**Resumen de electricidad.**
**Electromagnetismo FI2002 - Otoño 2019**

Autor: Manuel Torres[1]
*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile*

# Sistemas de coordenadas

**Definición 1.** ***Sistema de coordenadas cartesianas:***
*Posición:*
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$
*Velocidad:*
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{\imath} + \dot{y}(t)\hat{\jmath} + \dot{z}(t)\hat{k}$$
*Aceleración:*
$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{\imath} + \ddot{y}(t)\hat{\jmath} + \ddot{z}(t)\hat{k}$$

Sistemas de coordenadas ortogonales: Es posible describir un nuevo sistema de coordenadas donde sus vectores unitarios sean ortogonales entre sí, y además cada vector unitario es una combinación lineal de los vectores unitarios de un sistema de coordenadas cartesianas.

**Definición 2.** ***Cilíndricas: Vectores unitarios:***
$$\hat{\rho} = \hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\operatorname{sen}\phi$$
$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\operatorname{sen}\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

**Definición 3.** ***Esféricas: Vectores unitarios:***
$$\hat{r} = (\hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\theta + \hat{k}\cos\theta$$
$$\hat{\theta} = (\hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\operatorname{sen}\phi)\cos\theta - \hat{k}\operatorname{sen}\theta$$
$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\operatorname{sen}\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

¿Cómo escribir un nuevo sistema de coordenadas?: Comenzamos por escribir la posición en función de una suma de escalares por cada uno de los vectores unitarios, y para la velocidad y aceleración se deriva esta expreción respecto al tiempo teniendo cuidado de realizar bien la regla de la cadena.

**Resultados 1.** ***Sistema de coordenadas cilíndricas:***
*Posición:*
$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$
*Velocidad:*
$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$$
*Aceleración:*
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\delta}{\delta t}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

**Resultados 2.** ***Sistema de coordenadas esféricas:***
*Posición:*
$$\vec{r} = r\hat{r}$$
*Velocidad:*
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$
*Aceleración:*
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta\hat{r} + \frac{r^2\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta}{2\operatorname{sen}\theta}\hat{\phi}$$
$$+(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\hat{\theta}$$

# Elementos diferenciales de distintas geometrías

A continuación se presentan algunos elementos diferenciales, que serán útiles al momento de formar integrales (más adelante).

**Resultados 3.** ***Coordenadas cilíndricas: Elemento de superficie*** *Un elemento de superficie sobre el manto cilíndrico (o la superficie orientada por $\hat{r}$):*
$$\delta S = \rho\delta\phi\delta z$$
*Un elemento de superficie en un plano perpendicular a $\hat{k}$:*
$$\delta S = \rho\delta\rho\delta\phi$$
*Un elemento de superficie en un plano perpendicular a $\hat{\theta}$ está dado por:*
$$\delta S = \delta\rho\delta z$$

[1] Dudas y sugerencias al correo: manuel.torres@ug.uchile.cl

**Resultados 4.** ***Coordenadas cilíndricas: Elemento de volumen***
*Un elemento de volumen en un cilindro está dado por:*

$$\delta V = \rho\delta\rho\delta\phi\delta z$$

**Resultados 5.** ***Coordenadas esféricas: Elemento de superficie***
*Un elemento de superficie en un casquete esférico está dado por (o lo que es lo mismo, el plano perpendicular a $\hat{r}$):*

$$\delta S = r^2 \operatorname{sen}\theta\delta\theta\delta\phi$$

**Resultados 6.** ***Coordenadas esféricas: Elemento de volumen***
*Un elemento de volumen de una esfera está dado por:*

$$\delta V = r^2 \operatorname{sen}\theta\delta r\delta\phi\delta\theta$$

**Propuesto:** Determinar los elementos de superficie restantes de una esfera.

# Campo eléctrico en el vacío:

## Ley de Coulomb:

**Definición 4.** ***Ley de Coulomb (fza. eléctrica $\vec{F}$)***
*La ley de Coulomb, obtenida de forma experimental, para cuerpos discretos que se encuentran cargados corresponde a:*

$$\vec{F}_e = \frac{qQ}{4\pi\epsilon}\frac{\vec{r}-\vec{r}_o}{\|\vec{r}-\vec{r}_o\|^3}$$

**Definición 5.** ***Campo eléctrico $\vec{E}$***
*Ya que al manipular las fuerzas, se utiliza como parámetro las características del cuerpo que ejerce la fuerza, el análisis puede ser un tanto mas complicado, por lo que se realiza el arreglo para trabajar y analizar el campo asociado a la fuerza, dicho campo cumple y posee muchas propiedades del cálculo vectorial, las cuales serán expuestas mas adelante.*
EN UN MEDIO DISCRETO: *Cuando el emisor de la fuerza eléctrica es un medio discreto, el campo eléctrico asociado está dado por:*

$$\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{\vec{r}-\vec{r}_o}{\|\vec{r}-\vec{r}_o\|^3}$$

EN UN MEDIO CONTINUO: *La siguiente expresión sirve para calcular el campo eléctrico por definición, donde $\vec{r}_o$ corresponde a la parametrización del cuerpo que lo emite, y $\vec{r}$ la posición en el espacio donde se quiere conocer el campo eléctrico.*

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\vec{r}-\vec{r}_o}{\|\vec{r}-\vec{r}_o\|^3}\delta q(\vec{r_0})$$

NOTA 1: Notar que el diferencial de carga puede ser reemplazado por una densidad respectiva a las dimensiones necesarias para describir el espacio cargado (densidad lineal, densidad superficial, densidad volumétrica), por lo tanto queda el diferencial de espacio multiplicado por la densidad que depende de la parametrización.

NOTA 2: Es posible utilizar el principio de superposición, siempre y cuando el origen del sistema de referencias que describe la parametrización de la fuente sea el mismo.

**Definición 6.** ***Energía potencial:***
*El cálculo de energía potencial de un campo se realiza a partir de una integral de trabajo (linea).*

$$U(\vec{r}) = -\int \vec{F}\delta\vec{r}$$

**Definición 7.** ***Potencial eléctrico***
*Adaptando el concepto de trabajo para las nociones de campo, se obtiene la definición del potencial eléctrico.*
*Forma integral:*

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{E}\delta\vec{r}$$

*Forma diferencial:*

$$\bigtriangledown V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

**Observación 1.** ***Energía potencial y potencial eléctrico:***
*La relación entre la energía potencial (visto en mecánica) y el potencial eléctrico (voltaje) está dada por:*

$$U = -qV(\vec{r})$$

### Ley de Gauss

**Teorema: 1.** ***Ley de Gauss para $\vec{E}$***
*A partir de la Ley de Gauss se puede calcular el flujo del campo eléctrico que pasa a través de la superficie de la parametrización vecr$_o$ (ver campo eléctrico por definición).*
*Forma integral:*

$$\phi_S = \int\int\int div(\vec{E})\delta V = \int\int \vec{E}\delta\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon}$$

*Forma diferencial:*

$$div(\vec{E}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

**Teorema: 2.** ***Ecuación de Poisson***
*A partir de la forma diferencial de la Ley de Gauss y la definición de Potencial se obtiene la expresión:*

$$\bigtriangledown^2 V(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

En adelante... Se estudiarán propiedades eléctricas en medios materiales, en éste caso los materiales de interés son los medios dieléctricos, específicamente los medios polarizables, como lo son los conductores y los aislantes

---

## Campo eléctrico en medios materiales (dieléctricos)

¿Qué es un dieléctrico? Los dieléctricos son medios materiales polarizables, dentro de los cuales son importantes los aislantes y los conductores. Ahora la pregunta debe ser

¿Qué es polarizable? La polarizabilidad eléctrica es la tendencia relativa de una distribución de cargas, tal como la nube electrónica de un átomo o molécula, a ser distorsionada de su forma normal por un campo eléctrico externo, que puede ser causado por la presencia de un ion cercano o un dipolo.

### Vectores de polarización y desplazamiento eléctrico:

**Definición 8.** ***Densidad de dipolos $\vec{P}$***
*También conocido como vector de polarización.*

$$\vec{P} = \frac{\delta\vec{p}}{\delta\vec{v}}$$

**Definición 9.** ***Densidad de carga en medios dipolares:***
*A continuación se presentan las expresiones para la densidad dde carga de polarización:*
*a)*Densidad de superficie:

$$\sigma_P = \vec{P}(\vec{r})_n$$

*b)*Densidad volumétrica:

$$\rho_P = -div(\vec{P}(\vec{r}))$$

¿Hay más de un tipo de densidad de carga? Si, ya que hay cargas por polarización y cargas libres, con sus respectivas densidades de carga.

**Definición 10.** ***Carga de polarización:***

$$Q_p = \int \sigma_p(\vec{r})\delta S + \int \rho_p(\vec{r})\delta V$$

**Definición 11.** ***Carga libre:***
*La carga libre es la que contribuye en el flujo (ver Ley de Gauss para el campo eléctrico), así que:*

$$Q_l = \epsilon\int \vec{E}(\vec{r})\delta\vec{S}$$

**Observación 2.** ***Polarización en aislantes:***
*En un aislante (a diferencia de un conductor), se requiere mucha energía para mover cargas a través del material, por lo que las cargas del medio no se mueven, ergo, su carga de polarización es nula.*

$$Q_p = \int \sigma_p(\vec{r})\delta S + \int \rho_p(\vec{r})\delta V = 0$$

**Definición 12.** ***Desplazamiento eléctrico $\vec{D}$:***

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon\vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$$

**Teorema: 3.** ***Ley de Gauss para $\vec{D}$***
*A partir de la Ley de Gauss se puede calcular el flujo del desplazamiento eléctrico que pasa a través de la superficie de la parametrización $\vec{r}_o$*
*Forma integral:*

$$\int\int\int div(\vec{D})\delta V = \int\int \vec{V}\delta\vec{S} = Q_l$$

*Forma diferencial:*

$$div(\vec{D}) = \rho(\vec{r})$$

¿Qúe es Isotropía?: Cuando todas las direcciones son igualmente privilegiadas (en sólidos granulares), además se sabe que en sólidos cristalizacodos, se prioriza una dirección, por la geometría de cada cristal.

**Definición 13.** ***Dieléctricos lineales***
*Un medio dieléctrico es lineal si se cumple:*

$$\|\vec{P}\| = \alpha\|\vec{E}\|$$

**Definición 14.** ***Dieléctricos isótropos***
*Un medio dieléctrico es isótropo si para algún alpha se cumple:*

$$\vec{P} = \alpha\vec{E}$$

**Definición 15.** ***Dieléctricos homogéneos***
*Un medio dieléctrico es homogéneo si para el mismo k en todo el material se cumple:*

$$\vec{P} = k\vec{E}$$

**Observación 3.** ***Sobre dieléctricos:***
*Es posible notar que la condición más fuerte es que el dieléctrico sea homogéneo.*

## Condiciones de borde:

Las condiciones de borde, determinan la continuidad de los campos, estas obedecen condiciones y teoremas de continuidad del análisis vectorial (cálculo vectorial y EDP).

**Teorema: 4.** ***Condiciones de borde:***
*Las siguientes condiciones de borde se pueden utilizar para todo dieléctrico, aunque más adelante se puede ver que los conductores cumplen ciertas propiedades, por lo que se obtienen casos particulares para estas mismas condiciones de borde:*
*a)*Condiciones de borde tangenciales:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\epsilon_2 D_{1t} = \epsilon_1 D_{2t}$$

*b)*Condiciones de borde normales:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_l$$

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma_l$$

**Observación 4.** ***Sobre aislantes y conductores:***
*Notar que todo lo visto hasta aquí se cumple para dieléctricos (aislantes y conductores), pero a continuación se verán propiedades que se cumplen SÓLO para los conductores.*

# Campo eléctrico en medios materiales (conductores)

¿Qué hace distinto a un conductor de los demás dieléctricos?

## Propiedades:

**Propiedad: 1.** ***Campo eléctrico interno:***
*El campo eléctrico dentro de un conductor es nulo:*

$$\vec{E}_{int} = 0$$

**Observación 5.** ***Carga libre en un conductor:***
*Por la propiedad anterior, se tiene que la Ley de Gauss en su forma integral para el campo eléctrico:*

$$\int\int\int div(\vec{E})\delta V = \int\int \vec{E}\delta\vec{S} = \frac{Q_l}{\epsilon} = 0$$

$$\Rightarrow Q_l = 0$$

*Por otro lado, para la forma diferencial:*

$$div(\vec{E}) = -\frac{\rho_l(\vec{r})}{\epsilon} = 0$$

$$\Rightarrow \rho_l = 0$$

*En conclusión, no se almacenan cargas libres en el interior de un conductor. Lo que altera las condiciones de borde ya vistas para un dieléctrico:*

## Condiciones de borde:

**Teorema: 5.** ***Condiciones de borde:***
*Dado que el campo eléctrico es nulo en el interior de un conductor, se puede desprender de las condiciones de borde para dieléctricos lo siguiente:*

Nota: *Sea el medio 1 conductor, y el medio 2 algún medio dielétrico*

*a)*Condiciones de borde tangenciales:

$$0 = E_{1t} = E_{2t}$$

$$0 = \epsilon_2 D_{1t} = \epsilon_1 D_{2t}$$

*b)*Condiciones de borde normales:

$$E_{2n} = \frac{\sigma_l}{\epsilon}$$

$$D_{2n} = \sigma_l$$

## Propiedades:

**Propiedad: 2.** *Un conductor cargado (carga Q) hueco y cerrado, cumple que la carga se distribuye en su superficie externa.*

**Propiedad: 3.** *Para el mismo conductor, con una carga puntual q en el hueco, aparece una densidad de carga cuya integral es -q, y en su superficie externa la integral de su densidad será Q+q.*

**Propiedad: 4.** ***Blindaje electrostático***
*Si se tiene un conductor hueco y neutro y una carga puntual q fuera del conductor, se induce una densidad de carga en la superficie externa (cuya integral es cero) pero el campo en el hueco interior es idénticamente nulo.*

## Condensadores:

El condensador es un elemento interesante de estudiar, principalmente por sus aplicaciones en los circuitos electrónicos.

**Definición 16.** ***Capacitancia [C]***
*La capacitancia es un elemento pasivo de dos terminales que almacena cargas eléctricas entre un par de placas. Esa diferencia de potencial creada por la acumulación de las cargas tiene una relación directa con la energía almacenada por la capacitancia.*

*En resumen, un condensador (o capacitor) almacena energía en un campo eléctrico. Además, experimentalmente se encontró que la corriente instantánea en la capacitancia es directamente proporcional a la variación del voltaje en el tiempo, la constante de proporcionalidad de esta relación se conoce como la capacitancia C, y tiene unidades de Faradios (D)*

$$C = \frac{Q}{V_c}$$

**Teorema: 6.** ***Energía almacenada en un condensador:***

$$U = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2}$$

**Resultados 7.** ***Capacitancias frecuentes:***
*a) Entre dos placas de Área A y distancia d entre ellas:*

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

*b) Entre dos cilindros de altura h y radios a<b:*

$$C = \frac{2\pi\epsilon h}{ln(a/b)}$$

*c) Entre dos esferas concéntricas de radios a<b:*

$$C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a}$$

**Teorema: 7.** ***Capacitancia equivalente:***
*Para sumar capacitancia en serie se cumple que:*

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{C_i}$$

*Por otro lado, para sumar capacitancia en paralelo se cumple que:*

$$C_{eq} = \sum C_i$$