Pauta Auxiliar 22

P1. Un cilindro de radio R y masa M se encuentra apoyado en un par de rieles horizontales. En la superficie de contacto entre el cilindro y los rieles, el coeficiente de roce estático es μ. El cilindro tiene enrollado un cordel de masa despreciable, del cual se tira hacia abajo con una fuerza constante F_0, la cual hace que el cilindro ruede sin resbalar.

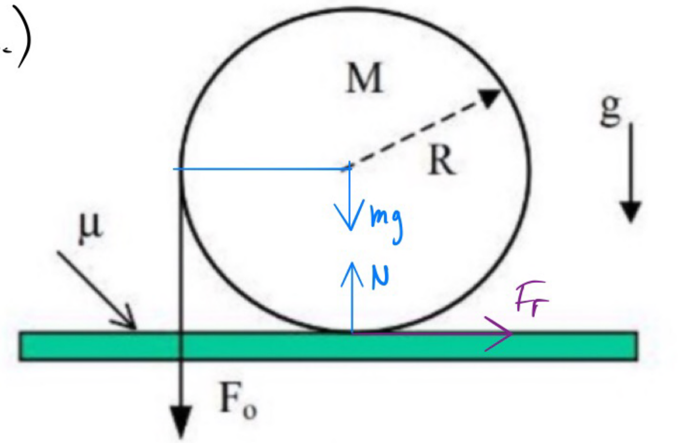
a. Haga un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas que se ejercen sobre el cilindro.

b. Determine las ecuaciones de movimiento para la rotación y traslación del cilindro.

c. Resuelva las ecuaciones anteriores. Determine en particular la aceleración del centro de masa y la fuerza de roce que actúa sobre el cilindro.

d. Determine la aceleración máxima del centro de masa.

a.)



b) $X_G = R\phi$

$V_G = R\dot{\phi} = R\omega$

$a_G = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$

$$\boxed{\alpha = \frac{a_G}{R}}$$

Relación escalar

$\vec{a}_G = -a_G\hat{\imath}$

$\vec{\alpha} = \alpha\hat{k} = \frac{a_G}{R}\hat{k}$

No conocemos la dirección a priori

$\vec{F} = M\vec{a} \Rightarrow \hat{\imath}]\ F_r = -Ma_G$

$\hat{\jmath}]\ N - Mg - F_0 = 0$

$N = Mg + F_0$

$$\vec{\tau}_G = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \cancel{N\hat{j} \times -R\hat{j}}^{\,0} + \cancel{0 \times Mg\hat{j}}^{\,0} + \underbrace{-R\hat{\imath} \times -F_0\hat{j}}_{F_0 R\hat{k}} + \underbrace{-R\hat{j} \times F_r\hat{\imath}}_{F_r R\hat{k}}$$

$$\Rightarrow \tau_G = R(F_0 + F_r)\hat{k}$$

Por otro lado $\quad \vec{l}_G = I^G\vec{\alpha} = \frac{1}{2}MR^2\alpha\hat{k} = \frac{1}{2}MR^2\frac{a_G}{\cancel{R}}\hat{k}$

$$\vec{\tau}_G = \dot{\vec{l}}_G \Rightarrow \cancel{R}(F_0 + F_r)\hat{k} = \frac{1}{2}M\cancel{R}a_G\hat{k}$$

$$\boxed{F_r = \frac{1}{2}Ma_G - F_0}$$

c.)

i) $F_r = -Ma_G \Rightarrow \frac{1}{2}Ma_G - F_0 = -Ma_G$

$$\frac{3}{2}Ma_G = F_0$$

$$a_G = \frac{2}{3}\frac{F_0}{M} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = \frac{-2F_0}{3M}\hat{\imath}}$$

Reemplazando a_G en F_r

$$F_r = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}\left(\frac{\cancel{2}F_0}{3\cancel{M}}\right) - F_0$$

$$= \frac{F_0}{3} - F_0$$

$$F_r = \frac{-2F_0}{3} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_r = -\frac{2F_0}{3}\hat{\imath}}$$

d.) Sabemos que el roce debe cumplir que

$$|F_r| \leq \mu |N| = \mu (Mg + F_0)$$

En el caso límite $|F_r| = \mu |N|$

$$\Rightarrow |F_r^{max}| = \mu (Mg + F_0)$$

Pero $F_r = -M a_6 \Rightarrow |F_r^{máx}| = M a_6^{máx}$

Reemplazando $M a_6^{máx} = \mu M g + \mu F_0$

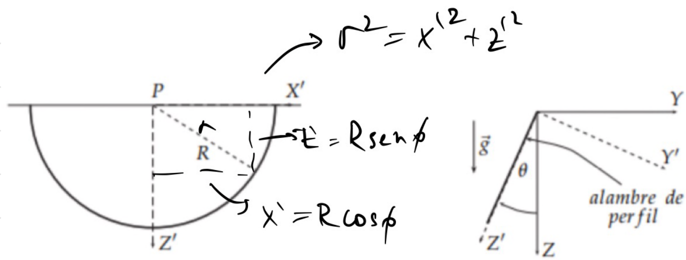
$$\boxed{a_6^{máx} = \mu g + \frac{\mu}{M} F_0}$$

P2. Se tiene un alambre ideal (unidimensional) con forma de semicircunferencia de radio R y densidad lineal uniforme $\lambda = M/L$, donde $L = \pi R$ es el largo del alambre y M es su masa. El alambre está limitado a moverse manteniendo fijos sus extremos (y todos los puntos de la línea (eje X) que los une).

a. Calcule la matriz de inercia $I_{ij} = \lambda \int_0^L (r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\, d\ell$ con respecto al centro de curvatura P. El $\cancel{ds}$ dl es el elemento de arco.

b. Determine el momento angular genérico de este sistema que rota en torno al eje $X = X'$.

c. Determine el torque debido al peso ($\vec{g} = g\hat{k}$, de acuerdo a la figura) y escriba la ecuación dinámica que rige el movimiento de este cuerpo que oscila rotando en torno al eje X. Obtenga la frecuencia angular de pequeñas oscilaciones.



a.) $$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \lambda \int_0^L (r^2 - x'^2)\, dl$$

$$r^2 = x'^2 + z'^2$$
$$r^2 - x'^2 = z'^2 = R^2 \mathrm{sen}^2\phi$$

Además $dl\Big|_0^L = R\,d\phi\Big|_0^\pi$

$$\Rightarrow I_{xx} = \lambda \int_0^\pi R^2 \mathrm{sen}^2\phi\, R\, d\phi = \frac{\lambda R^3}{2} \underbrace{\int_0^\pi \left(1 - \cos(2\phi)\right) d\phi}_{\pi} = \frac{M}{\cancel{\pi R}} \cdot \frac{R^{\cancel{3}\,2}\cancel{\pi}}{2}$$
$$= \frac{MR^2}{2}$$

$$I_{xy} = \lambda \int_0^L -x'y' \, dl = 0$$

$$y' = 0 \quad \forall dl$$

$$I_{yz} = \lambda \int_0^L -y'z' \, dl = 0$$

$$I_{xz} = \lambda \int_0^L -x'z' \, dl = -\lambda \int_0^\pi R\cos\phi \, R\operatorname{sen}\phi \, R \, d\phi$$

$$= -\lambda R^3 \underbrace{\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(2\phi)}{2} \, d\phi}_{0} = 0$$

6.)

$$I^G = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{l}_G = I^G \vec{\alpha} = -\frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \, \hat{x}$$

$$\vec{\tau}_G = \vec{r}_G \times -Mg\hat{z}$$

$$\vec{r}_G = 0\hat{x}' + 0\hat{y}' + \frac{\hat{z}'}{M}\int(\vec{r}\cdot\hat{z}')\,dm$$

$$= \frac{\hat{z}'}{M}\lambda\int_0^L z'\,dl$$

$$= \frac{\hat{z}'}{\cancel{R}\pi}\int_0^\pi \cancel{R}\,\text{sen}\,\phi\, R\,d\phi = \frac{R}{\pi}\hat{z}'\underbrace{\left(-\cos\phi\Big|_0^\pi\right)}_{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_G = \frac{2R}{\pi}\hat{z}'}$$

Luego $\vec{\tau}_G = \frac{2R}{\pi}\hat{z}' \times -Mg\hat{z}$

$$\hat{z}' = \hat{z}\cos\theta - \hat{y}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_G = \frac{2MRg}{\pi}\left(\hat{z}\cos\theta - \hat{y}\,\text{sen}\,\theta\right)\times -\hat{z}$$

$$\vec{\tau}_G = \frac{2MRg}{\pi}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{x}$$

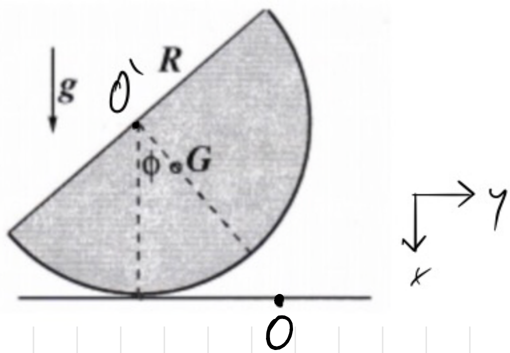
$$\vec{\tau}_G = \dot{\vec{l}}_G \Rightarrow \frac{2\cancel{M}Rg}{\pi}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{x} = -\frac{\cancel{M}R^2}{2}\ddot{\theta}\,\hat{x}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4g}{\pi R}\,\text{sen}\,\theta = 0 \xrightarrow[\text{oscil.}]{\text{Peq.}} \boxed{\ddot{\theta} + \frac{4g}{\pi R}\theta = 0} \quad \omega_0^2 = \frac{4g}{\pi R}$$

P3. Un semi-disco de radio R y masa M distribuida uniformemente oscila con un punto fijo apoyado sobre una superficie. Asuma que el cuerpo nunca desliza. Indicación: La distancia entre el centro de masa de un semidisco y el centro del disco completo es $\frac{4R}{3\pi}$. La energía cinética de rotación está dad por $K = \frac{M\dot{R}^2}{2} + M\vec{R}\left(\vec{\Omega} \times \vec{R}_G\right) + \frac{1}{2}\vec{\Omega} I^{O'} \vec{\Omega}$.

a. Encuentre la energía cinética y potencial del sistema como función de ϕ y $\dot{\phi}$.

b. Encuentre la ecuación de movimiento respetada por ϕ y su frecuencia de pequeñas oscilaciones.



O está en el suelo en el pto de contacto en equilibrio

O' está en el centro del semidisco

G centro de masa

$$\vec{R} = \overline{OO'} = -R\phi\hat{y} + R\hat{x} \qquad \vec{\Omega} = \dot{\phi}\hat{z}$$

Solo nos importa I_{zz}

$$I_{zz} = \frac{M}{\frac{\pi R^2}{2}} \cdot \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cdot r\,dr\,d\phi = \frac{MR^2}{2}$$

Área semi-circunf.

Posición del CM

$$\vec{R}'_0 = \frac{2\cancel{M}}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{\cancel{M}} \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\,\mathrm{sen}\,\phi \\ 0 \end{pmatrix} r\,dr\,d\phi$$

$$= \frac{2}{\pi \cancel{R^2}} \cdot \frac{R^{\cancel{3}}}{3} \left(\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2R}{3\pi} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4R}{3\pi}\hat{x} \longrightarrow \text{posición en el sólido}$$

$$\Rightarrow \vec{R}'_0 = \frac{4R}{3\pi}\cos\phi\,\hat{x} + \frac{4R}{3\pi}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{y}$$

Aprox. pequeñas oscilaciones

$$\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2} \qquad \mathrm{sen}\,\phi \approx \phi$$

$$\vec{R}'_0 = \frac{4R}{3\pi}\left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right)\hat{x} + \frac{4R\phi}{3\pi}\hat{y}$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{R}_G' = -\frac{4R}{3\pi} \phi \dot{\phi} \hat{X} + \frac{4R}{3\pi} \dot{\phi} \hat{Y}$$

Así la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\phi}^2 + M \left(-\frac{4R^2}{3\pi} \dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \dot{\phi}^2$$

$$= MR^2 \dot{\phi}^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi} \right)$$

La energía potencial la calculamos con el CM

$$\vec{R}_G = \vec{R} + \vec{R}_G'$$

$$U = -\left(\frac{4R}{3\pi} - R - \frac{2R}{3\pi} \phi^2 \right) Mg$$

~~Magia~~ Lagrangeano

$$L = K - U = \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi} \right) MR \dot{\phi}^2 - \frac{2R}{3\pi} Mg \phi^2 + cte$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi} \right) MR^2 \ddot{\phi} + \frac{4R}{3\pi} Mg \phi = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{16g}{(9\pi - 16)R} \phi = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{16g}{(9\pi - 16)R}}$$