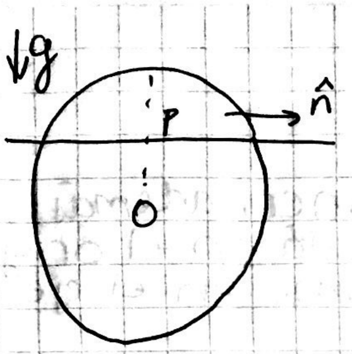
EJERCICIO 9

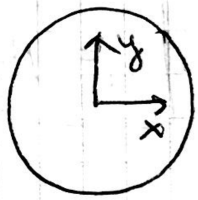


Se tiene una placa circular de radio R y densidad de masa uniforme $\sigma = M/\pi R^2$ que puede oscilar debido a su propio peso, en torno a un eje fijo horizontal (dirección $\hat{n}$) que coincide con una cuerda del círculo a distancia $R/2$ del centro O. Obtenga los momentos de inercia $I_{O,\hat{n}}$ y $I_{P,\hat{n}}$

Solución:

Para calcular el momento de inercia $I_{O,\hat{n}}$ notemos que como nos estamos parando en el centro geométrico (y de masas) del disco, y como es simétrico, la matriz de inercia debería ser diagonal

$$\mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$



Por lo tanto, notando que $\hat{n} = \hat{x}$, entonces necesitamos sólo I_{xx}

$$\Rightarrow I_{xx} = \int dm \left(r^2 \delta_{xx} - r_x^2\right)$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \sigma r \, dr d\theta \left(r^2 - r_x^2\right)$$

Donde $\vec{r}$ es el vector que define la posición de las partículas del sólido $\Rightarrow \vec{r} = \hat{r} \Rightarrow r_x = \cos\theta$

$$\Rightarrow I_{xx} = \iint \sigma\left(r^3 - r^3\cos^2\theta\right) dr d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \sigma r^3 \sin^2\theta \, dr \, d\theta$$
$$= \frac{\sigma R^4}{4}\pi = \frac{M}{\cancel{\pi R^2}}\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{4}\cancel{\pi} = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_{xx} = \boxed{I_{O,\hat{n}} = \frac{MR^2}{4}}$$

Para $I_{P,\hat{n}}$ usamos el teorema de steiner; además, notando que como el centro de masas está en el origen O, y nuestro nuevo origen P solo se desplazó en el eje y, entonces los términos $\mathbb{I}_P^{xy} = \mathbb{I}_P^{xz} = 0$

$$\Rightarrow I_{P,\hat{n}} = \mathbb{I}_P^{xx}$$

$$\Rightarrow I_{P,\hat{n}} = I_{O,\hat{n}} + M\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$= \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4}$$

$$\boxed{I_{P,\hat{n}} = \frac{MR^2}{2}}$$