \cdot \hat{r} \cos \omega t)$$

(R es el radio de la espira; si ésta no fuera circular, entonces basta reemplazar  $\pi R^2$  por su área).

b) Suponemos que el campo magnético  $\vec{B}$  está contenido en el plano que forma la vertical con la dirección N-S; ésta es una buena suposición para la mayoría de los puntos de la tierra.

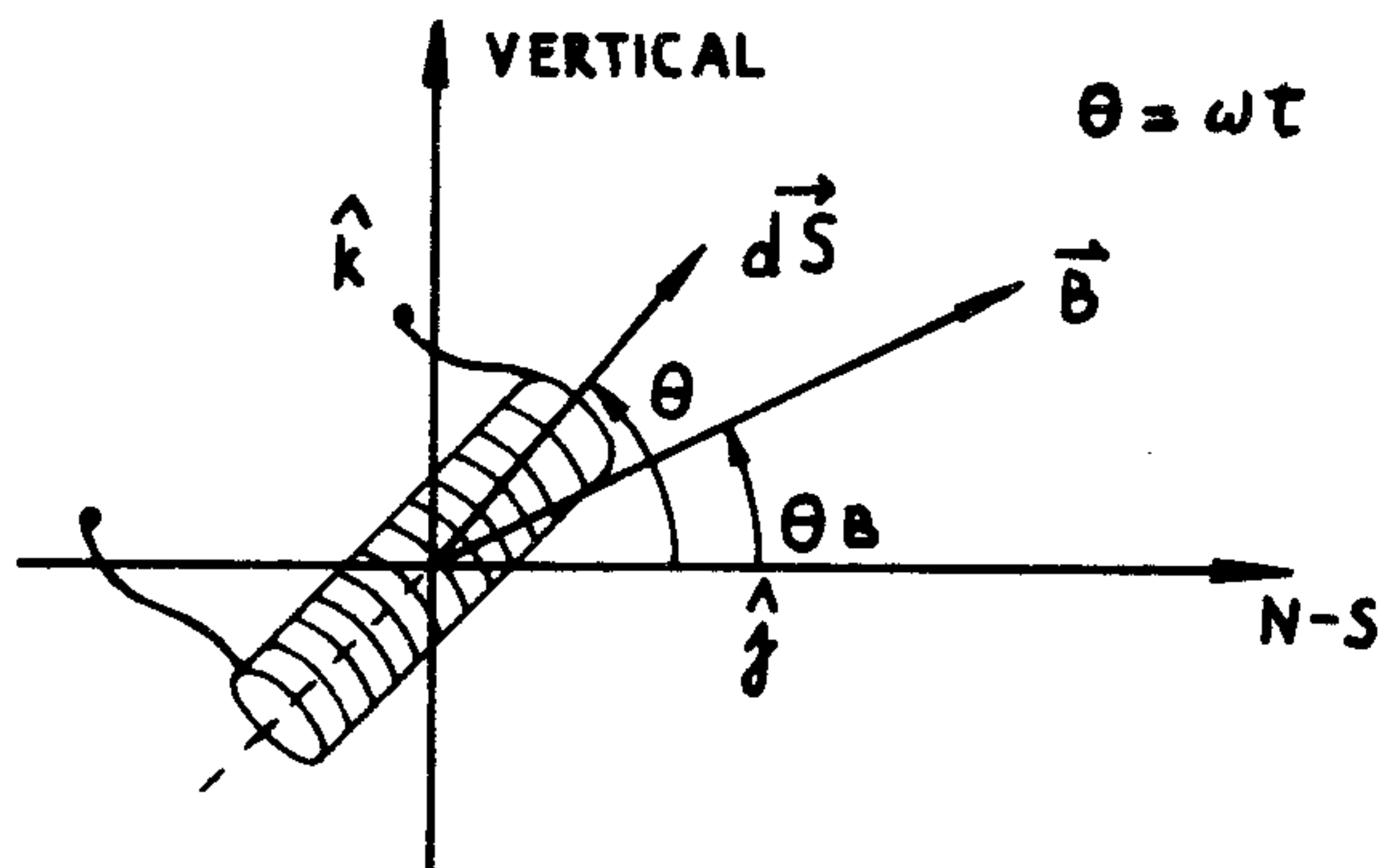


Fig. 155

$$\vec{B} = B (\hat{j} \cos \theta_B + \hat{k} \sin \theta_B)$$

$$d\vec{S} = dS (\hat{j} \cos \omega t + \hat{k} \sin \omega t)$$

$$\phi = N \iint_{\text{una espira}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \iint_{\text{una espira}} B dS \cos(\omega t - \theta_B)$$

$$\phi = NB\pi R^2 \cos(\omega t - \theta_B)$$

donde N es el número de espiras del solenoide.

La f.e.m. inducida es entonces:

$$\varepsilon = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\varepsilon = NB\pi R^2 \omega \sin(\omega t - \theta_B)$$

i) Comparando con la f.e.m. que se nos da

$$\varepsilon = 50 \sin(\omega t + \phi) \text{ [mV]}$$

vemos que

$$NB\pi R^2\omega = 50 \times 10^{-3} \text{ [Volts]}$$

e introduciendo los datos

$$N = 1000$$

$$R = 11,3 \times 10^{-2} \text{ [m]}$$

$$\omega = 100 \text{ [seg}^{-1}\text{]},$$

se obtiene

$$B = 0,5 \times 10^{-4} \left[ \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} \right] = 0,5 \text{ [Gauss]}.$$

ii) Comparando también, se ve que el ángulo  $\theta_B$  que el campo magnético forma con la horizontal es:

$$\theta_B = -\phi.$$

iii) En el ecuador,  $\vec{B}$  es horizontal; luego  $\theta_B = \phi = 0$ ; en el polo magnético norte,  $\vec{B}$  es vertical y apunta hacia arriba; luego  $\phi = -\theta_B = -\pi/2$ , y en el polo sur,  $\phi = -\theta_B = \pi/2$ .

#### PROBLEMA 44.-

Una barra conductora de masa  $m$  resbala sin roce, haciendo contacto eléctrico sobre dos rieles conductores paralelos.

Perpendicularmente al plano del sistema existe un campo magnético  $\vec{B}$  constante y uniforme.

En  $t = 0$  se cierra un interruptor que conecta los rieles a un circuito formado por una resistencia  $R$  y un condensador de capacidad  $C$  cargado inicialmente con carga  $q_0$  (ver figura).

- Calcule la fuerza magnética y la f.e.m. inducida  $\mathcal{E}_i$  en el circuito en función de la velocidad  $v$  de la barra.
- Escriba la ecuación de balance de energías y encuentre una ecuación diferencial para la corriente  $i$  y resuélvala.
- Calcule la velocidad de la barra cuando se alcanza el régimen permanente; calcule también la carga que queda en el condensador.
- Calcule la energía total disipada por la resistencia durante el proceso.

#### Resolución.-

- a) La fuerza que se ejerce sobre la barra es

$$\vec{F} = \int_{\text{barra}} i \, d\vec{\ell} \times \vec{B},$$



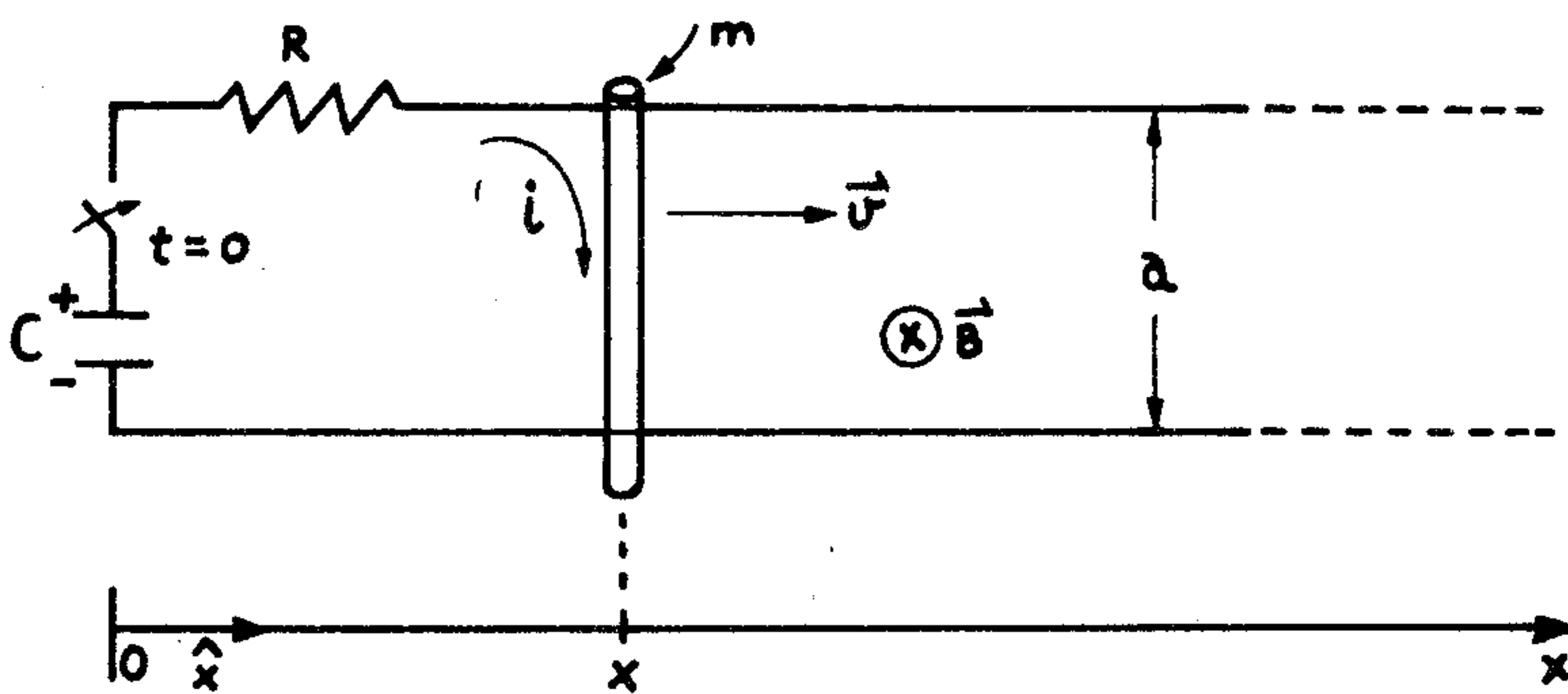


Fig. 156

y, dado el sentido que tiene  $\vec{B}$  y la dirección en que circula la corriente, resulta

$$F = ia B$$

y

$$\vec{F} = ia B \hat{x}.$$

El flujo enlazado por el circuito es

$$\phi = B ax$$

y la f.e.m. inducida es

$$\mathcal{E}_i = - \frac{\partial \phi}{\partial t} = - B a v.$$

b) Es necesario aclarar un punto para poder continuar.

En nuestro circuito no tenemos ninguna fuente de voltaje o de corriente (es decir, un elemento que mantenga una caída de potencial constante entre sus bornes o un elemento que mantenga una corriente constante a través de sí, respectivamente). La "fuente" que tenemos es el condensador cargado; es el condensador quien nos proporciona la corriente que circula en el circuito. Esto trae como consecuencia el hecho que, si llamamos  $q$  a la carga que tiene el condensador en el tiempo  $t$ , e  $i$  a la corriente que circula por el circuito (es decir, que sale del condensador), entonces se cumple

$$\frac{dq}{dt} = - i$$

y no

$$\frac{dq}{dt} = i,$$

que es la relación usual; esto es porque hemos definido  $i$  como la corriente que sale del condensador y no como la corriente que entra a él.

Esto puede verse más claramente si integramos la ley de continuidad sobre una superficie cerrada  $S$  que envuelva la placa positiva del condensador:



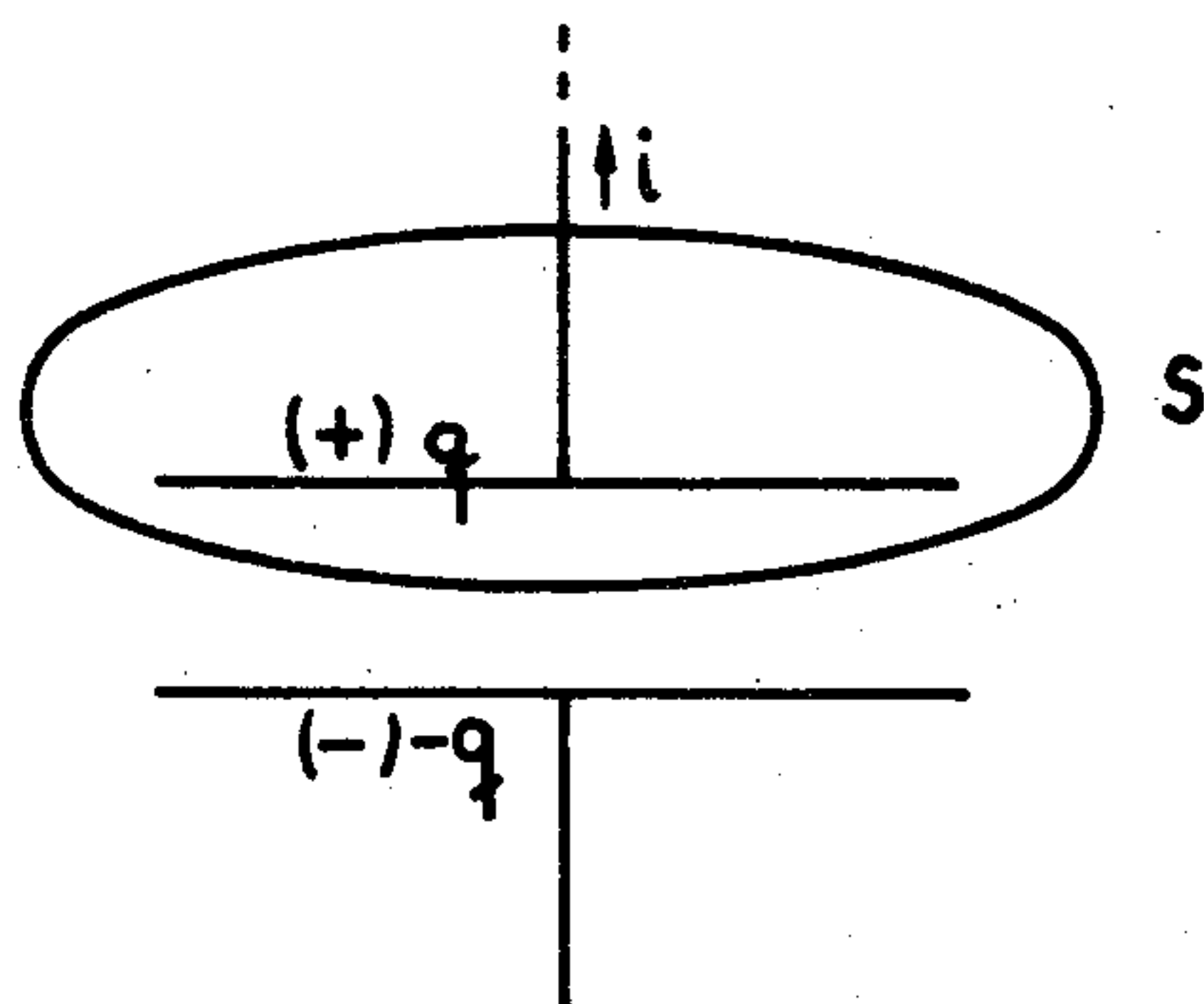


Fig. 157

$$\nabla \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\iiint_{\tau(s)} \nabla \cdot \vec{j} d\tau = - \iiint_{\tau(s)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

luego:  $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iiint_{\tau(s)} \rho d\tau$

o sea:  $i = - \frac{dq}{dt}$

( $i$  = corriente que sale de  $S$ , por el alambre).

Con esta aclaración hecha, podemos proceder. Puesto que el condensador es nuestra "fuente de energía", entonces la tasa con que varía su energía es igual a la tasa con que se disipa la energía en el resto del circuito:

$$\frac{q}{C} i = R i^2 - i \mathcal{E}_i$$

El signo menos en  $-i \mathcal{E}_i$  es consecuencia de que la f.e.m. inducida  $\mathcal{E}_i$  actúa en contra de la corriente;  $\mathcal{E}_i$  es una "subida potencial" si recorremos el circuito en el sentido de la corriente, en términos de la ley de Kirchhoff, que nos dice que la suma algebraica de las caídas de tensión a lo largo de un circuito cerrado es cero:

$$\frac{q}{C} = R i - \mathcal{E}_i ;$$

$$\frac{q}{C} = R i + aB v$$

y derivando con respecto al tiempo:

$$- \frac{i}{C} = R \frac{di}{dt} + aB \frac{dv}{dt} .$$

Pero como

$$F = m \frac{dv}{dt} = i a B,$$

resulta

$$\frac{dv}{dt} = \frac{iaB}{m},$$

con lo cual la ecuación diferencial para  $i$  queda:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{a^2 B^2}{m} i = 0$$

$$\frac{di}{dt} = -i \left( \frac{1}{RC} + \frac{a^2 B^2}{mR} \right)$$

que se integra de inmediato para darnos

$$i = i_0 \exp \left[ - \left( \frac{1}{RC} + \frac{a^2 B^2}{mR} \right) t \right]$$

donde  $i_0$  es la corriente en el instante  $t = 0$ ; ésta es fácil de calcular, pues en  $t = 0$ , la velocidad de la barra es también cero; luego se cumple:

$$R i_0 = \frac{q_0}{C}$$

$$i_0 = \frac{q_0}{RC}.$$

Si definimos  $\tau$  como:

$$\tau = \left( \frac{1}{RC} + \frac{a^2 B^2}{mR} \right)^{-1},$$

entonces  $\tau$  tiene dimensiones de tiempo, y recibe el nombre de "constante de tiempo del circuito"; es el tiempo que se demora la corriente en disminuir a  $e^{-1}$  de su valor inicial.

Así,

$$i = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Si el campo magnético  $B$  tiende a cero, la constante de tiempo se reduce a  $RC$ , que es el valor usual para este circuito cuando no está en presencia de un campo magnético; si  $B \rightarrow \infty$ , entonces  $\tau \rightarrow 0$ , y el circuito tiende a alcanzar la corriente  $i = 0$  en forma instantánea ( $i = 0$  es la corriente en régimen permanente; es decir, no circula corriente).

El gráfico de la corriente es, a grosso modo:

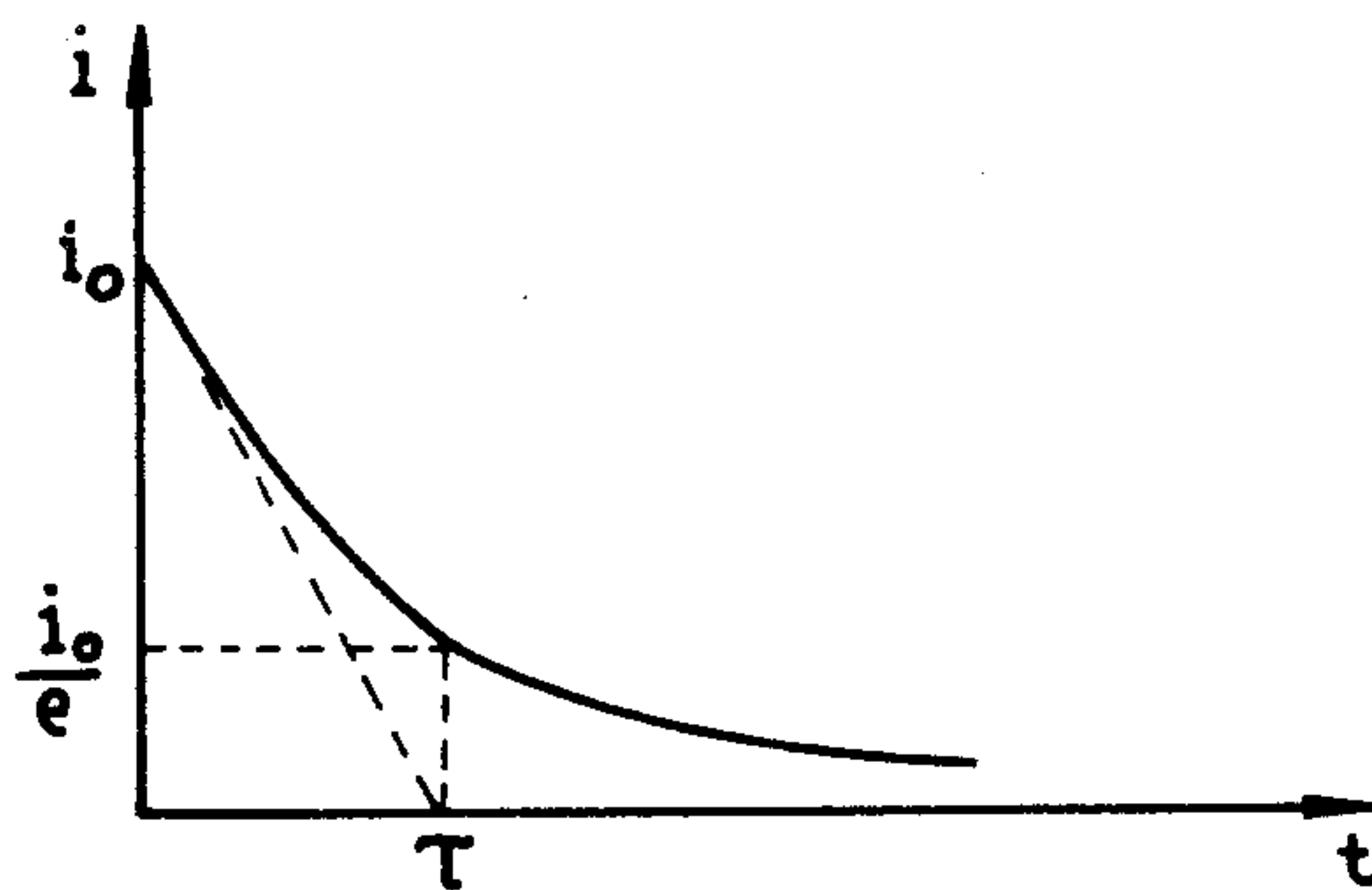


Fig. 158

(puede comprobarse que  $t = \tau$  es el punto donde la tangente a la curva por el origen corta al eje del tiempo).

c) Calculemos la velocidad de la barra en función del tiempo; para esto, basta notar que:

$$\frac{dv}{dt} = i \frac{aB}{m}$$

luego:

$$v(t) = \int \frac{aB}{m} i(t) dt + K$$

$$v = \frac{aB}{m} i_0 \cdot (-\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} + K$$

la constante de integración  $K$  se calcula sabiendo que en  $t = 0$ ,  $v = 0$ ; luego

$$K = \frac{aB}{m} i_0 \tau$$

y finalmente

$$v = \frac{aBq_0}{m + Ca^2B^2} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

Un gráfico aproximado de la velocidad es:

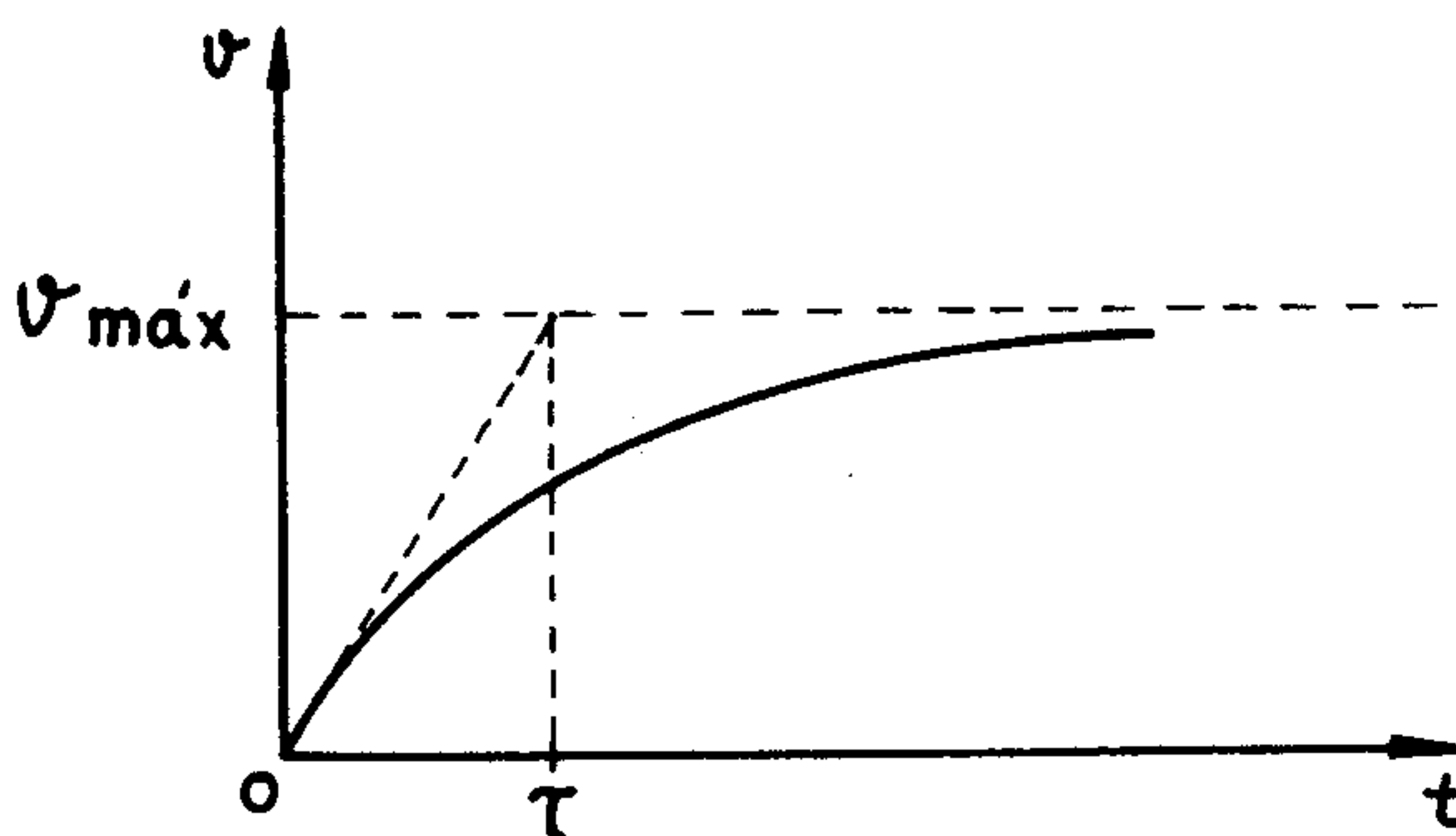


Fig. 159

La velocidad máxima, que es la velocidad en régimen permanente, es:

$$v_{\text{máx.}} = \frac{aBq_0}{m + Ca^2B^2}$$

Si  $B \rightarrow 0$ , la barra no se mueve, que es el resultado que uno esperaría en ausencia de campo magnético; si  $B$  se hace cada vez más grande, la velocidad máxima se hace cada vez más pequeña, y la constante de tiempo se hace cada vez más pequeña también, de modo que la barra tiende a alcanzar la velocidad máxima en forma instantánea; si  $B \rightarrow \infty$  la barra no se moverá.

Para calcular la carga que queda en el condensador, basta notar que

$$\frac{q}{C} = Ri + aBv,$$

y la carga que queda en el condensador en  $t = \infty$  será:

$$q_{\text{mín.}} = C aBv_{\text{máx.}}, \quad (i(t = \infty) = 0)$$

$$q_{\text{mín.}} = q_0 \frac{Ca^2B^2}{m + Ca^2B^2}$$

Si  $B \rightarrow 0$ ,  $q_{\text{mín.}} \rightarrow 0$ , que es el resultado en ausencia de campo magnético; si  $B \rightarrow \infty$ ,  $q_{\text{mín.}} \rightarrow q_0$ , de modo que el condensador no se descarga.

d) La potencia disipada por la resistencia es:

$$\frac{dW}{dt} = Ri^2,$$

de donde la energía total disipada por ella es:

$$W_{\text{tot.}} = \int_0^{\infty} Ri^2 dt;$$

la integral es trivial, y nos da:

$$W_{\text{tot.}} = \frac{q_0^2}{2C} \left( \frac{m}{m + Ca^2B^2} \right)$$

Si  $B \rightarrow 0$ ,  $W_{\text{tot.}} \rightarrow \frac{q_0^2}{2C}$ , que es el resultado esperado en ausencia de  $B$ ; si  $B \rightarrow \infty$ ,  $W_{\text{tot.}} \rightarrow 0$ , resultado que es consistente con el hecho de que el condensador no se descarga.

PROBLEMA 45.-

A) En el circuito de la figura, el interruptor  $S_1$  ha estado abierto desde  $t = -\infty$  hasta  $t = 0$ .

a) ¿Cuánto vale el voltaje  $v_C$  a través del condensador y la corriente  $i_L$  a través de la inductancia en  $t < 0$ ?

b) En  $t = 0$  se cierra  $S_1$ . Calcule las corrientes y tensiones en los distintos elementos en  $t = 0^+$  y en  $t = \infty$ .

B) Se reemplaza la inductancia  $L$  por un interruptor  $S_2$ . suponga que ambos interruptores han estado abiertos desde  $t = -\infty$  hasta  $t = 0$ . En  $t = 0$  se cierra  $S_1$ . En  $t = t_1$  se abre  $S_1$ . En  $t = t_2$  se cierra  $S_2$ . En  $t = t_3$  se abre  $S_2$ .

Para  $t > t_3$ , se dejan ambos interruptores abiertos. Calcule el voltaje  $v_C = v_C(t)$  a través del condensador.

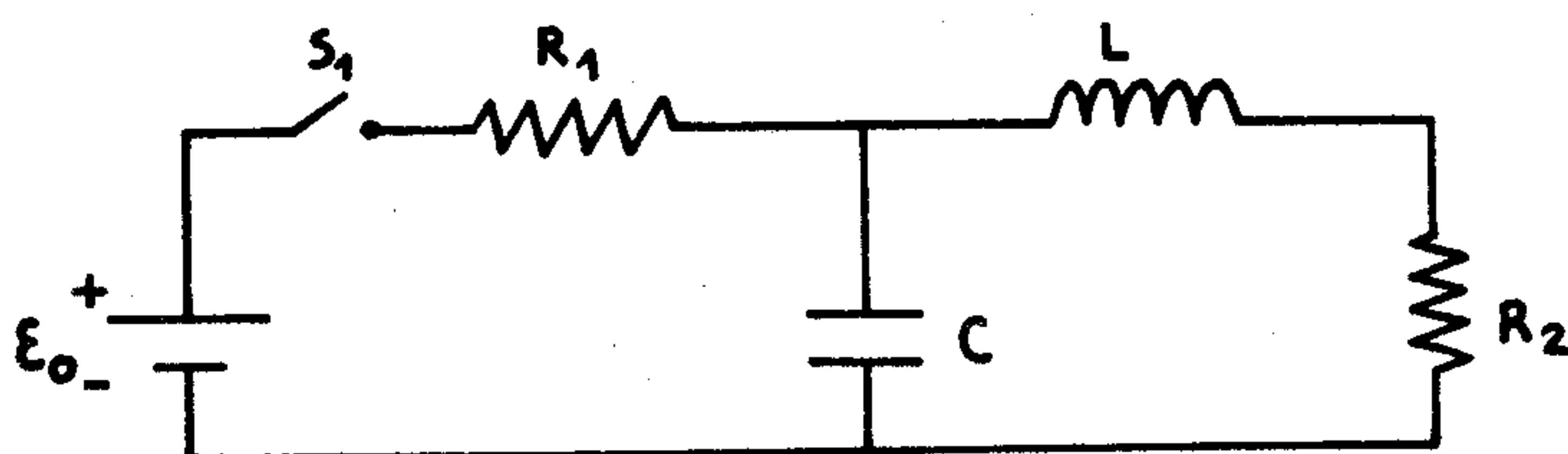


Fig. 160

Resolución.-

a) Evidentemente  $v_C = i_L = 0$  para  $t < 0$ , pues la fuente de voltaje  $\epsilon_0$  está desconectada.

b) Para calcular corrientes y voltajes en  $t = 0^+$  y  $t = \infty$  no es necesario resolver el circuito; sólo basta notar que para una resistencia, un condensador y una inductancia se cumple, respectivamente:

$$v = Ri \quad ,$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$v = L \frac{di}{dt} \quad .$$

La segunda de estas relaciones nos dice que el voltaje a través de un condensador no puede variar bruscamente (no puede dar un salto) a menos que la corriente sea infinitamente grande; el voltaje a través de él debe ser una función continua del tiempo (salvo que  $i = \infty$ ).

La tercera de estas relaciones nos dice que la corriente a través de una inductancia no puede variar bruscamente (no puede dar un salto) a

menos que el voltaje sea infinitivamente grande; la corriente a través de ella debe ser una función continua del tiempo (salvo que  $v = \infty$ ).

Por lo tanto, si en  $t = 0^-$  se cumple

$$v_C(0^-) = 0$$

$$i_L(0^-) = 0,$$

entonces debe cumplirse también (pues en este circuito no están permitidos corrientes infinitas gracias a  $R_1$  y  $R_2$ , y los voltajes son todos menores o iguales a  $\varepsilon_0$ ):

$$v_C(0^+) = 0$$

$$i_L(0^+) = 0.$$

Esto nos permite concluir que para  $t = 0^+$ , el circuito se comporta como el siguiente:

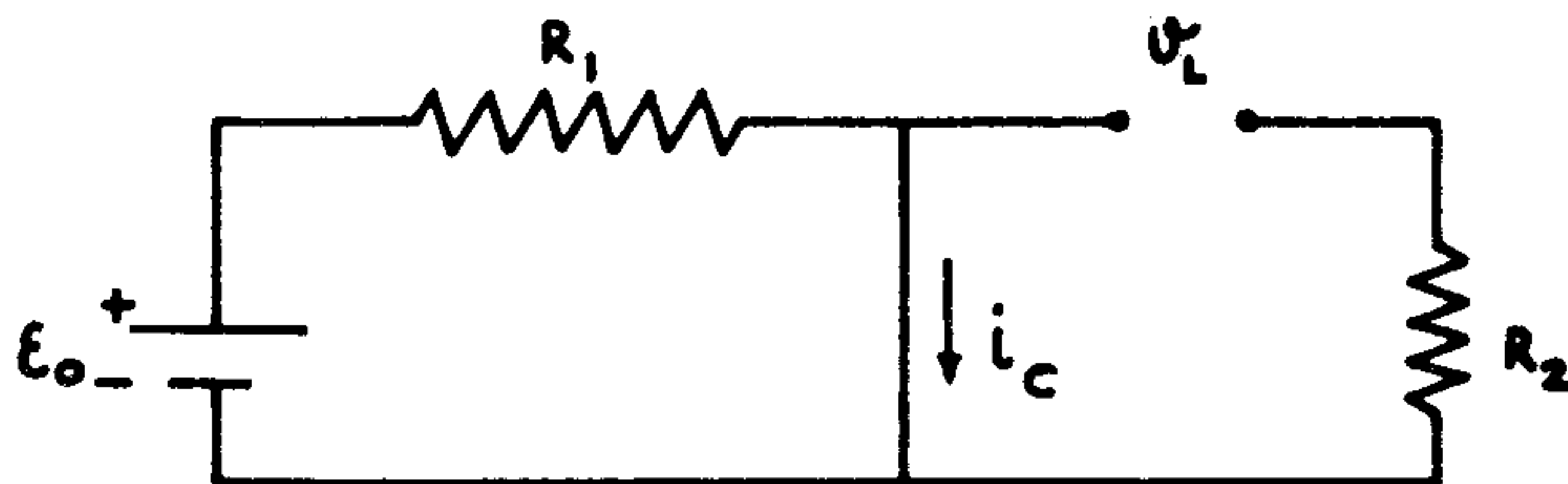


Fig. 161

El hecho que  $i_L(0^+) = 0$  implica que

$$i_{R_2}(0^+) = 0,$$

pues debe cumplirse  $i_L = i_{R_2}$  para cualquier tiempo. Luego también es cierto que

$$v_{R_2}(0^+) = 0$$

luego

$$v_L(0^+) = 0 \quad (v_{R_2} + v_L = 0, \text{ en } t = 0^+).$$

De la figura se ve que:

$$v_{R_1}(0^+) = \varepsilon_0$$

$$i_{R_1}(0^+) = \frac{\varepsilon_0}{R_1}.$$

En  $t = \infty$  sabemos que el circuito ha pasado por su período transiente, y está en régimen permanente; todas las corrientes y los voltajes deben ser constantes; esto nos dice de inmediato que



$$i_c(\infty) = 0$$

$$v_L(\infty) = 0,$$

y por lo tanto el circuito se comporta en  $t = \infty$  como el siguiente:

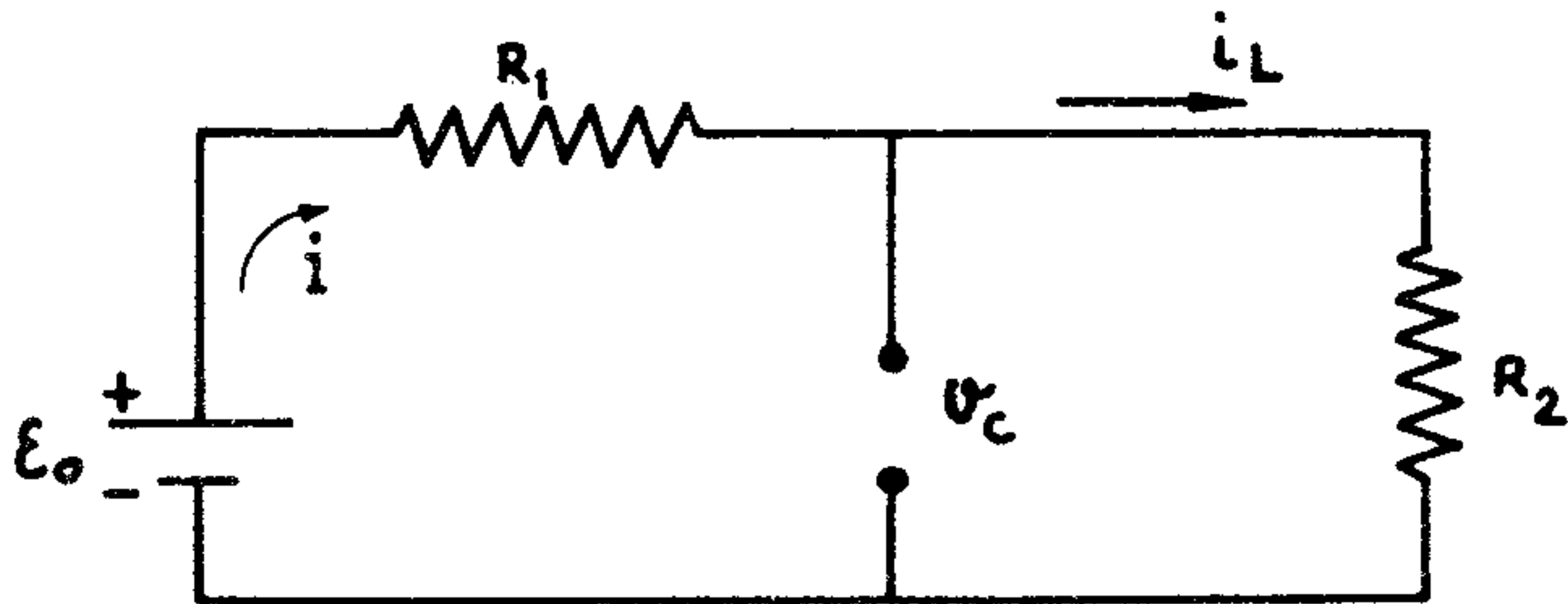


Fig. 162

Por lo tanto,

$$i_{R_1} = i_{R_2} = i_L = \frac{\varepsilon_0}{R_1 + R_2},$$

$$v_C = v_{R_2} = \frac{\varepsilon_0 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$v_{R_1} = \frac{\varepsilon_0 R_1}{R_1 + R_2}$$

B) El circuito es

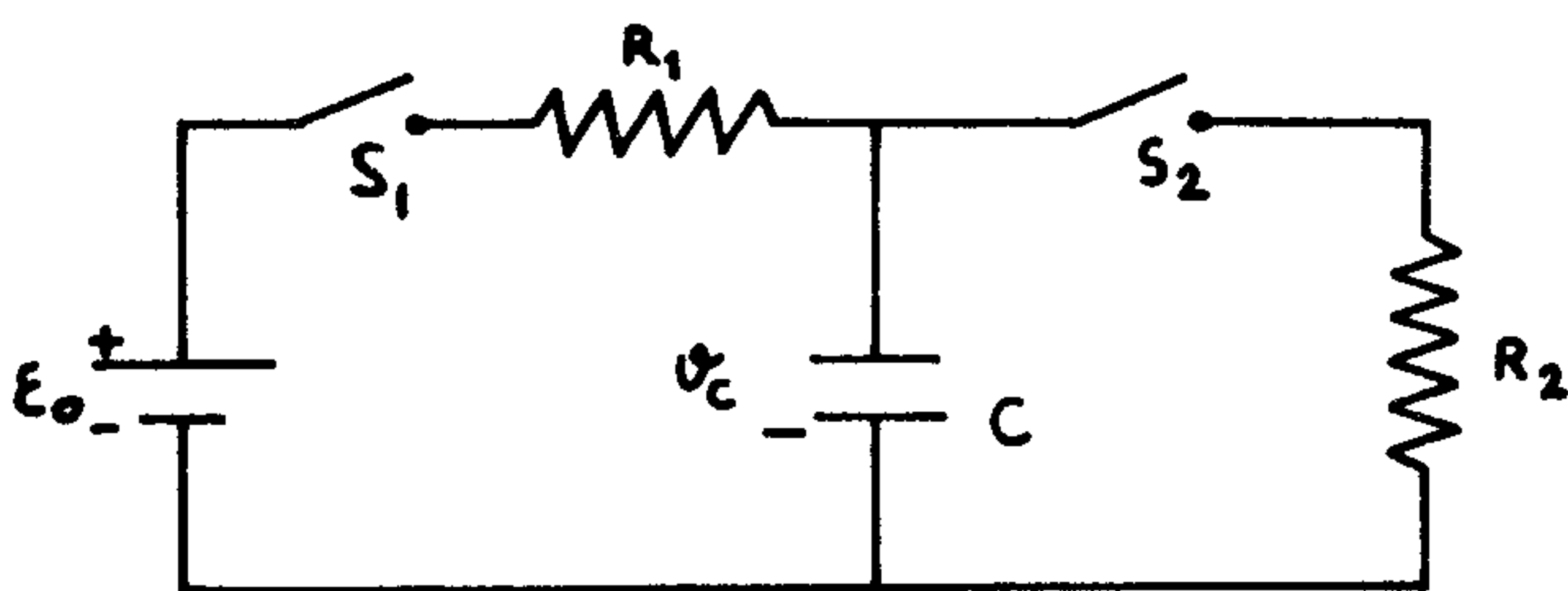


Fig. 163

Para  $-\infty \leq t \leq 0$ ,  $v_C = 0$ .

Para  $0 \leq t \leq t_1$ , al estar cerrado  $S_1$ , la parte relevante del circuito es (Fig. 164).

luego:  $\varepsilon_0 = R_1 i + \frac{q}{C}$  ;

derivando:

$$0 = R_1 \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

luego

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{R_1 C}}$$

donde  $i_0$  es la corriente en el instante inicial  $t = 0$ ; es fácil ver que

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{R_1}$$

pues  $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$ . Luego:

$$v_c = \varepsilon_0 - R_1 i = \varepsilon_0 (1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}),$$

para  $0 \leq t \leq t_1$ .

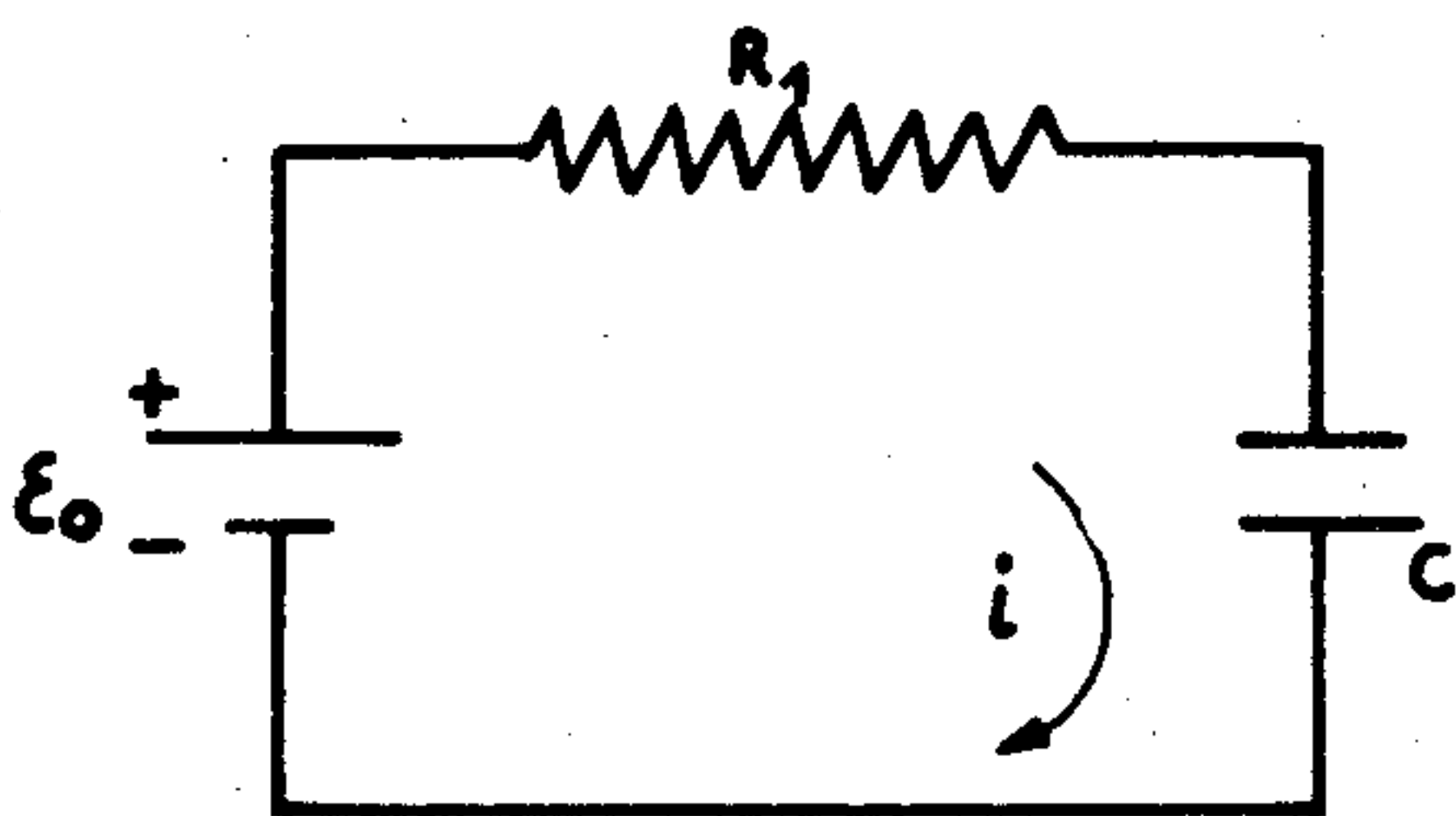


Fig. 164

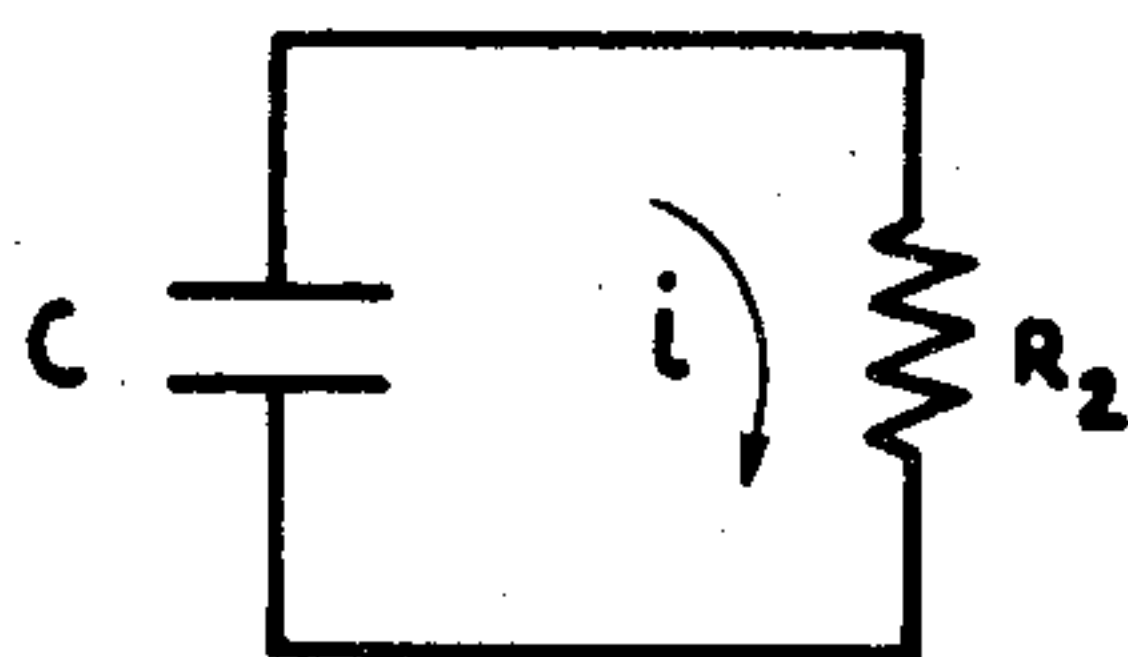


Fig. 165

En  $t = t_1$ , se abre  $S_2$ , abriéndose todo el circuito; luego no circula más corriente, y el voltaje  $v_c(t_1)$  se mantiene durante todo el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

En  $t = t_2$  se cierra  $S_2$ , y el condensador comienza a descargarse a través de  $R_2$ ; el circuito relevante es: (Fíg. 165).

El condensador se comporta como "fuente", y por lo tanto (ver problema 44):

$$v_c = \frac{q}{C} = R_2 i$$

$$\frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = -\frac{i}{C} = R_2 \frac{di}{dt}$$

luego:

$$i = i(t_2) e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

luego:

$$v_c = R_2 i = v_c(t_2) e^{-\frac{t}{R_2 C}}, \quad t_2 \leq t \leq t_3.$$

En  $t_3$  se abre  $S_2$ , quedando el condensador desconectado; por lo tanto para  $t \geq t_3$ , el voltaje  $v_c(t_3)$  se mantiene.

Un gráfico de  $v_c(t)$  es aproximadamente:

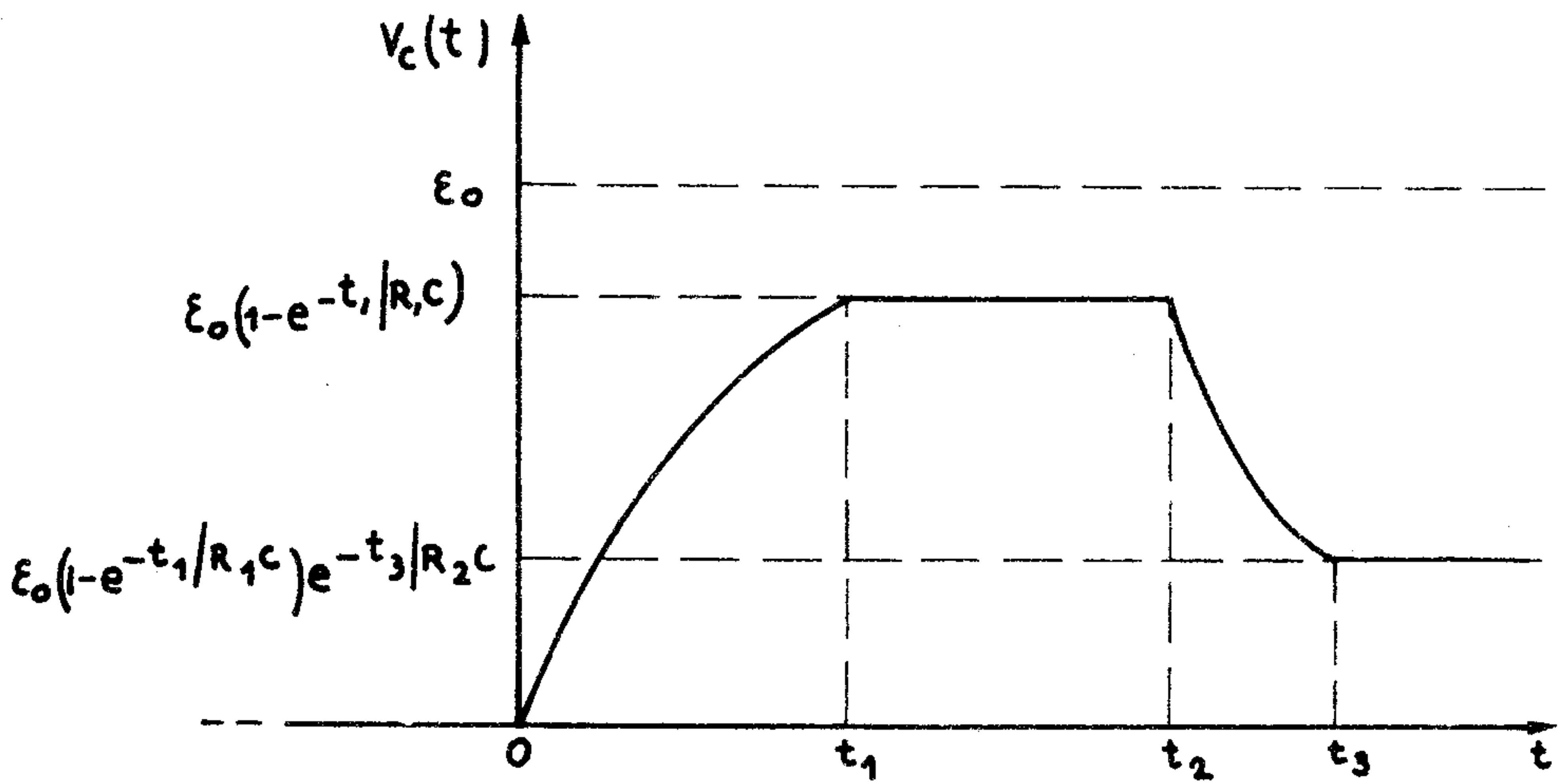


Fig. 166

PROBLEMA 46.-

Calcular la potencia disipada (en Watts) por la resistencia  $R_3$  del siguiente circuito:

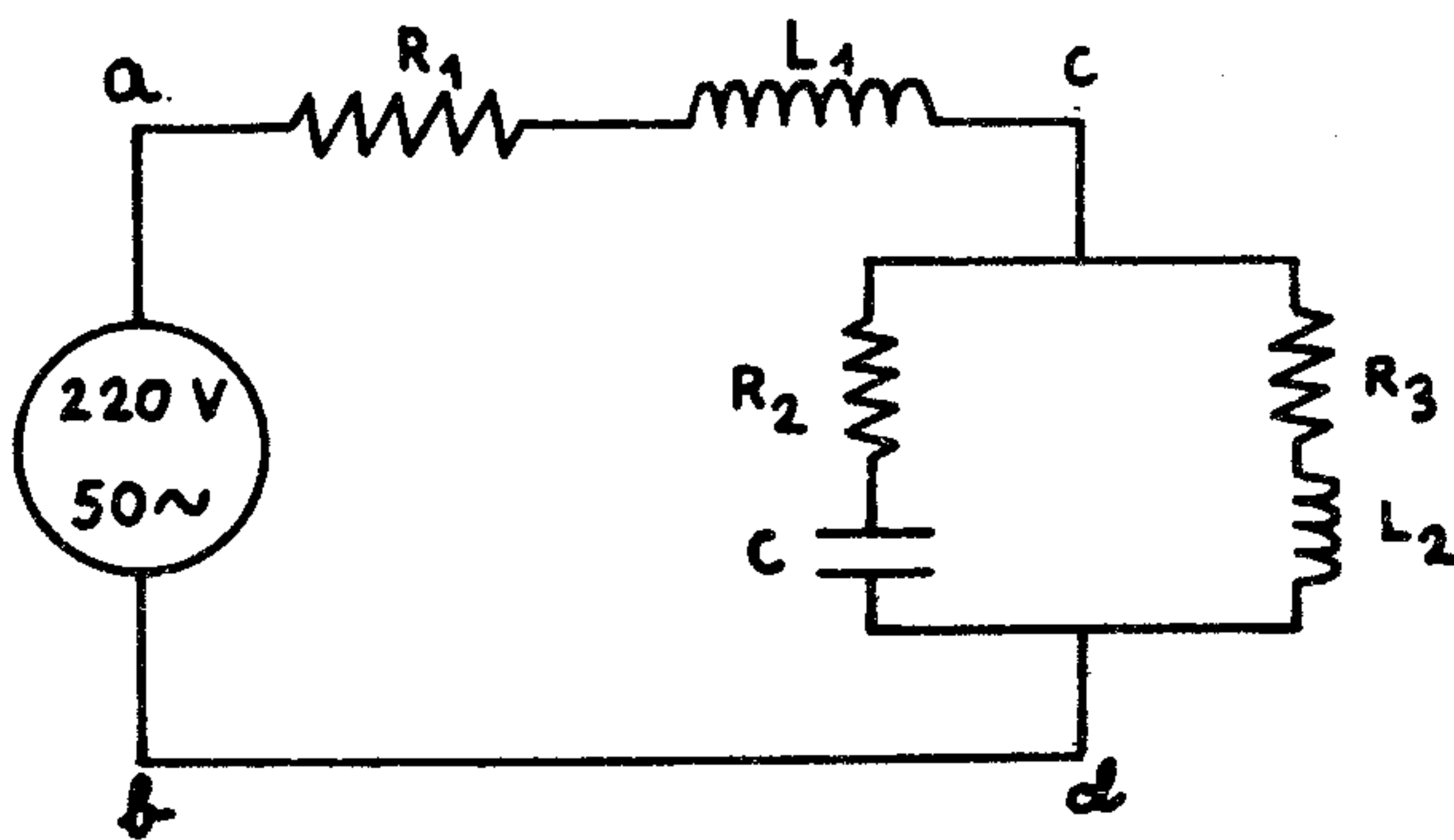


Fig. 167

$$R_1 = 1 [\Omega]$$

$$R_2 = 3 [\Omega]$$

$$R_3 = 2 [\Omega]$$

$$C = 795 [\mu F]$$

$$L_1 = 3,18 [mH]$$

$$L_2 = 6,36 [mH]$$

Resolución.-

La fuente de voltaje de 220 Volts y 50 ciclos por segundo nos proporciona un voltaje alterno entre los bornes a y b que puede escribirse como

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t,$$

eligiendo un origen de tiempos adecuados; aquí,

$$\varepsilon_0 = 220 \sqrt{2} \quad [\text{Volts}]$$

$$\omega = 2\pi \cdot 50 \quad [\text{rad. seg}^{-1}] ,$$

pues se supone que el valor 220 V es el voltaje eficaz de la fuente.

La potencia que se nos pide calcular es evidentemente el valor medio de la potencia instantánea disipada por la resistencia  $R_3$ ; es bien sabido que este valor medio es:

$$W = \langle W(t) \rangle = \frac{1}{2} R_3 I_0^2 ,$$

donde  $I_0$  es la amplitud de la corriente que circula por la resistencia.

Es sabido también que los circuitos de corriente alterna pueden resolverse en la misma forma que los de corriente continua, pero con valores complejos para voltajes, corrientes e impedancias. Esto se hace en la siguiente forma: suponemos que en régimen permanente, las corrientes y voltajes en cualquier rama varían en el tiempo en la forma

$$A(t) = A \cos (\omega t + \phi) ,$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la fuente, y  $\phi$  es un desfaseamiento con respecto a ella; la cantidad  $A$  es la amplitud de la corriente o el voltaje de la rama considerada. Todo el problema se reduce, entonces, a calcular  $A$  y  $\phi$  en cada rama del circuito. La introducción de números complejos al problema se hace aprovechando que:

$$\begin{aligned} A \cos (\omega t + \phi) &= \text{Re}(A e^{j(\omega t + \phi)}) , \quad (j = \sqrt{-1}) \\ &= \text{Re}(\dot{A} e^{j\omega t}) , \end{aligned}$$

donde  $\dot{A}$  se define como:

$$\dot{A} = A e^{j\phi}$$

(El punto indica sólo que se trata de un número complejo). El problema lo hemos reducido entonces a calcular  $\dot{A}$  para cada rama del circuito; teniendo ésta, la multiplicamos por  $e^{j\omega t}$ , tomamos la parte real, y tenemos de inmediato la corriente o el voltaje en función del tiempo.

Es sabido que las cantidades  $\dot{A}$  cumplen con las leyes de Kirchhoff de los circuitos de corriente continua, con la condición de que las impedancias sean números complejos; las impedancias, en módulo tienen dimensiones de resistencia, y entonces, si  $\dot{V}$  e  $\dot{I}$  son el voltaje y la corriente (complejos) a través de una impedancia (compleja)  $\dot{Z}$ , se cumple

$$\dot{V} = \dot{Z} \dot{I}$$

Las impedancias asociadas a la resistencia, inductancia y capacidad son:

$$\text{resistencia } R : R$$

$$\text{inductancia } L : j\omega L$$

$$\text{capacidad } C : \frac{1}{j\omega C}$$

Las impedancias en serie o en paralelo se suman tal como en el caso de corriente continua. Así, el circuito original que teníamos se reduce al siguiente (introduciendo inmediatamente los datos numéricos; las impedancias están en Ohms, las corrientes en Amperes y los voltajes en Volts.)

$$\dot{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 = 220\sqrt{2} \text{ [V]}$$

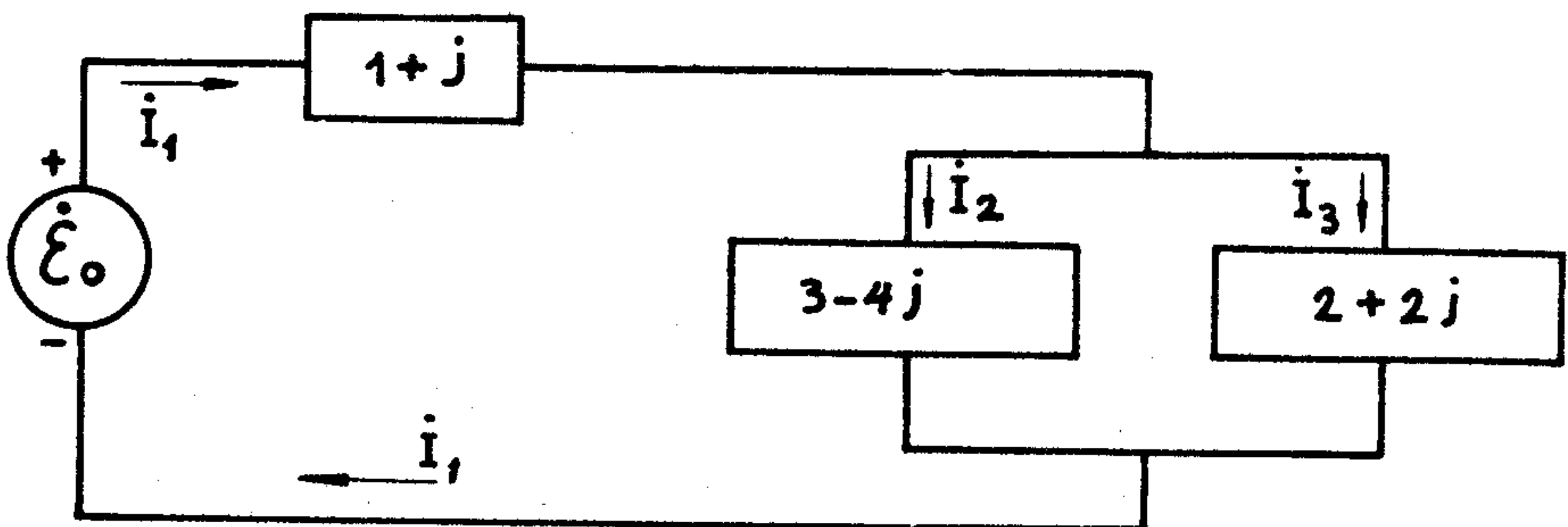


Fig. 168

La potencia disipada por la resistencia  $R_3$  es entonces:

$$W = \frac{1}{2} R_3 |i_3|^2$$

Las ecuaciones para  $\dot{i}_1$ ,  $\dot{i}_2$  e  $\dot{i}_3$  son:

$$\begin{cases} 0 = -\dot{\mathcal{E}}_0 + (1+j)\dot{i}_1 + (2+2j)\dot{i}_3 \\ 0 = (3-4j)\dot{i}_2 - (2+2j)\dot{i}_3 \\ 0 = \dot{i}_1 - \dot{i}_2 - \dot{i}_3 \end{cases}$$

que se resuelve para darnos:

$$\dot{i}_3 = \frac{\dot{\mathcal{E}}_0}{1+j} \frac{3-4j}{11-10j};$$

luego:

$$|\dot{i}_3|^2 = \frac{|\dot{\mathcal{E}}_0|^2}{2} \frac{25}{221} \text{ [Amp.}^2\text{]}$$

$$|\dot{i}_3|^2 = \frac{220^2 \cdot 2}{2} \frac{25}{221} \text{ [Amp.}^2\text{]}$$

y la potencia pedida es:

$$W = \frac{1}{2} R_3 |i_3|^2 \approx 5,5 \text{ [kW]}$$

PROBLEMA 47.-

En el circuito de la figura, calcule la corriente total entregada por la fuente y la corriente y voltaje en cada rama del circuito:

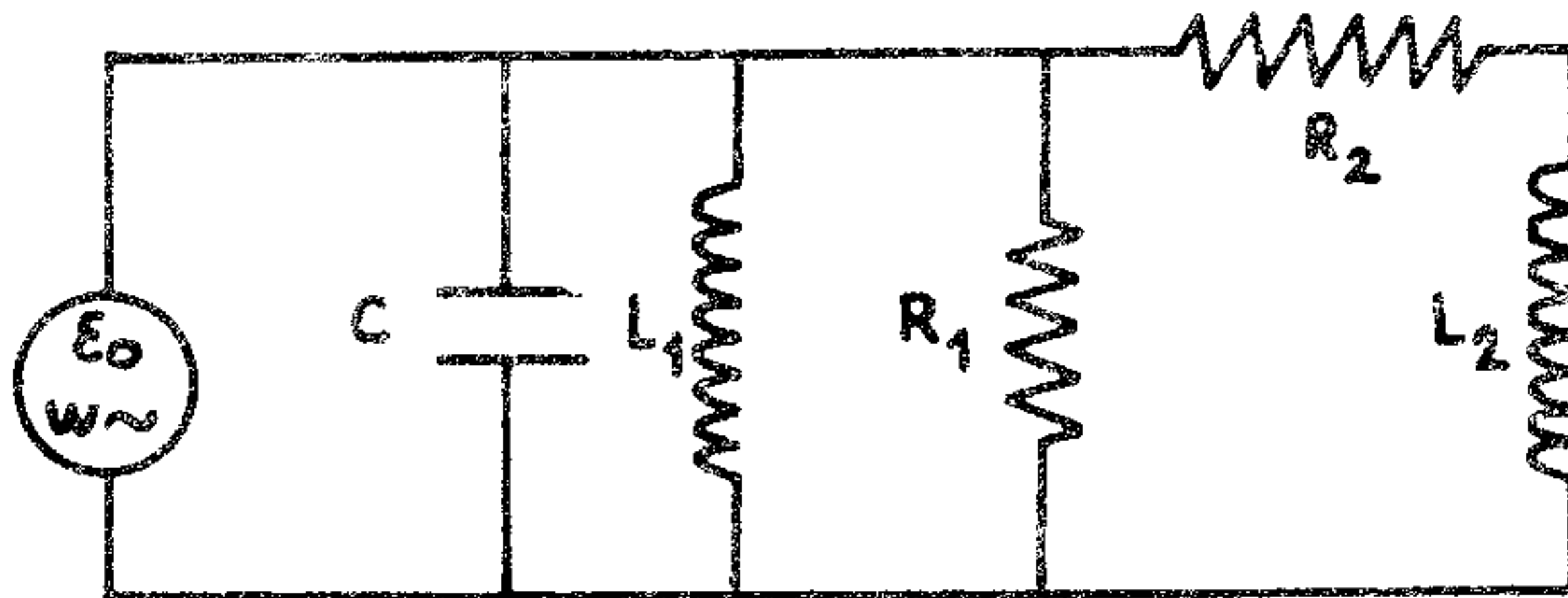


Fig. 169

Resolución.-

Supongamos que el voltaje entregado por la fuente es:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t ;$$

de esta manera, reduciendo el circuito a cantidades complejas queda:

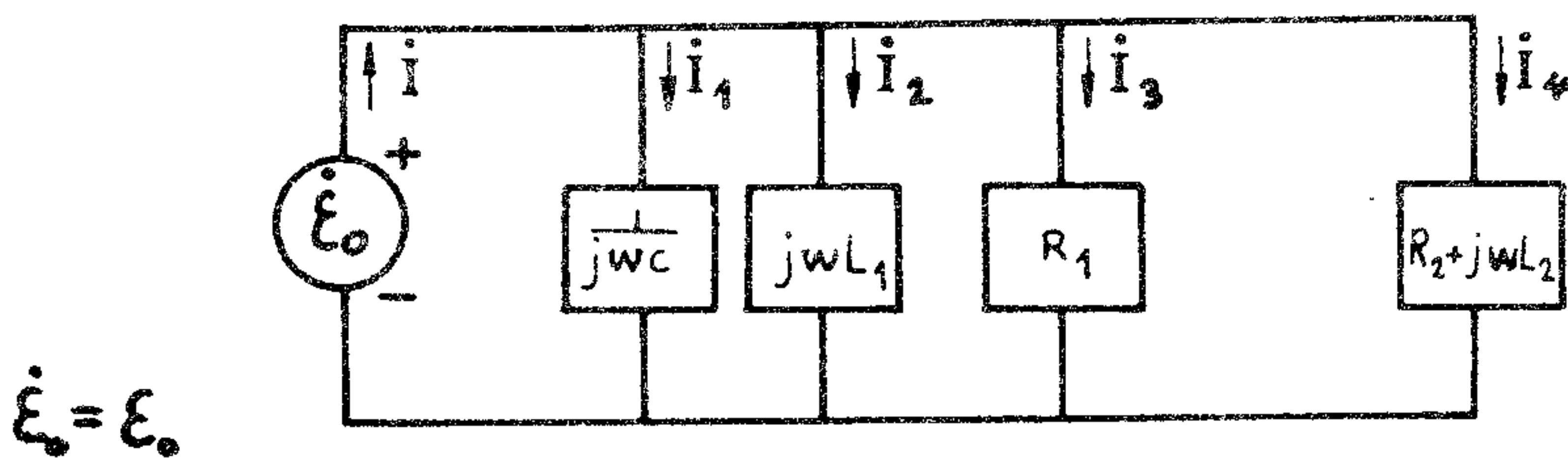


Fig. 170

La impedancia total vista por la fuerza la llamamos  $\dot{Z}$ :

$$\frac{1}{\dot{Z}} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2} ,$$

de modo que la corriente total entregada por la fuente es:

$$\dot{i} = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{Z}} = \dot{\varepsilon}_0 \left( j\omega C - \frac{j}{\omega L_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2} \right)$$

pero:

$$\dot{i} = |i| e^{j\phi} ;$$



la admitancia  $\dot{Y} = \frac{1}{Z}$  puede escribirse como una parte real (conductancia) más  $j$  por una parte imaginaria (susceptancia):

$$\dot{Y} = \frac{1}{Z} = j\omega C - j \frac{1}{\omega L_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{R_2 - j\omega L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L_1} - \frac{\omega L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \right)$$

Esto puede reescribirse como:

$$\dot{Y} = |\dot{Y}| e^{j\phi},$$

donde

$$|\dot{Y}| = \sqrt{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \right)^2 + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L_1} - \frac{\omega L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \right)^2}$$

y donde la fase  $\phi$  es:

$$\phi = \arctg \left( \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L_1} - \frac{\omega L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \right),$$

La corriente total entregada por la fuente es, entonces:

$$I(t) = \text{Re}(\dot{i} e^{j\omega t})$$

$$I(t) = \text{Re}(|\dot{i}| e^{j(\omega t + \phi)})$$

$$I(t) = |\dot{i}| \cos(\omega t + \phi)$$

$$I(t) = \varepsilon_0 |\dot{Y}| \cos(\omega t + \phi).$$

El voltaje a través de  $C$  es el mismo que entrega la fuente; lo mismo ocurre con  $L_1$  y  $R_1$ :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t \quad \begin{cases} C \\ L_1 \\ R_1 \end{cases}$$

La corriente a través de  $C$  es:

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{1/j\omega C} = j\omega C \dot{\varepsilon}_0 = \omega C \dot{\varepsilon}_0 e^{j\pi/2};$$

luego:

$$i_1(t) = \omega C \varepsilon_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\omega C \varepsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$$

(pues  $\dot{\varepsilon}_0 \equiv \varepsilon_0$ ).

La corriente por  $L_1$  es:

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{j\omega L_1} = -j \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\omega L_1} = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\omega L_1} e^{-j\frac{\pi}{2}};$$

luego ( $\varepsilon_0 = \dot{\varepsilon}_0$ ):

$$i_2(t) = \frac{\varepsilon_0}{\omega L_1} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{\varepsilon_0}{\omega L_1} \operatorname{sen} \omega t$$

La corriente por  $R_1$  es:

$$\dot{i}_3 = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{R_1};$$

luego:

$$i_3(t) = \frac{\varepsilon_0}{R_1} \cos \omega t.$$

La corriente por  $R_2$  y  $L_2$  es:

$$\begin{aligned} i_4 &= \frac{\dot{\varepsilon}_0}{R_2 + j\omega L_2} = \varepsilon_0 \frac{R_2 - j\omega L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \\ &= \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} e^{j\phi_4}, \end{aligned}$$

donde

$$\phi_4 = \operatorname{arctg} \left( -\frac{\omega L_2}{R_2} \right);$$

luego:

$$i_4(t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \cos(\omega t + \phi_4)$$

El voltaje a través de  $R_2$  es:

$$\dot{\varepsilon}_{R_2} = R_2 \dot{i}_4$$

$$\dot{\varepsilon}_{R_2} = \frac{R_2 \varepsilon_0}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} e^{j\phi_4} ;$$

luego:

$$\varepsilon_{R_2}(t) = \frac{R_2 \varepsilon_0}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \cos(\omega t + \phi_4)$$

El voltaje a través de  $L_2$  es:

$$\dot{\varepsilon}_{L_2} = j\omega L_2 \dot{i}_4 = \omega L_2 \dot{i}_4 e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{\varepsilon}_{L_2} = \frac{\omega L_2 \varepsilon_0}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} e^{j(\phi_4 + \frac{\pi}{2})} ;$$

luego:

$$\varepsilon_{L_2}(t) = \frac{\omega L_2 \varepsilon_0}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \cos(\omega t + \phi_4 + \frac{\pi}{2})$$

$$\varepsilon_{L_2}(t) = \frac{L_2 \varepsilon_0 \omega}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \sin(\omega t + \phi_4).$$

#### PROBLEMA 48.-

El circuito de la figura representa un motor de 1 h.p. de potencia activa y de  $\cos \phi = 0,8$ ; está alimentado por una fuente de 220 Volts efectivos, y de 50 c.p.s.

- Calcule  $R$  y  $L$ .
- Calcule la corriente.
- Haga un diagrama fasorial, mostrando la corriente y la tensión en  $R$  y  $L$ .
- Calcule la potencia reactiva (en función del tiempo, evidentemente).
- Conecte un condensador en paralelo con el motor, y calcule su capacidad de modo que la red sea un circuito puramente resistivo. Pruebe que en

este caso la corriente necesaria por la red es mínima.

Nota: 1 h.p. = 0,7351 kW = 735,1 Watts.

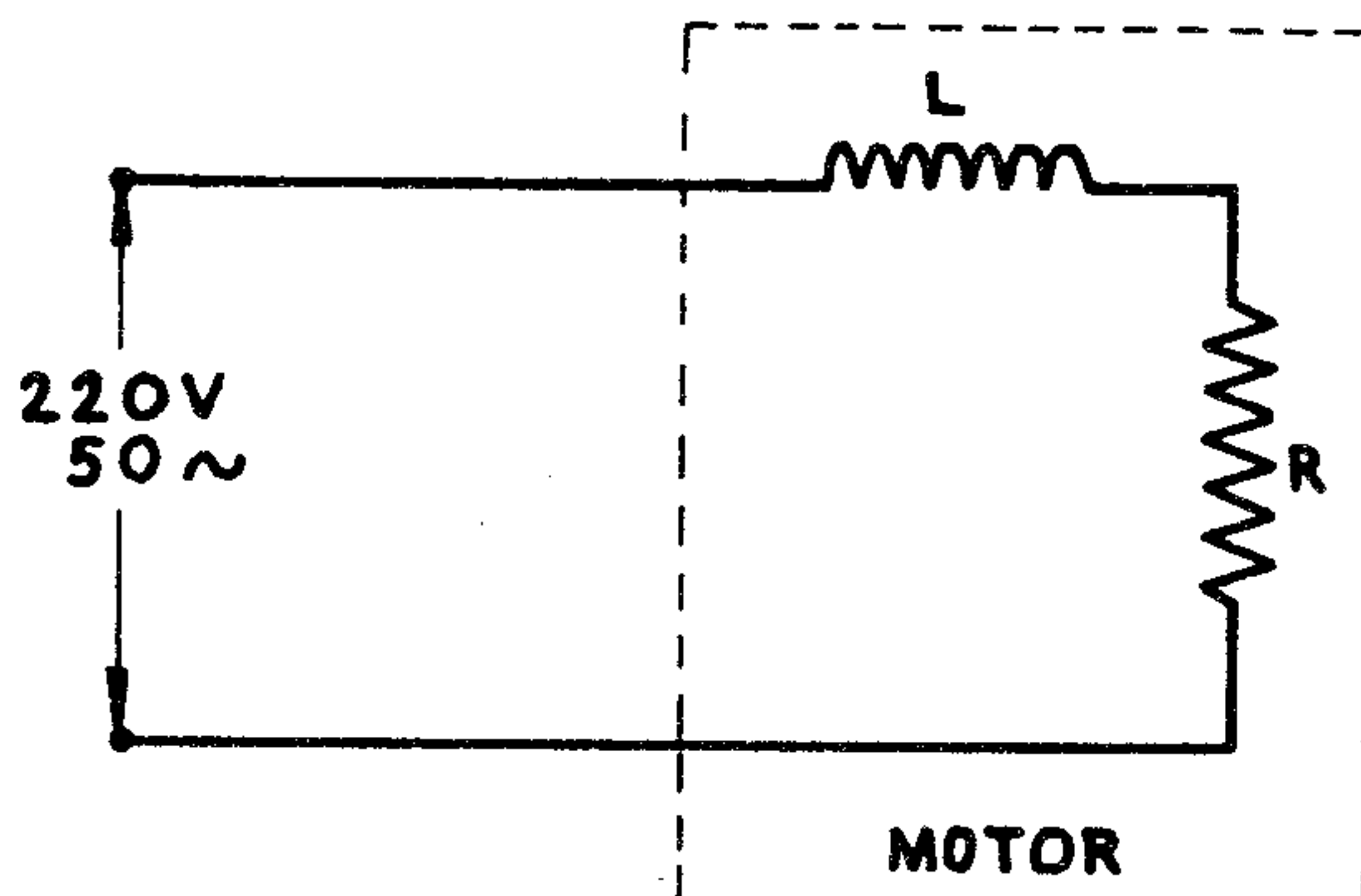


Fig. 171

Resolución.-

a) Supongamos que el voltaje entregado por la fuente es:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t,$$

donde

$$\varepsilon_0 = 220 \sqrt{2} [\text{Volts}] \approx 312 [\text{Volts}]$$

$$\omega = 2\pi \cdot 50 [\text{rad} \cdot \text{seg}^{-1}] \approx 314,16 [\text{rad} \cdot \text{seg}^{-1}]$$

La impedancia del motor es:

$$\dot{Z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j\phi},$$

$$\phi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

Para calcular R y L, necesitamos dos ecuaciones; una de ellas es:

$$\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = 0,8 ;$$

la otra ecuación la obtenemos de la definición de potencia activa (que se disipa en la resistencia R solamente):

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 I_0 \cos \phi = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos \phi$$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_0}{Z} \cos \phi$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0^2 \cos \phi}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

luego

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\varepsilon_0^2 \cos \phi}{2W}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$R = \frac{\varepsilon_0^2 \cos^2 \phi}{2W}$$

$$L = \frac{\varepsilon_0^2 \cos \phi \sin \phi}{2\omega W}$$

e introduciendo los valores numéricos, se obtiene:

$$R \approx 42,2 [\Omega]$$

$$L \approx 0,1 [\text{Henry}] = 100 [\text{mH}]$$

b) La corriente que circula por el motor es:

$$\dot{i} = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{Z} = \frac{\dot{\varepsilon}_0 e^{-j\phi}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (\dot{\varepsilon}_0 \equiv \varepsilon_0)$$

luego:

$$i(t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \phi),$$

e introduciendo valores numéricos, se obtiene:

$$i(t) = 5,92 \cos(\omega t - 0,64) [\text{Amp.}]$$

c) En la resistencia R, se tiene:

$$\dot{\varepsilon}_R = R \dot{i},$$

de modo que tensión y corriente están en fase; el diagrama correspondiente es: (Fig. 172).

la potencia reactiva es, entonces:

$$W_r(t) = \frac{\varepsilon_o^2 \sin \phi}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \omega t \cos \omega t$$

$$W_r(t) \approx 1110 \sin \omega t \cos \omega t \text{ [Watts]}$$

(El valor medio de la potencia reactiva es, naturalmente, nulo).

e) El nuevo circuito es:

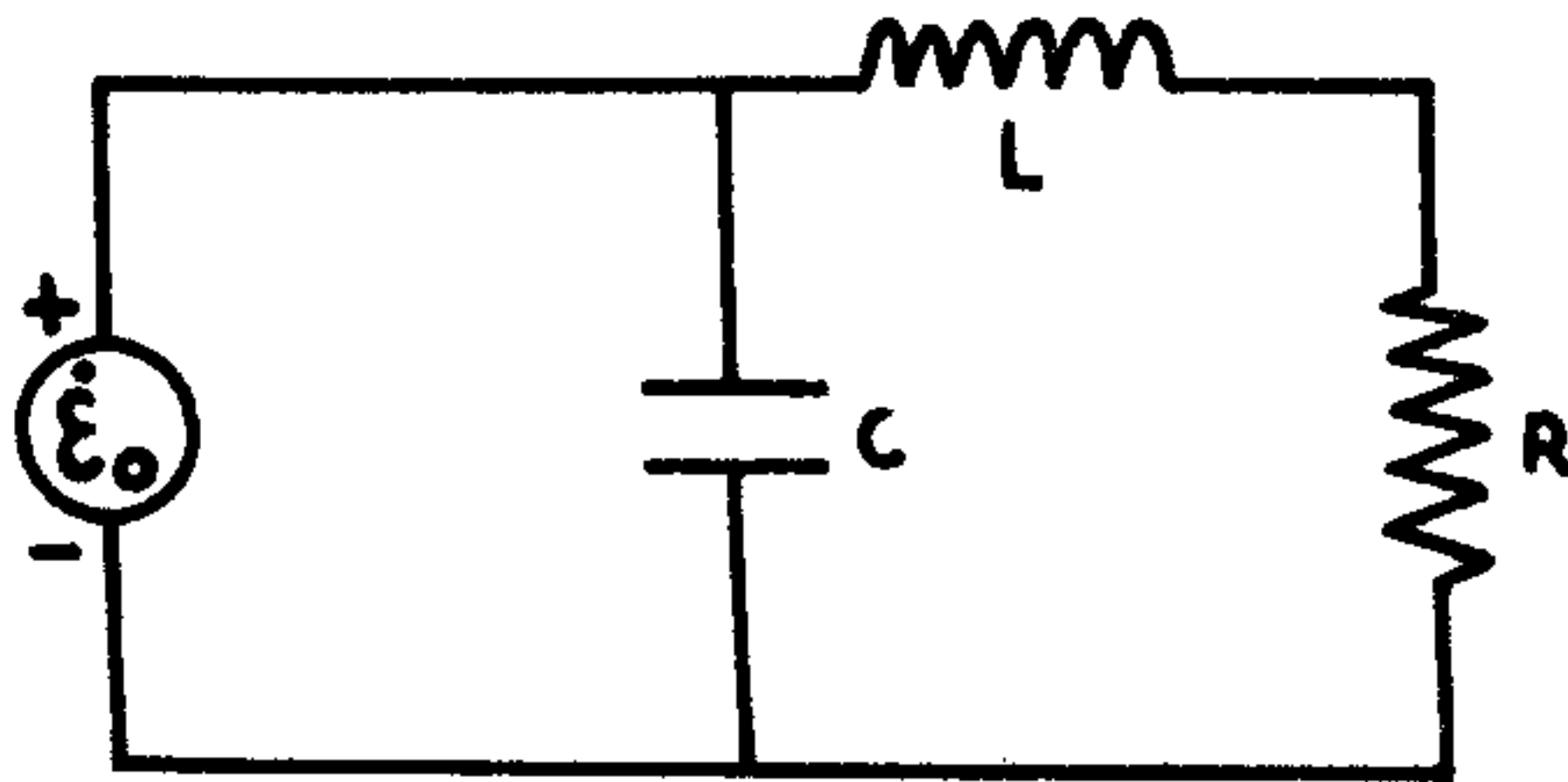


Fig. 174

si llamamos  $\dot{Z}'$  a la nueva impedancia vista por la fuente, entonces

$$\frac{1}{\dot{Z}'} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L};$$

para que el circuito sea puramente resistivo, se requiere que la impedancia  $\dot{Z}'$  sea real, pues ésta es la única forma de que la tensión y la corriente de la fuente estén en fase; o sea:

$$\frac{1}{\dot{Z}'_o} = j\omega C_o + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \text{real}$$

luego

$$\omega C_o - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

$$C_o = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

e introduciendo valores numéricos, se obtiene:

$$C_o \approx 36 \text{ } [\mu\text{F}].$$



Calculemos la corriente cuando la impedancia es  $\dot{Z}'$ :

$$\dot{i}' = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{Z}'} = \dot{\varepsilon}_0 \left( j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

$$\dot{i}' = |\dot{i}'| e^{j\phi'} = \varepsilon_0 \sqrt{\left( \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left( \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} e^{j\phi'},$$

donde

$$\phi' = \arctg \left( \frac{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}} \right);$$

la corriente es, entonces:

$$i'(t) = |\dot{i}'| \cos(\omega t + \phi').$$

Se ve de aquí que  $i'(t)$  será mínima cuando  $|\dot{i}'|$  sea mínima; esto se obtiene, evidentemente, cuando

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

que es igual a  $C_0$ , la capacidad necesaria para tener un circuito puramente resistivo.

#### PROBLEMA 49.-

En el circuito de la figura, calcule las corrientes  $I_1, I_2$  e  $I_3$ .

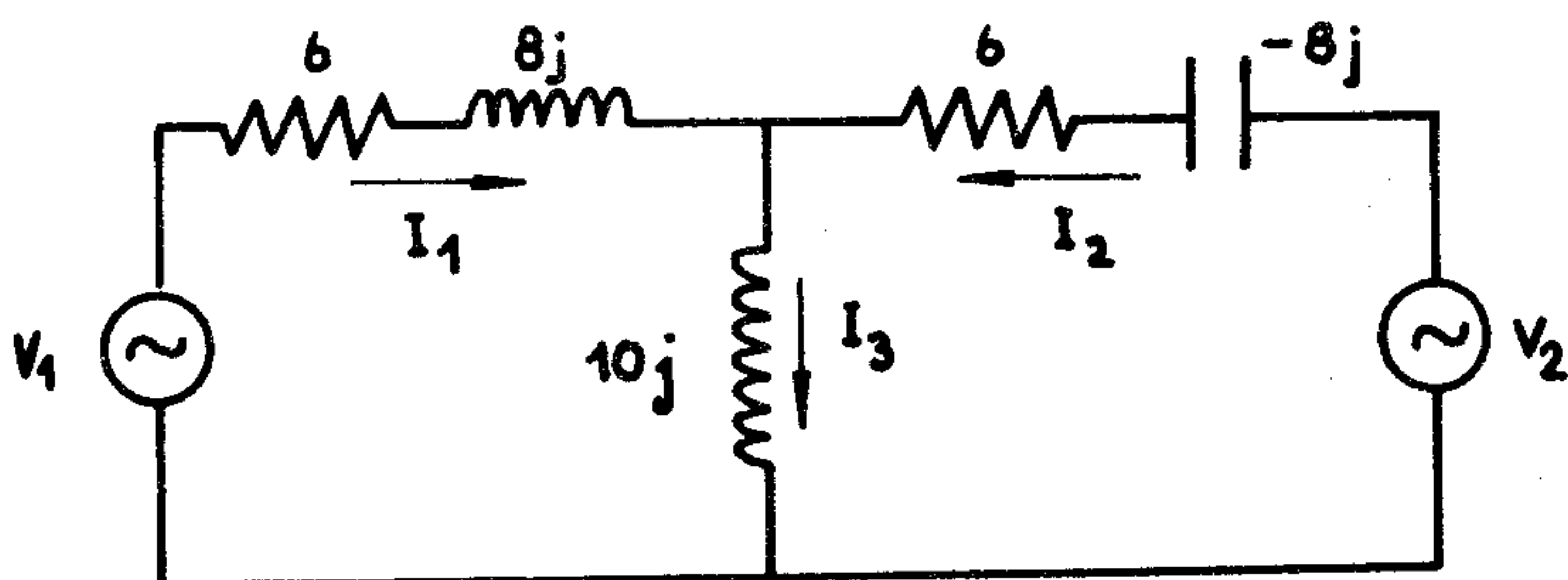


Fig. 175

$$V_1 = 100 \angle 0^\circ$$

( $V_1$  y  $V_2$  tienen la misma frecuencia).

$$V_2 = 100 \angle -60^\circ$$

Resolución.-

Supongamos que

$$V_1(t) = 100 \cos \omega t;$$

entonces:

$$V_2(t) = 100 \cos(\omega t - 60^\circ).$$

Luego:

$$\dot{V}_1 = V_1 = 100$$

$$\dot{V}_2 = 100 e^{-j \frac{\pi}{3}}$$

El circuito, escrito con cantidades complejas es entonces:

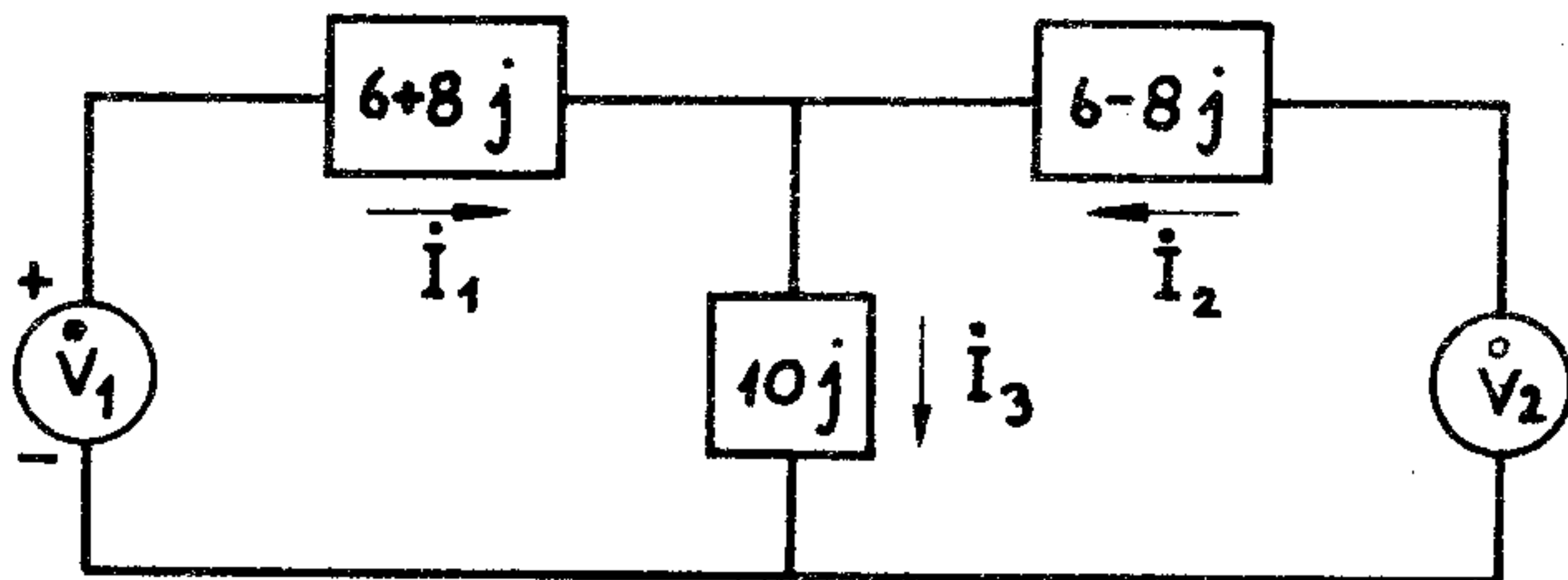


Fig. 176

y las ecuaciones para este circuito son:

$$\left. \begin{aligned} -\dot{V}_1 + (6 + 8j) \dot{i}_1 + 10j \dot{i}_3 &= 0 \\ -\dot{V}_2 + (6 - 8j) \dot{i}_2 + 10j \dot{i}_3 &= 0 \\ \dot{i}_3 - \dot{i}_1 - \dot{i}_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve para darnos:

$$\dot{i}_1 = \frac{600 - 500\sqrt{3} - 300j}{100 + 120j} \approx -2,56 + 0,0738j,$$

$$\dot{i}_2 = \frac{300 + 900\sqrt{3} - 100j - 300\sqrt{3}j}{100 + 120j} \approx 4,16 - 3,45j,$$

$$\dot{i}_3 = \frac{900 + 400\sqrt{3} - 400j - 300\sqrt{3}j}{100 + 120j} \approx 1,60 - 3,38j.$$

Las corrientes  $\dot{i}_1, \dot{i}_2$  e  $\dot{i}_3$  pueden escribirse en la forma

$$\dot{i} = |\dot{i}|e^{j\phi}$$

donde

$$|\dot{i}| = \sqrt{(\text{Re}\dot{i})^2 + (\text{Im}\dot{i})^2}$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{\text{Im}\dot{i}}{\text{Re}\dot{i}}\right);$$

así se obtiene:

$$|\dot{i}_1| \approx 2,56; \quad \phi_1 \approx 3,12$$

$$|\dot{i}_2| \approx 5,40; \quad \phi_2 \approx -0,693$$

$$|\dot{i}_3| \approx 3,70; \quad \phi_3 \approx -1,12.$$

Las corrientes son, entonces:

$$i_1(t) \approx 2,56 \cos(\omega t + 3,12),$$

$$i_2(t) \approx 5,40 \cos(\omega t - 0,693),$$

$$i_3(t) \approx 3,70 \cos(\omega t - 1,12).$$

#### PROBLEMA 50.-

Considere la propagación de ondas electromagnéticas planas en un plasma (gas iónico tenue), cuya densidad iónica es  $N$ . La ecuación de onda es

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \dots\dots (1)$$

$$(v^2 = \frac{1}{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0});$$

suponga soluciones del tipo

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

(onda plana monocromática que se propaga en la dirección positiva del eje Oz).

- Sustituya la solución en (1) y obtenga una expresión para el índice de refracción del plasma; esta expresión contiene la conductividad  $\sigma$ ; los puntos siguientes llevan a su cálculo.
- Escriba la ecuación del movimiento de los iones; de las fuerzas que actúan, desprecie la fuerza magnética, y suponga que no hay disipación de energía, es decir, que la amplitud del movimiento es lo suficientemente pequeña como para que no haya choques entre los iones, que se mueven bajo la influencia del campo; por ejemplo, suponga que la amplitud del movimiento es mucho menor que la longitud de onda; integre una vez y obtenga así la velocidad de los iones.
- Escriba la densidad de corriente, usando el resultado de b) y la densidad iónica N.
- Usando c), obtenga la conductividad  $\sigma$ ; discuta.
- Introduzca  $\sigma$  en el índice de refracción; discuta.

#### Resolución,-

- La ecuación diferencial de la onda es

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

y con la solución

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (\vec{E}_0 = \text{cte}),$$

resulta:

$$\nabla^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} ;$$

luego:

$$-k^2 \vec{E} = \mu\mu_0 \sigma (-i\omega) \vec{E} - \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E} ,$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} + i\mu\mu_0 \sigma \omega$$

En general, el índice de refracción se define como:

$$n = \frac{ck}{\omega} ,$$

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} + i \frac{\mu\mu_0 \sigma c^2}{\omega}$$

b) Si  $m$  y  $q$  son la masa y la carga de un ion, entonces la ecuación del movimiento es:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} + \text{fuerza de roce};$$

despreciando la fuerza magnética y la de roce, la ecuación queda:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

Consideremos un ion en un punto  $(x_0, y_0, z_0) = \vec{r}_0$ ; la dirección de  $\vec{E}_0$  será en general arbitraria (pero constante); por lo tanto el ion, al moverse, lo hará en torno a  $\vec{r}_0$ , y su coordenada  $z$  será:

$$z = z_0 + \Delta z,$$

donde  $\Delta z$  varía con el tiempo sinusoidalmente.

Luego:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ikz_0} e^{ik \Delta z} e^{-i\omega t} ;$$

pero el valor máximo de  $\Delta z$  es la amplitud de la oscilación del ion, y sabemos que ésta es despreciable frente a la longitud de onda; por lo tanto,

$$k \Delta z = 2\pi \frac{\Delta z}{\lambda} \approx 0 ;$$

$$\text{Luego } \vec{E} \approx \vec{E}_0 e^{i(kz_0 - \omega t)} ,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\vec{E}_0 e^{i(kz_0 - \omega t)}}{m} ,$$

$$\text{y } \vec{v} = \frac{q\vec{E}_0 e^{i(kz_0 - \omega t)}}{-mi\omega} + \vec{v}_0 ;$$

Aquí,  $\vec{v}_0$  es una constante de integración, que podemos igualar a cero si suponemos que cuando no hay campo, el ion no se mueve (esto no es posible en la práctica, pues contradice la hipótesis de que los iones forman un gas; pero en todo caso, la velocidad  $\vec{v}_0$  no se debe al campo eléctrico, y por lo tanto no interviene en absoluto en la conductividad eléctrica del plasma). Luego:

$$\vec{v} = i \frac{q\vec{E}_0 e^{i(kz_0 - \omega t)}}{m\omega}$$

c) Por definición de la densidad de corriente  $\vec{j}$ ,

$$\vec{j} = qN\vec{v} = i \frac{q^2 N \vec{E}}{m\omega}$$

d) Por otra parte, se sabe también:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E};$$

luego:

$$\sigma = i \frac{Nq^2}{m\omega}.$$

El resultado nos dice que la conductividad es imaginaria pura; esto tiene la interpretación inmediata que la densidad de corriente  $\vec{j}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  no están en fase; más precisamente, la densidad de corriente atrasa en  $\pi/2$  con respecto al campo eléctrico. Esto ocurre solamente si despreciamos las fuerzas magnéticas y de roce; si aún despreciamos la fuerza magnética pero suponemos una fuerza de roce proporcional a la velocidad del ion, obtendremos una conductividad que es compleja en general; el campo eléctrico y la corriente estarán desfasados en un ángulo cualquiera.

e) Introduciendo el valor de  $\sigma$  en la expresión para el índice de refracción obtendremos:

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} - \frac{\mu\mu_0 c^2 Nq^2}{m\omega^2}$$

y como

$$v^2 = \frac{1}{\mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0},$$

se obtiene:

$$n = \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \frac{Nq^2}{\epsilon\epsilon_0 m\omega^2}}.$$

La cantidad

$$\left( \frac{Nq^2}{m\epsilon\epsilon_0} \right)^{1/2},$$

que depende sólo de características intrínsecas del plasma, tiene dimensiones de frecuencia, y se la denomina "frecuencia de plasma",  $\omega_p$ . De este modo, el índice de refracción se escribe:

$$n = \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}$$



El índice de refracción del plasma puede ser real o complejo, dependiendo del valor de la frecuencia  $\omega$  de la onda; para ondas de alta frecuencia, en que  $\omega > \omega_p$ , el índice de refracción es real, y las ondas se propagan libremente a través del plasma, refractándose; el fenómeno es completamente análogo a la propagación de la luz a través de un cristal. Pero si se cumple que  $\omega < \omega_p$ , entonces el índice de refracción es imaginario puro; supongamos que el plasma existe más allá de un plano bien definido que lo separa del vacío (interfase), y que la onda procede desde el vacío incidiendo sobre el plasma; entonces la onda se reflejará en la interfase, y se atenuará exponencialmente más allá de ella, sin propagarse, sino que oscilando sinusoidalmente como una onda estacionaria. Esto se puede demostrar fácilmente; en efecto, el número de onda  $k$  es proporcional al índice de refracción  $n$ :

$$k = n \frac{\omega}{c} ;$$

por lo tanto, si  $n$  es imaginario puro, también lo es  $k$ ; si escribimos  $n$  como

$$n = i\alpha \quad , \quad \alpha \text{ real},$$

entonces

$$k = i \frac{\omega \alpha}{c} ;$$

el campo eléctrico dentro del plasma es, entonces:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(i \frac{\omega \alpha}{c} z - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega \alpha}{c} z} e^{-i\omega t}$$

lo que demuestra lo que queríamos. El hecho que la onda se refleje sin transmitirse implica que se ejerce una presión sobre el plasma (presión de radiación). Esto se utiliza para confinar plasmas a altísimas temperaturas, usando la presión de radiación como un "envase" del plasma; de otra manera, el plasma caliente vaporizaría cualquier objeto cercano.

#### PROBLEMA 51.-

Una onda electromagnética plana incide sobre la superficie de separación de dos medios dieléctricos como se indica en la figura.

- Demuestre que existe un ángulo de incidencia para el cual no hay reflexión (ángulo de Brewster); calcúlelo.
- Calcule el ángulo de incidencia para el cual la onda refractada se propaga paralelamente a la superficie de separación, y calcule el promedio temporal de flujo de energía a través de ella.

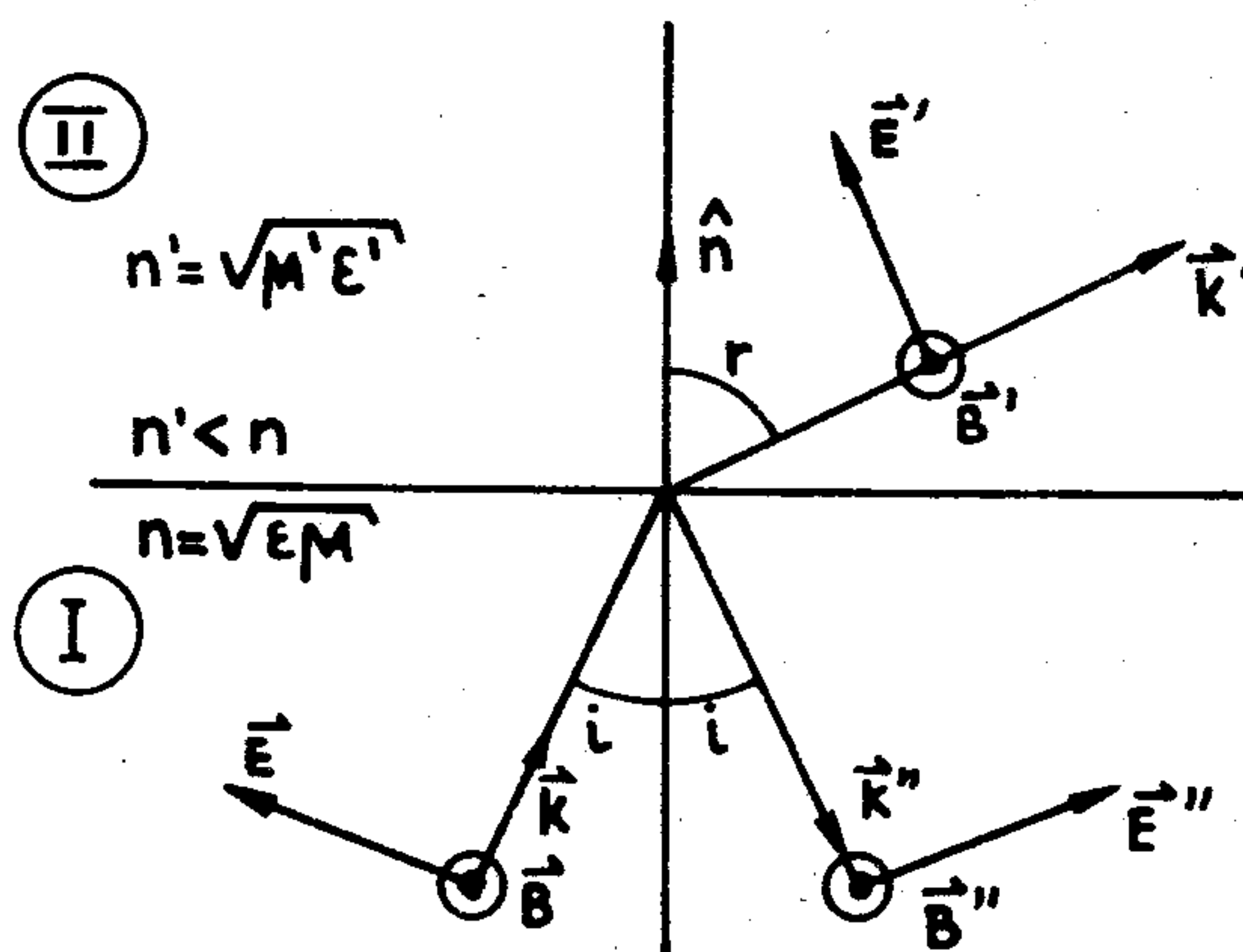


Fig. 177

### Resolución.-

Es bien sabido que las ecuaciones de Maxwell implican que en una superficie de separación de dos medios, se conservan las componentes normales a la superficie de los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$ , y las componentes tangenciales de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ .

Esto se traduce en cuatro ecuaciones para nuestro caso, que son:

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n} \\ B_{1n} &= B_{2n} \\ E_{1t} &= E_{2t} \\ H_{1t} &= H_{2t} \end{aligned} \right\} \quad \text{o bien} \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{D}_1 \cdot \hat{n} &= \vec{D}_2 \cdot \hat{n} & (1) \\ \vec{B}_1 \cdot \hat{n} &= \vec{B}_2 \cdot \hat{n} & (2) \\ \vec{E}_1 \times \hat{n} &= \vec{E}_2 \times \hat{n} & (3) \\ \vec{H}_1 \times \hat{n} &= \vec{H}_2 \times \hat{n} & (4) \end{aligned} \right.$$

Usando las definiciones

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

y el hecho que, para una onda plana,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega},$$

podemos escribir las cuatro ecuaciones en términos de la amplitud eléctrica de la onda,  $\vec{E}_0$ :

$$[\epsilon_0 \epsilon (\vec{E}_0 + \vec{E}_0') - \epsilon_0 \epsilon' \vec{E}_0'] \cdot \hat{n} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\left[ \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} + \frac{\vec{k}'' \times \vec{E}_0''}{\omega} - \frac{\vec{k}' \times \vec{E}_0'}{\omega} \right] \cdot \hat{n} = 0 \dots\dots (2)$$

$$(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'' - \vec{E}_0') \times \hat{n} = \vec{0} \dots\dots\dots (3)$$

$$\left[ \frac{1}{\mu \mu_0} (\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'') - \frac{1}{\mu' \mu_0} \vec{k}' \times \vec{E}_0' \right] \times \hat{n} = \vec{0} \dots (4)$$

Además sabemos que se cumple la ley de Snell.

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{\mu' \epsilon'}{\mu \epsilon}}$$

La ecuación (2) es trivial, pues por hipótesis, todos los campos magnéticos son perpendiculares a  $\hat{n}$ .

La ecuación (3) es:

$$\vec{E}_0 \times \hat{n} + \vec{E}_0'' \times \hat{n} - \vec{E}_0' \times \hat{n} = \vec{0} ;$$

cada uno de estos vectores son colineales entre sí; los vectores  $\vec{E}_0 \times \hat{n}$  y  $\vec{E}_0'' \times \hat{n}$  apuntan en el mismo sentido, mientras que  $\vec{E}_0' \times \hat{n}$  lo hace en el sentido contrario; luego la ecuación se escribe:

$$|\vec{E}_0| \text{sen}(\vec{E}_0, \hat{n}) - |\vec{E}_0''| \text{sen}(\vec{E}_0'', \hat{n}) - |\vec{E}_0'| \text{sen}(\vec{E}_0', \hat{n}) = 0$$

o bien:

$$E_0 \cos i - E_0'' \cos i - E_0' \cos r = 0 \dots\dots\dots (3)$$

Análogamente, en la ecuación (4), que es

$$\vec{H}_0 \times \hat{n} + \vec{H}_0'' \times \hat{n} - \vec{H}_0' \times \hat{n} = \vec{0},$$

se cumple que los tres vectores son colineales y apuntan en el mismo sentido; luego:

$$H_0 + H_0'' - H_0' = 0 ;$$

y como

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\mu\mu_0\omega} = \frac{2\pi\hat{k} \times \vec{E}}{\mu\mu_0\lambda\omega},$$

o sea

$$\vec{H} = \frac{n\hat{k} \times \vec{E}}{\mu\mu_0 c},$$

resulta:

$$\frac{nE_o}{\mu\mu_0 c} + \frac{E''_o}{\mu\mu_0 c} - \frac{n'E'_o}{\mu'\mu_0 c} = 0$$

o bien:

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{u}} (E_o + E''_o) - \sqrt{\frac{\epsilon'}{u'}} E'_o = 0 \dots\dots (4)$$

La ecuación (1) junto con la ley de Snell nos reproduce la ecuación (2); de este modo tenemos, finalmente, dos ecuaciones, la (3) y la (4); dividiendo ambas por  $E_o$ , se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \cos i \left(1 - \frac{E''_o}{E_o}\right) - \frac{E'_o}{E_o} \cos r = 0 \\ \sqrt{\frac{\epsilon}{u}} \left(1 + \frac{E''_o}{E_o}\right) - \sqrt{\frac{\epsilon'}{u'}} \frac{E'_o}{E_o} = 0 \end{cases}$$

De acá se obtiene el resultado siguiente, tras usar algunas identidades trigonométricas:

$$\begin{cases} \frac{E'_o}{E_o} = 2\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu'\epsilon'}} \frac{\sin 2i}{\sin 2r + \frac{\mu}{\mu'} \sin 2i} \\ \frac{E''_o}{E_o} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} \sin 2i - \sin 2r}{\sin 2r + \frac{\mu}{\mu'} \sin 2i} \end{cases}$$

Si hacemos la aproximación  $\mu = \mu'$ , tendremos, usando la ley de Snell:

$$\begin{cases} \frac{E'_o}{E_o} = \frac{2\cos i \sin r}{\sin(i+r)\cos(i-r)} \\ \frac{E''_o}{E_o} = \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} \end{cases}$$

a) Se ve que no habrá reflexión ( $E^r_o/E_o = 0$ ) cuando

$$\operatorname{tg}(i + r) = \infty$$

o sea:

$$i + r = \frac{\pi}{2} ;$$

el ángulo de incidencia  $i$  para el cual esto ocurre, es el "ángulo de Brewster",  $i_B$  ;

$$i_B = \frac{\pi}{2} - r ;$$

pero

$$\operatorname{sen} r = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right) = \operatorname{cos} i_B$$

luego

$$\frac{\operatorname{sen} i_B}{\operatorname{sen} r} = \frac{\operatorname{sen} i_B}{\operatorname{cos} i_B} = \operatorname{tg} i_B = \frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon}} \quad (r' = r)$$

entonces

$$i_B = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon}} .$$

De no haber supuesto que  $\mu = \mu'$ , el cálculo es un poco más complicado y el resultado es ligeramente distinto.

b) Se nos pide calcular  $i \equiv i_o$  para el cual

$$r = \frac{\pi}{2} ;$$

la ley de Snell nos dice entonces:

$$\frac{\operatorname{sen} i_o}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon}}$$

$$i_o = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon}}$$

(en este caso es fundamental suponer  $n' < n$  para que el ángulo  $i_o$  sea real).

El promedio temporal del flujo de energía a través de la superficie de separación es:

$$\langle \vec{s} \cdot \hat{n} \rangle$$

donde  $\vec{S}$  es el vector de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H};$$

luego:

$$\langle \vec{S} \cdot \hat{n} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \hat{n} \cdot (\vec{E}' \times \vec{H}'^*) \right\};$$

pero:

$$\vec{H}' = \frac{\vec{k}' \times \vec{E}'}{\mu' \mu_0 \omega},$$

luego:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \cdot \hat{n} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \hat{n} \cdot \left( \vec{E}' \times \frac{\vec{k}' \times \vec{E}'^*}{\mu_0 \mu' \omega} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \mu' \omega} \operatorname{Re} \left\{ \hat{n} \cdot \left[ (\vec{E}' \cdot \vec{E}'^*) \vec{k}' - (\vec{E}' \cdot \vec{k}') \vec{E}'^* \right] \right\} \end{aligned}$$

pero:

$$\vec{E}' \cdot \vec{k}' = 0$$

$$\vec{E}' \cdot \vec{E}'^* = |\vec{E}|^2 = \text{real};$$

luego:

$$\langle \vec{S} \cdot \hat{n} \rangle = \frac{|\vec{E}'|^2}{2\mu_0 \mu' \omega} \operatorname{Re}(\hat{n} \cdot \vec{k}')$$

pero si  $i = i_0$ , entonces  $r = \pi/2$ ; luego  $\hat{n} \cdot \vec{k}' = 0$ , y entonces

$$\langle \vec{S} \cdot \hat{n} \rangle_{i=i_0} = 0$$

lo que prueba que toda la energía permanece en el medio por el cual incide la onda. Este resultado es también válido para  $i > i_0$ , pues en este caso,

$$\hat{n} \cdot \vec{k}' = |\vec{k}'| \cos r,$$

pero  $\cos r$  es un número imaginario puro.



PROBLEMA 52.-

Calcule el coeficiente de transmisión  $T$  para el caso de una onda electromagnética plana que atraviesa tres medios dieléctricos en la forma indicada en la figura

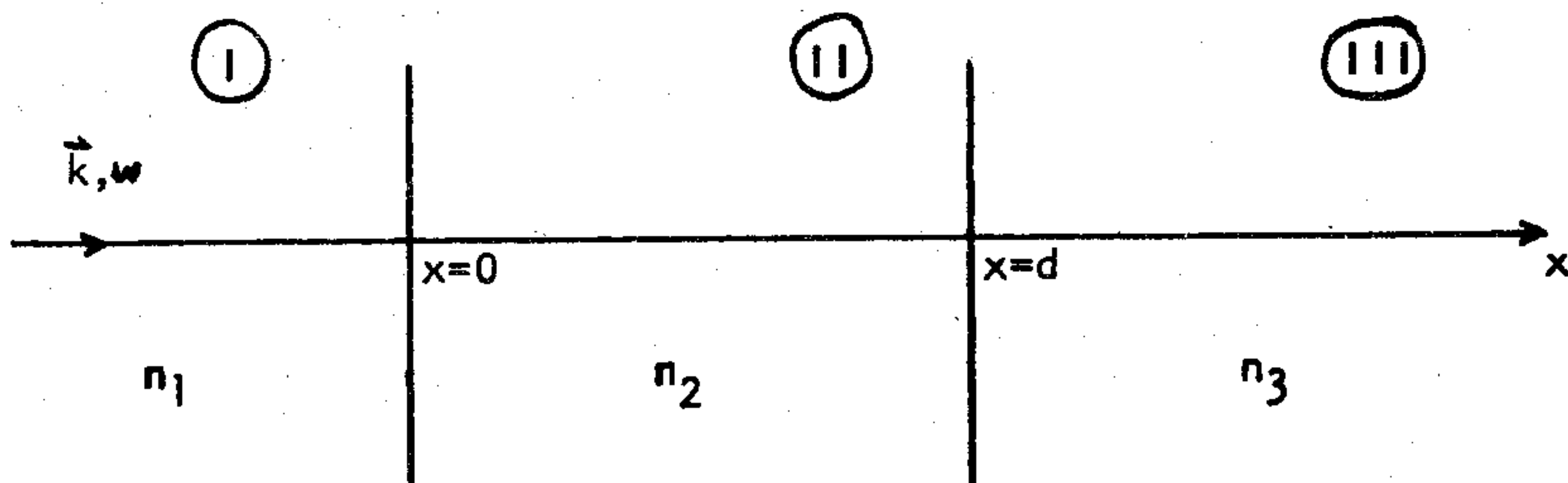


Fig. 178

Suponga  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

Resolución.-

Hagamos el cálculo en función de los campos eléctricos; si llamamos  $E_1^i$  al campo eléctrico de la onda incidente por el medio I, y  $E_3$  el campo eléctrico de la onda transmitida al medio III, entonces el coeficiente de transmisión será

$$T = \left| \frac{E_3}{E_1^i} \right|^2 \cdot \frac{Z_1}{Z_3},$$

donde  $Z_1$  y  $Z_3$  son las impedancias intrínsecas de los medios I y III, respectivamente.

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_0}{\epsilon_1 \epsilon_0}},$$

$$Z_3 = \sqrt{\frac{\mu_3 \mu_0}{\epsilon_3 \epsilon_0}}.$$

El problema no puede hacerse calculando directamente  $E_2$  en función de  $E_1$  y  $E_3$  en función de  $E_2$ , pues la onda se refleja infinitas veces en las dos superficies de separación.

La forma de proceder es la siguiente: sean  $E_1^i, E_1^r, E_2^i, E_2^r$  y  $E_3$  las amplitudes eléctricas totales de las ondas en los diferentes medios y direcciones, como se indica en la figura siguiente:

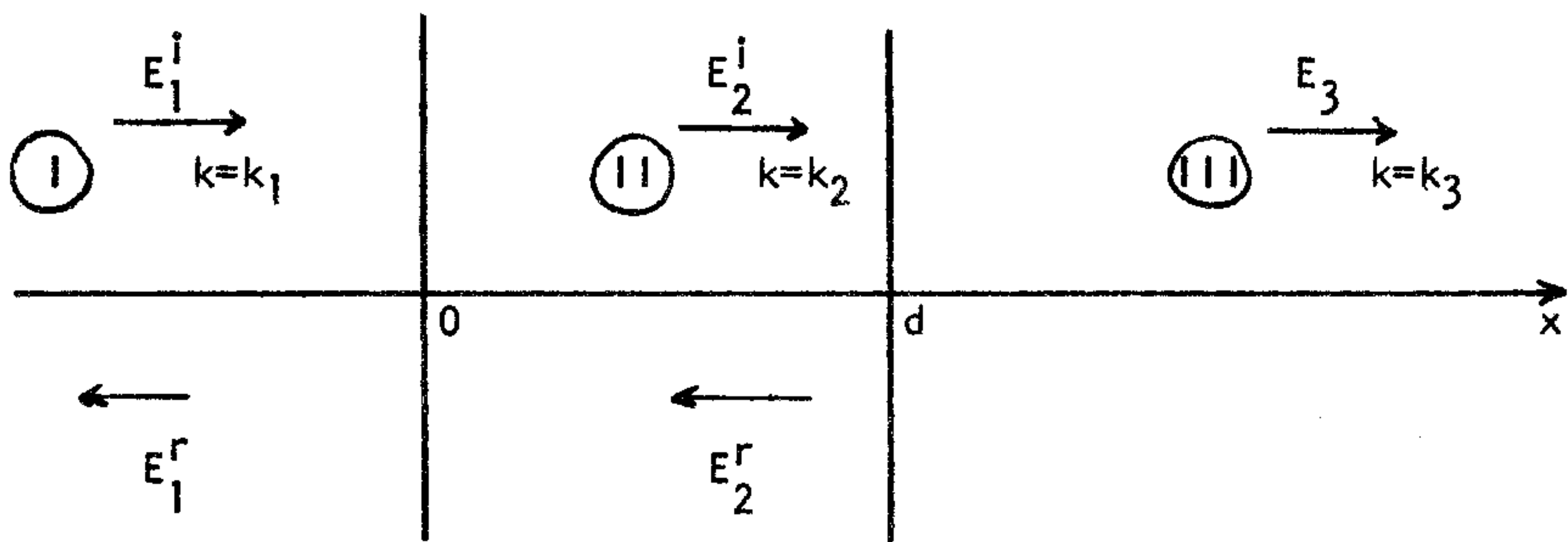


Fig. 179

Los campos se propagan en forma proporcional a

$$e^{i(\omega t \pm k_j x)} \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

donde el signo positivo (negativo) indica que la velocidad es positiva (negativa) según el eje  $Ox$ ;  $k_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , es el número de ondas en la región  $j$ . Al reflejarse, los campos eléctricos se invierten y los campos magnéticos no.

Las ecuaciones de separación de conservación de las componentes tangenciales a las superficies de separación de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son, entonces:

$$E_1^i - E_1^r = E_2^i - E_2^r$$

$$E_2^i e^{ik_2 d} - E_2^r e^{-ik_2 d} = E_3 e^{ik_3 d}$$

$$H_2^i e^{ik_2 d} + H_2^r e^{-ik_2 d} = H_3 e^{ik_3 d}$$

$$H_1^i + H_1^r = H_2^i + H_2^r$$

y como

$$H = \frac{nE}{\mu\mu_0 c} \quad ,$$

resulta el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (tomando  $E_1^i$  como dato conocido):

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1^r + E_2^i - E_2^r = E_1^i \\ E_2^i e^{ik_2 d} - E_2^r e^{-ik_2 d} - E_3 e^{ik_3 d} = 0 \\ \frac{n_1}{\mu_1} E_1^r - \frac{n_2}{\mu_2} E_2^i - \frac{n_2}{\mu_2} E_2^r = \frac{n_1}{\mu_1} E_1^i \\ \frac{n_2}{\mu_2} E_2^i e^{ik_2 d} + \frac{n_2}{\mu_2} E_2^r e^{-ik_2 d} - \frac{n_3}{\mu_3} E_3 e^{ik_3 d} = 0 \end{array} \right.$$

El sistema es lineal, de modo que puede resolverse metódicamente; los cálculos son algo tediosos, y el resultado para  $E_3$  es:

$$E_3 = \frac{4 \frac{n_1 n_2}{\mu_1 \mu_2} E_1^i}{2e^{ik_3 d} \left[ \frac{n_2}{\mu_2} \left( \frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_3}{\mu_3} \right) \cos k_2 d - i \left( \frac{n_1 n_3}{\mu_1 \mu_3} + \left( \frac{n_2}{\mu_2} \right)^2 \right) \sin k_2 d \right]}$$

El coeficiente de transmisión es

$$T = \left| \frac{E_3}{E_1^i} \right|^2 \cdot \frac{Z_1}{Z_3} = \left| \frac{E_3}{E_1^i} \right|^2 \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_3}{\mu_3 \epsilon_1}},$$

y haciendo  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ , se tiene:

$$T = \frac{4n_1 n_2^2 n_3}{n_2^2 (n_1 + n_3)^2 \cos^2 k_2 d + (n_1 n_3 + n_2^2)^2 \sin^2 k_2 d};$$

el número de onda  $k_2$  es simplemente

$$k_2 = \frac{\omega}{c} n_2 = \frac{n_2}{n_1} k_1$$

y el índice de refracción de cada medio es igual a la raíz cuadrada de la constante dieléctrica del mismo:

$$n_j = \sqrt{\epsilon_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

### PROBLEMA 53.-

Considere una onda electromagnética de frecuencia  $\omega$  que se propaga por el vacío, e incide normalmente sobre la superficie de un conductor. Estudie la onda transmitida y reflejada; calcule explícitamente los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  transmitidos y reflejados en  $(\vec{r}, \vec{x})$ , tomando como datos los campos incidentes. Discuta según el valor de la conductividad  $\sigma$ .

### Resolución.-

El problema es muy similar al de la incidencia de una onda electromagnética sobre un dieléctrico; la diferencia está en que el vector de onda  $k'$  de la onda transmitida será complejo. Las ecuaciones de conservación de  $D_n, B_n, E_t$  y  $H_t$  son formalmente idénticas a aquellas del caso de incidencia sobre un dieléctrico.

Consideremos una onda plana que incide desde el vacío sobre una interfase, sin especificar si se trata de dieléctrico o conductor, como se indica en la figura siguiente:

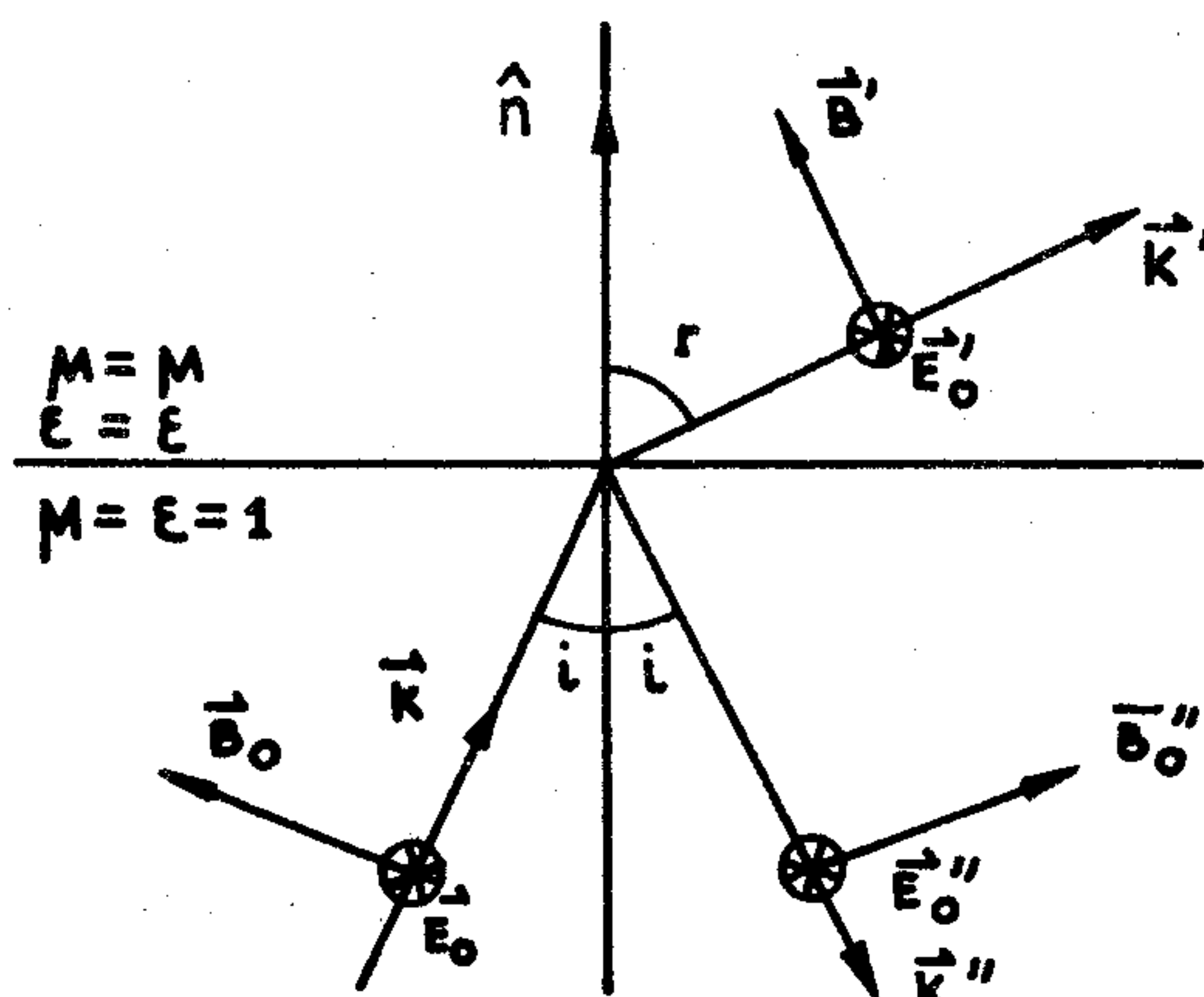


Fig. 180

Supongamos que los campos eléctricos son:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)} ;$$

puesto que la onda es plana, ocupa todo el espacio, y si la superficie de separación de los dos medios es infinita, debe exigirse que los campos  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}'$  y  $\vec{E}''$  oscilen en fase para cualquier tiempo y en cualquier punto del plano de separación; esto se traduce en:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r} = \vec{k}'' \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} = \text{punto arbitrario de la interfase.}$$

Esto nos dice, en primer lugar, que  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$  y  $\vec{k}''$  son coplanares; en efecto, restando adecuadamente, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} &= 0 \\ (\vec{k} - \vec{k}'') \cdot \vec{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall \vec{r} \in \text{interfase}$$

y por lo tanto, dada la arbitrariedad de  $\vec{r}$ , se cumple

$$\vec{k} - \vec{k}' = \lambda_1 \hat{n}$$

$$\vec{k} - \vec{k}'' = \lambda_2 \hat{n}$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son escalares arbitrarios, y  $\hat{n}$  es un vector unitario normal al plano de interfase. Multiplicando vectorialmente, se tiene

$$(\vec{k} - \vec{k}') \times (\vec{k} - \vec{k}') = \vec{0}$$

$$-\vec{k} \times \vec{k}' - \vec{k}' \times \vec{k} + \vec{k}' \times \vec{k}' = \vec{0},$$

y multiplicando escalarmente por  $\vec{k}$ , se tiene

$$\vec{k}' \times \vec{k}'' \cdot \vec{k} = 0$$

$$[\vec{k} \ \vec{k}' \ \vec{k}''] = 0,$$

que es condición necesaria y suficiente para la coplanaridad de los tres vectores.

Por otra parte, escogiendo un vector  $\vec{r}$  que pertenezca al plano formado por  $\vec{k}, \vec{k}'$  y  $\vec{k}''$ , se tiene:

$$k \sin i = k' \sin r = k'' \sin i' ;$$

pero  $k = k''$ , de modo que  $\sin i = \sin i'$ , y por lo tanto  $i = i'$ ; esta es la ley de reflexión de ondas electromagnéticas. Además, se obtiene la ley de refracción de Snell:

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{k}{k'}$$

Por otra parte, las ecuaciones de Maxwell implican que para una onda electromagnética,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} ;$$

además implican la conservación de las componentes normales de los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$ , y de las componentes tangenciales de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  (ver problema # 51); en nuestro caso, estas ecuaciones de conservación son, respectivamente:

$$[\vec{E}_0 + \vec{E}''_0 - \epsilon \vec{E}'_0] \cdot \hat{n} = 0 \quad \dots (1)$$

$$[\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0 - \vec{k}' \times \vec{E}'_0] \cdot \hat{n} = 0 \quad \dots (2)$$

$$[\vec{E}_0 + \vec{E}''_0 - \vec{E}'_0] \times \hat{n} = \vec{0} \quad \dots (3)$$

$$[\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}''_0 - \frac{1}{\mu} \vec{k}' \times \vec{E}'_0] \times \hat{n} = \vec{0} \quad \dots (4)$$

La ecuación (1) es trivial, pues, por hipótesis, (ver Fig. 180) todos los campos eléctricos son perpendiculares a  $\hat{n}$ ; la ecuación (2) junto con la ley de Snell nos reproduce la ecuación (3); las ecuaciones (3) y (4) se escriben en forma escalar como:



$$E_o + E''_o - E'_o = 0 \quad \dots (3)$$

$$k(E_o - E''_o) \cos i - \frac{k'}{\mu} E'_o \cos r = 0 \quad \dots (4),$$

y, dividiendo por  $E_o$ , tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; la solución es inmediata, y es:

$$\begin{cases} \frac{E'_o}{E_o} = \frac{2}{1 + \frac{k'}{\mu k} \frac{\cos r}{\cos i}} \\ \frac{E''_o}{E_o} = \frac{1 - \frac{k'}{\mu k} \frac{\cos r}{\cos i}}{1 + \frac{k'}{\mu k} \frac{\cos r}{\cos i}} \end{cases}$$

Nos interesa la incidencia normal, es decir,  $i = 0$ ; la ley de Snell nos dice que en este caso debe ser también  $r = 0$ , con lo cual nos queda:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E'_o}{E_o} &= \frac{2\mu k}{k' + \mu k} \\ \frac{E''_o}{E_o} &= \frac{k' - \mu k}{k' + \mu k} \end{aligned} \right\} i = r = 0$$

La figura correspondiente a este caso es:

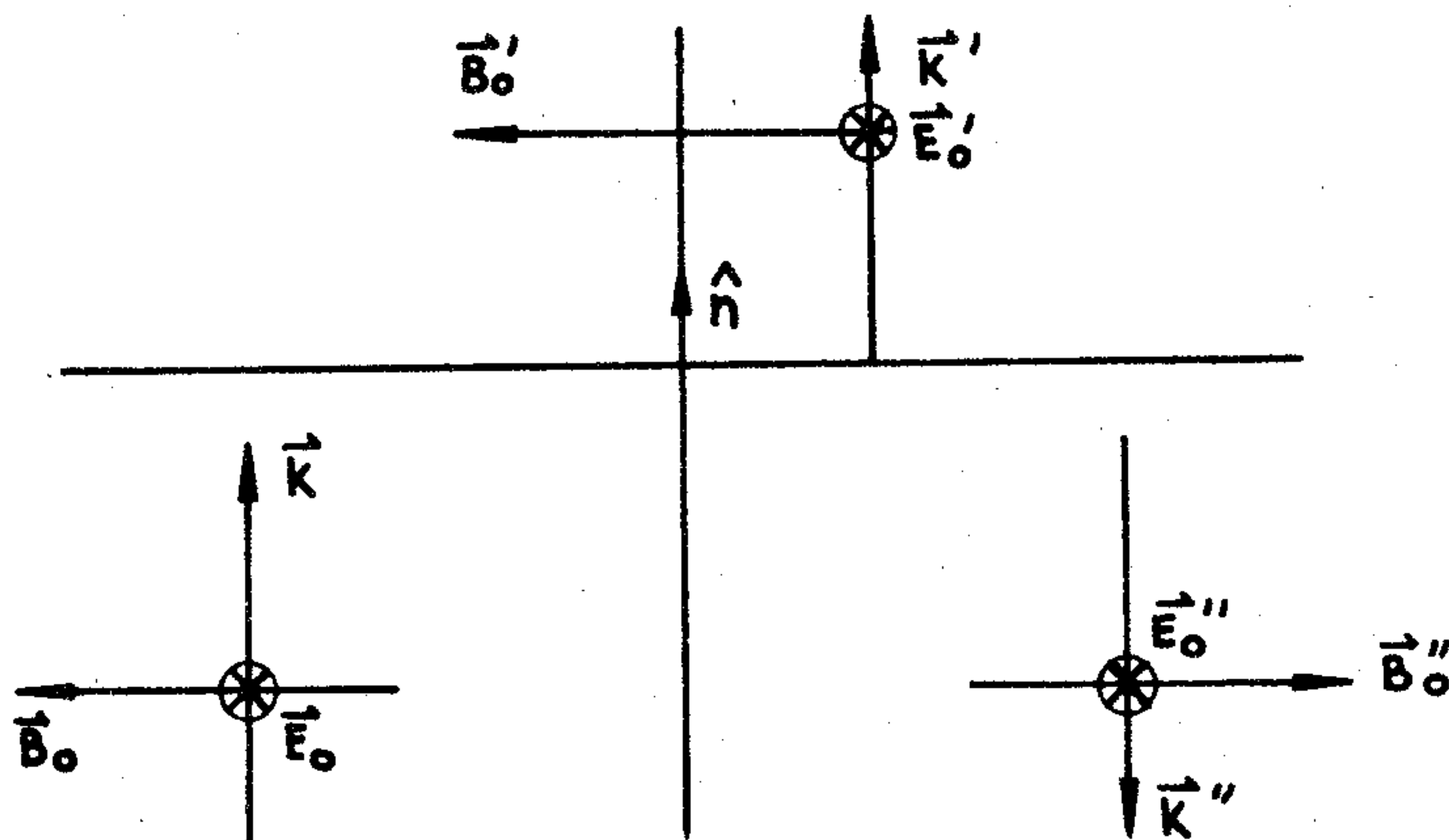


Fig. 181

Supongamos que la onda incidente sea



$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia y  $\vec{k}$  el vector de onda:

$$\vec{k} = k\hat{n} = \frac{\omega}{c} \hat{n};$$

podemos suponer, como origen de fases, que  $\vec{E}_0$  es un vector real; puesto que  $k$  también es real,  $\vec{B}$  estará en fase con el campo  $\vec{E}$ .

Estudiemos la onda transmitida; las ecuaciones de Maxwell para un medio conductor son:

$$\nabla \cdot \vec{H}' = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E}' = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}' = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H}' = \sigma \vec{E}' + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t},$$

de donde:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}') = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}')$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}') - \nabla^2 \vec{E}' = -\mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} - \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2};$$

utilizando  $\nabla \cdot \vec{E}' = 0$  y ordenando, se llega a

$$\nabla^2 \vec{E}' - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} - \mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} = \vec{0};$$

$$\left( \frac{1}{v^2} = \mu\mu_0 \epsilon\epsilon_0 \right);$$

por un procedimiento análogo, se llega a una ecuación semejante para  $\vec{H}$ .

Si suponemos soluciones del tipo

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{k}' = k'\hat{n}$$

entonces

$$\nabla^2 \vec{E}' = -k'^2 \vec{E}'$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}'$$

$$\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} = -i\omega \vec{E}'$$

luego

$$(-k'^2 + \frac{\omega^2}{v^2} + i\mu\mu_0 \sigma \omega) \vec{E}' = \vec{0}.$$

Esto nos dice que  $k'$  es complejo; si suponemos

$$k' = \alpha + i\beta \quad \alpha, \beta \text{ reales}$$

entonces:

$$k'^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = \frac{\omega^2}{v^2} + i\mu\mu_0 \sigma \omega$$

lo que nos conduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \\ 2\alpha\beta = \mu\mu_0 \sigma \omega \end{cases}$$

que se resuelve para darnos:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{\omega}{v\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu\mu_0 \sigma v^2}{\omega}\right)^2}^{\pm 1}$$

donde el signo positivo (negativo) se refiere a  $\alpha$  ( $\beta$ ).

El campo eléctrico será entonces:

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i[(\alpha + i\beta)\hat{n} \cdot \vec{r} - \omega t]}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{-\beta\hat{n} \cdot \vec{r}} e^{i(\alpha\hat{n} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

y el campo magnético será

$$\vec{B}' = \frac{\vec{k}' \times \vec{E}'}{\omega} = \left(\frac{\alpha + i\beta}{\omega}\right) \hat{n} \times \vec{E}';$$

el vector  $\vec{E}'_0$  se expresa en función de  $\vec{E}_0$  a través de:

$$\vec{E}'_o = \frac{2\mu k}{k' + \mu k} \vec{E}_o$$

$$\vec{E}'_o = \frac{2\mu k}{\alpha + i\beta + \mu k} \vec{E}_o .$$

Todo esto trae una serie de consecuencias; en primer lugar, los campos eléctricos y magnéticos  $\vec{E}'$  y  $\vec{B}'$  decaen en amplitud exponencialmente más allá de la interfase, en forma proporcional a

$$e^{-\beta \hat{n} \cdot \vec{r}} \equiv e^{-\beta z} ,$$

donde  $z$  es la coordenada que mide la profundidad del conductor, a partir de la superficie de separación. Puede definirse un "factor de penetración"  $\delta$  (skin depth),

$$\delta = \frac{1}{\beta} ;$$

este factor de penetración  $\delta$  tiene dimensiones de longitud y es la profundidad a la cual la amplitud de los campos se reduce a  $e^{-1} \approx 36,9\%$  de su valor en la superficie de separación.

Cuando la conductividad  $\sigma$  es muy grande, entonces

$$\frac{\mu\mu_o \sigma \omega^2}{\omega} \gg 1 ,$$

con lo cual

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\mu\mu_o \sigma \omega}{2}}$$

$$k' \approx \sqrt{\frac{\mu\mu_o \sigma \omega}{2}} (1 + i) ,$$

$$k' \approx \frac{1 + i}{\delta} .$$

Hay que recordar que el hecho de que haya una conductividad distinta de cero en el conductor implica la existencia de una corriente y por lo tanto hay una pérdida de energía por efecto Joule; esta pérdida de energía es la que da origen al decaimiento exponencial de los campos.

En segundo lugar, el campo magnético no está en fase con el campo eléctrico dentro del conductor; en efecto, puesto que

$$\vec{B}' = \left( \frac{\alpha + i\beta}{\omega} \right) \hat{n} \times \vec{E}' ,$$

se cumple:

$$B'_o = \frac{\alpha + i\beta}{\omega} E'_o$$

$$H'_0 = \frac{\alpha + i\beta}{\mu\mu_0 \omega} E'_0$$

$$H'_0 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{i\phi}}{\mu\mu_0 \omega} E'_0$$

$$H'_0 = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \left[ 1 + \left( \frac{\mu\mu_0 \sigma v^2}{\omega} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\phi} E'_0,$$

donde

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\beta}{\alpha};$$

la expresión de  $\operatorname{tg}\phi$  se simplifica si se calcula  $\operatorname{tg}2\phi$ :

$$\operatorname{tg}2\phi = \frac{2\operatorname{tg}\phi}{1 - \operatorname{tg}^2\phi} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{\mu\mu_0 \sigma v^2}{\omega}$$

luego:

$$\phi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\mu\mu_0 \sigma v^2}{\omega} \right).$$

El campo eléctrico está, entonces, adelantado en  $\phi$  con respecto al campo magnético. Esto se expresa también diciendo que la impedancia intrínseca del medio conductor es compleja; en efecto, la impedancia intrínseca  $Z$  del medio se define como

$$Z = \frac{E_0}{H_0};$$

luego

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} \left[ 1 + \left( \frac{\mu\mu_0 \sigma v^2}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/4} e^{-i\phi}$$

Si el conductor es excelente,  $\sigma \rightarrow \infty$  y

$$\phi \rightarrow \frac{\pi}{4},$$

$$Z \rightarrow \frac{1-i}{\sigma\delta};$$

en valor absoluto,

$$|Z| \xrightarrow[\sigma \rightarrow \infty]{} 0,$$

y por lo tanto, el campo magnético es mucho más importante que el eléctrico; la energía proviene entonces principalmente del primero.

Otra consecuencia importante del hecho que el vector de onda sea complejo, es que el campo eléctrico transmitido  $\vec{E}'_0$  tampoco está en fase con el incidente,  $\vec{E}_0$ ; en efecto,

$$\vec{E}'_0 = \frac{2\mu k}{\alpha + i\beta + \mu k} \vec{E}_0$$

$$E'_0 = \frac{2\mu k}{\sqrt{(\alpha + \mu k)^2 + \beta^2}} e^{i\theta} E_0,$$

donde

$$\theta = \arctg\left(\frac{-\beta}{\alpha + \mu k}\right).$$

Si suponemos que el conductor es excelente ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) y que no es ferromagnético ( $\mu \approx 1$ ), entonces:

$$\operatorname{tg}\theta \rightarrow \frac{-1/\delta}{1/\delta + k} = \frac{-1}{1 + k\delta}$$

$$k\delta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0,$$

$$\operatorname{tg}\theta \rightarrow -1,$$

$$\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}.$$

( $E'_0$  adelante en  $\pi/4$  con respecto a  $E_0$ ).

Estudiemos ahora la onda reflejada; ésta es:

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

$$\vec{B}'' = \frac{\vec{k}'' \times \vec{E}''}{\omega},$$

donde  $\vec{k}'' = -\vec{k} = -k\hat{n} = -\frac{\omega}{c}\hat{n}$ , y donde

$$\vec{E}''_0 = \frac{\alpha + i\beta - \mu k}{\alpha + i\beta + \mu k} \vec{E}_0.$$

Se ve que también los campos reflejados están desfasados con respecto a los incidentes; en efecto,

$$E''_0 = \sqrt{\frac{(\alpha - \mu k)^2 + \beta^2}{(\alpha + \mu k)^2 + \beta^2}} e^{i\psi} E_0,$$

donde

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\mu k \beta}{\alpha^2 + \beta^2 - \mu^2 k^2}$$

Si suponemos  $\sigma \rightarrow \infty$  y  $\mu \approx 1$ , entonces

$$\operatorname{tg} \psi \rightarrow 0$$

$$\psi \rightarrow 0,$$

y los campos estarán en fase.

#### PROBLEMA 54.-

Se tienen dos planos conductores perfectos y paralelos, separados por una distancia  $d$ . El medio entre los conductores es dieléctrico de constante dieléctrica  $\epsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$ . (Este sistema constituye una guía de ondas).

Estudie la propagación de una onda electromagnética plana entre los conductores.

#### Resolución.-

Supongamos que los planos sean  $z = 0$  y  $z = d$  de un sistema cartesiano de coordenadas, y supongamos que la onda se propaga en la dirección positiva del eje  $0x$ .

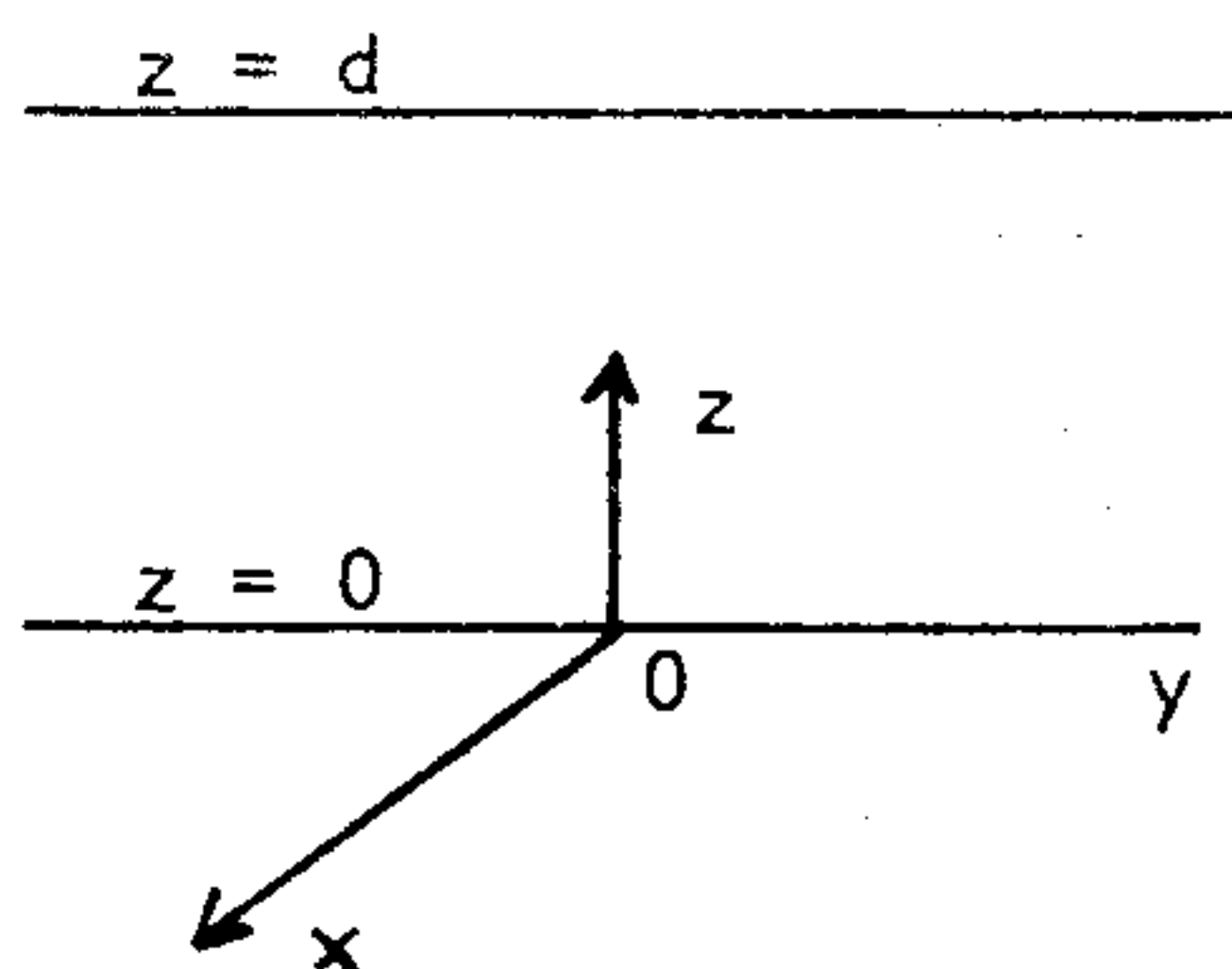


Fig. 182

Dado que los planos están hechos de un conductor perfecto, el campo eléctrico no puede tener componentes tangenciales a los planos en  $z=0$  y  $z=d$ .

Es decir,

$$E_x = E_y = 0 \quad \text{en } z = 0, d.$$

Supongamos  $E_x = H_x = 0$  (frente de onda transversal, o sea, perpendicular al eje de propagación  $0x$ ).



Si esta onda está polarizada con  $\vec{E}$  perpendicular a los planos ( $E_y = 0$ ), las condiciones de borde se satisfacen automáticamente, y una onda con esta polarización es posible; las soluciones  $E(\vec{x}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  son de la misma forma que para un medio infinito, y la velocidad de propagación es la misma. Por otra parte, una onda plana en la cual las componentes del campo  $\vec{E}$  no varían con  $z$  es obviamente imposible si el vector  $\vec{E}$  es paralelo a los planos, ya que  $E_y$  debe ser cero en  $z = 0$  y  $z = d$ , y será nulo en todas partes a menos que varíe con  $z$ . Examinemos si es posible tener una onda con  $E_y$  finito, pero  $E_x = E_z = 0$ , de tal forma que el campo eléctrico sea puramente transversal. Las componentes de  $\vec{H}$  pueden obtenerse de las ecuaciones de Maxwell. Supongamos que la onda se propaga como

$$e^{i(kx - \omega t)},$$

donde  $k$  puede ser real o complejo, y en general no será igual a  $\omega/v$ . Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik;$$

la ecuación

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

se escribe entonces

$$\left. \begin{aligned} i\omega\mu_0 H_x &= -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ i\omega\mu_0 H_y &= 0 \\ i\omega\mu_0 H_z &= ikE_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

La ecuación

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\vec{j} = \vec{0})$$

se escribe:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ -i\omega\epsilon_0 E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - ikH_z \\ 0 &= ikH_y - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

De (1) se obtiene que  $H_y = 0$ , pero  $H_x$  debe ser  $\neq 0$  porque si no,  $\frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$ , y esto no está permitido por las condiciones de borde; por lo tanto la onda no será puramente transversal, sino que tendrá  $H_x \neq 0$ . Intro-

duciendo (1) en (2), se llega a:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ -i\omega\epsilon\epsilon_0 E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - ikH_z \\ 0 &= -\frac{\partial H_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Luego se ve que  $H_z$  y  $H_x$  no varían con  $y$ , y como se sabe que

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_y}{\partial y}, \quad (E_x = E_z = 0)$$

entonces  $E_y$  tampoco varía con  $y$ .

Resumiendo, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega\mu\mu_0 H_x &= \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ -i\omega\mu\mu_0 H_z &= -ikE_y \\ -i\omega\mu\mu_0 E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - ikH_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y} &= H_y = E_z = E_x = 0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Eliminando  $H_x$  y  $H_z$ , se obtiene

$$-\omega^2\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - k^2 E_y$$

o bien:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}) E_y, \quad \dots (5)$$

donde

$$v = \left( \frac{1}{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0} \right)^{1/2}$$

es la velocidad de una onda en este dieléctrico pero en ausencia de los planos conductores. De aquí,

$$E_y = A \sin\left(\frac{\pi n z}{d}\right) + B \cos\left(\frac{\pi n z}{d}\right),$$

y para cumplir que  $E_y = 0$  en  $z = 0, d$ , debe ser  $B = 0$  y  $n$  un entero. Para satisfacer (5), es necesario que

$$\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 = -k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}, \quad n = \text{entero} \quad \dots (6).$$

Por lo tanto,  $k$  es real o imaginario puro; es claro que para  $\omega$  suficientemente pequeño,  $k$  será imaginario, y la onda será exponencialmente atenuada:

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{-|k|x} e^{-i\omega t},$$

pues  $k \approx i \frac{n\pi}{d} \approx i|k|$ . Para  $\omega$  suficientemente alto,  $k$  será real y se propagará libremente (se dice por esto que el sistema constituye un filtro de paso alto sin atenuación). La condición para la libre propagación es

$$\frac{\omega}{v} > \frac{n\pi}{d};$$

como  $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ , donde  $\lambda_0$  es la longitud de la onda en el medio, pero sin condiciones de borde, entonces la condición se escribe:

$$\lambda_0 < \frac{2d}{n};$$

si llamamos

$$\frac{2d}{n} \equiv \lambda_c,$$

entonces debe cumplirse  $\lambda_0 < \lambda_c$  para la propagación libre; por esto,  $\lambda_c$  se denomina frecuencia de corte (cut-off wavelength).

En el caso que la condición  $\lambda_0 < \lambda_c$  se cumpla, podemos escribir

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda_a},$$

donde  $\lambda_a$  es la longitud de onda aparente en la guía (o sea, es la distancia entre dos puntos sobre el eje 0x cuya fase difiere en  $2\pi$ ).

La ecuación (6) se escribe, con estas nuevas definiciones:

$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_a^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \quad \dots (7),$$

que recibe el nombre de ecuación de guía de ondas, y se encuentra que es válida para cualquier guía de onda; la longitud de corte,  $\lambda_c$  depende de la forma de la guía y del modo de propagación en ella ( $d$  y  $n$ , respectivamente).

La ecuación (7) implica que la longitud de onda en la guía  $\lambda_a$ , es siempre mayor que en el medio sin condiciones de borde ( $\lambda_0$ ); si  $\lambda_0 \ll \lambda_c$ , entonces  $\lambda_a \rightarrow \lambda_0$ ; si  $\lambda_0 \rightarrow \lambda_c$ , entonces  $\lambda_a \rightarrow \infty$ .

La velocidad de fase,  $v_f$ , en la guía, se comporta como  $\lambda_a$ , porque

$$v_f = \frac{\omega}{k} = v \lambda_a,$$

donde  $\nu$  es la frecuencia ( $\omega = 2\pi\nu$ ); por lo tanto la velocidad de fase es mayor que la velocidad en el medio libre; en particular, si se trata del espacio vacío, entonces  $\mu = \epsilon = 1$ , y la velocidad de fase será mayor que  $c$ , pues  $\lambda_a > \lambda_0$ , sin embargo esto no implica que la energía se transporte con velocidad mayor que la luz, ya que tenemos dispersión:  $v_f$  depende de la frecuencia y no es igual a la velocidad de grupo  $v_g$ :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

En efecto,

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{n\pi^2}{d^2}$$

$$\text{Luego } 2k \frac{dk}{d\omega} = 2 \frac{\omega}{c^2},$$

$$\text{Luego } \left(\frac{\omega}{c}\right) \left(\frac{d\omega}{dk}\right) = v_f \cdot v_g = c^2;$$

como  $v_f$  es siempre mayor que  $c$ , entonces la velocidad de grupo  $v_g$  es siempre menor que  $c$ . La relación  $v_f v_g = c^2$  se cumple para cualquier guía de ondas, pues es una consecuencia de la ecuación (7). En la figura 183 se ilustra el comportamiento de  $v_f$  y  $v_g$  en función de  $\lambda_0$ .

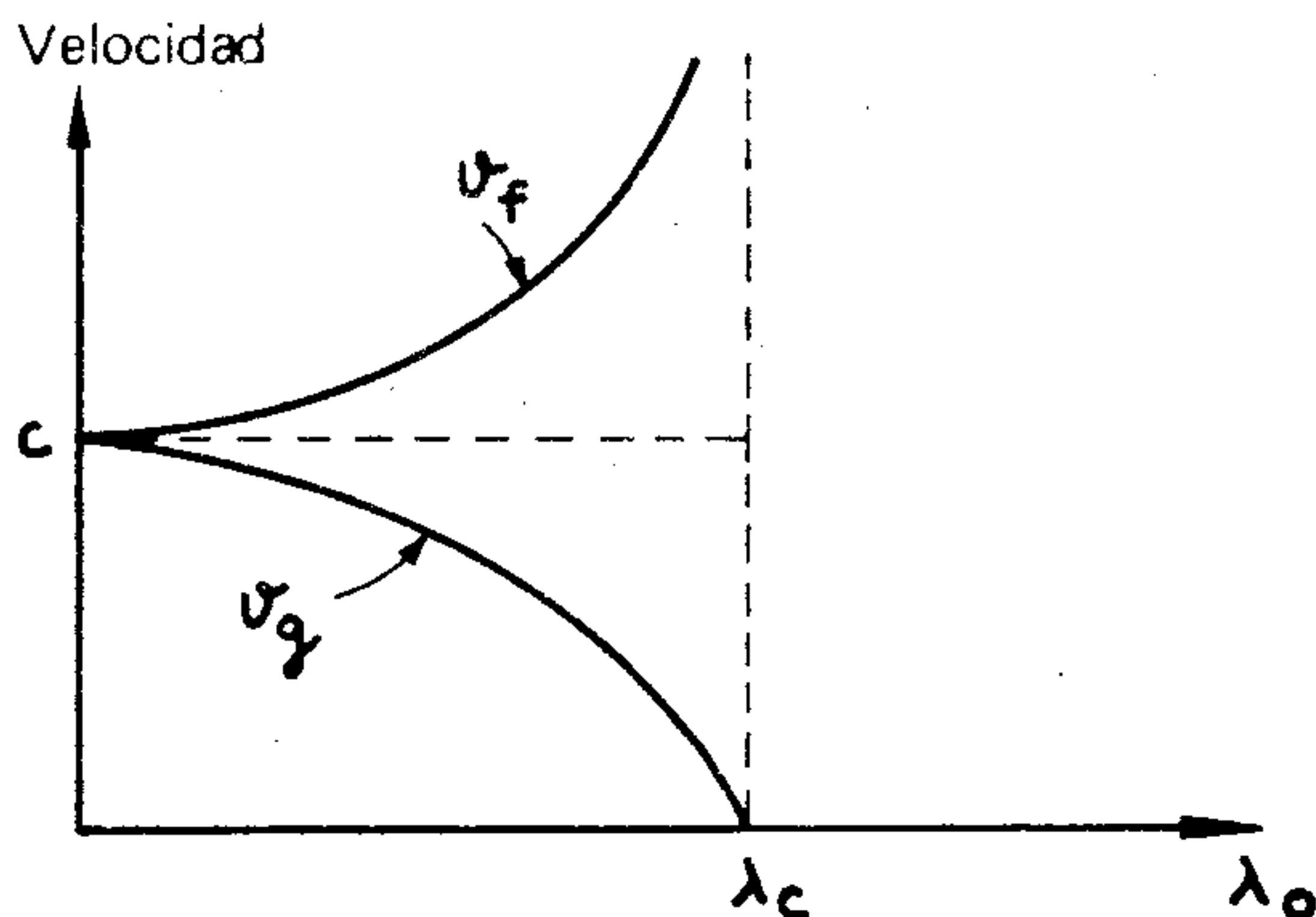


Fig. 183

Veamos con un poco más de detalle el significado físico de la velocidad de fase; consideremos dos frentes de onda dentro de la guía, cuya diferencia de fase sea  $2\pi$ ; sus trazas sobre el plano  $(0xz)$  se verán como en la figura 184.

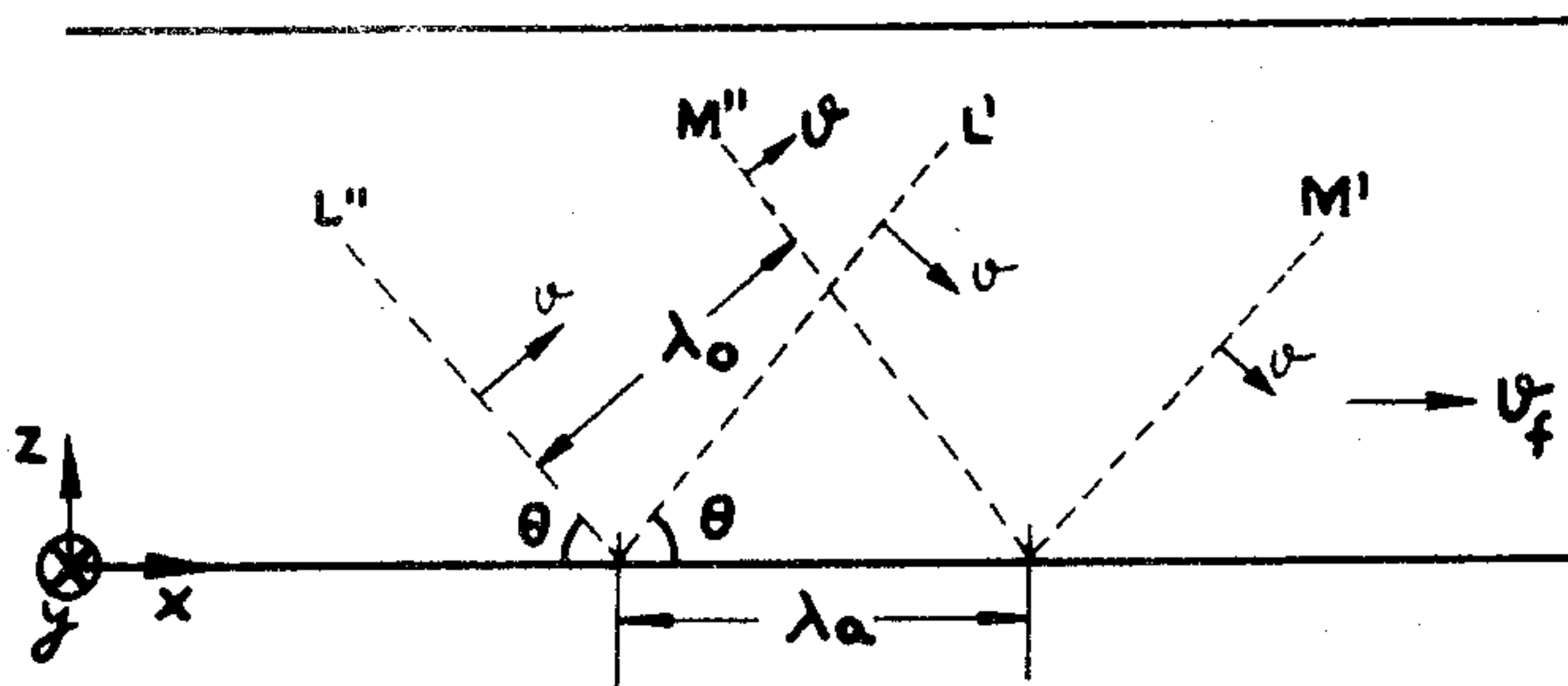


Fig. 184

La geometría del esquema nos dice que

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda_o}{\lambda_a}$$

y como se cumple

$$\frac{1}{\lambda_o^2} = \frac{1}{\lambda_a^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_a^2} + \left(\frac{n}{2d}\right)^2 ,$$

resulta finalmente

$$\cos\theta = \lambda_o \frac{n}{2d} , \quad n = \text{entero.}$$

Esto muestra que, dada la longitud de onda en el medio libre  $\lambda_o$ , sólo ciertos valores del ángulo  $\theta$  están permitidos.

La relación entre el ángulo  $\theta$  y las velocidades de fase y de grupo son directas; la velocidad de fase es la velocidad con que se mueven las intersecciones de los trazos de los frentes de onda con los planos  $z = 0$  y  $z=d$ ; esta velocidad es

$$v_f = \frac{v}{\cos\theta} > v$$

donde  $v$  es la velocidad de la onda libre. La velocidad de grupo  $v_g$  es la componente de la velocidad  $v$  en la dirección de propagación:

$$v_g = v \cos\theta < v ;$$

multiplicando, obtenemos la relación  $v_g v_f = v^2$ , que ya conocíamos.





El éxito de esta "Colección de Problemas" es evidente del hecho que su primera edición se agotó rápidamente, hace ya varios años, y que desde entonces se ha convertido en un texto que circula activamente en la universidad en cada comienzo de los períodos lectivos; esto habla con elocuencia de la excelencia del trabajo realizado por el autor.

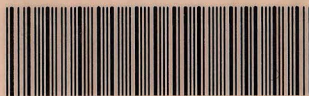
Los problemas resueltos en este libro fueron seleccionados de entre aquellos propuestos, ya sea como tareas, ejercicios, controles o exámenes, a los alumnos de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile en aquellos años (esto es, en los años inmediatamente anteriores a 1971, fecha en que se realizó este trabajo).

Los alumnos deberían usar este texto para **aprender a trabajar**, y no sólo como un medio para asegurar una nota aprobatoria en los controles (lo que desgraciadamente parece ser la regla general). Para ello, como dicho ya por el autor en el prefacio de la primera edición, deberían trabajar ellos mismos cada problema, sin recurrir al libro sino cuando realmente se encuentren sin saber cómo continuar, y no limitarse a mirar superficialmente los desarrollos hechos, con la esperanza de memorizar (¡en el mejor de los casos!) los pasos esenciales. Sólo de esa manera, con ese método, estarán aprovechando realmente, en cuanto a universitarios, el generoso esfuerzo realizado por Miguel A. Furman, en ese entonces (1971) destacado estudiante en nuestra Facultad, y hoy flamante Doctor de la Universidad de California y activo investigador en Física Teórica.

**Miguel Saavedra**

Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad de Chile

UNIVERSIDAD DE CHILE - ICT



35601000890735