Auxiliar #18

Sólido Rígido

Auxiliares: Cristóbal Zenteno, Benjamín Medina & Miguel Letelier

P2 Una esfera de masa M y radio R tiene pegada en su parte superior una partícula de igual masa M y se encuentra en presencia de gravedad. La esfera puede rodar sobre una superficie horizontal, y la posición de la partícula se encuentra determinada por el ángulo θ según muestra la figura.

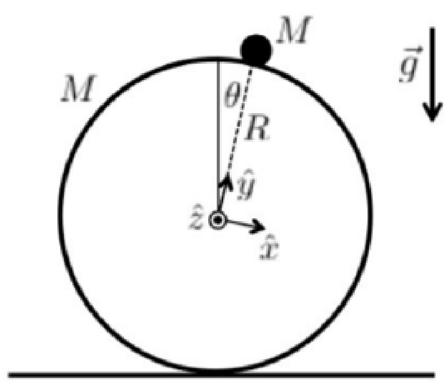
a) Calcule la matriz de inercia del sistema esfera-partícula en el sistema de referencia con origen en el centro de la esfera y que gira con ésta, según se indica en la figura.

b) Calcular la energía cinética y potencial gravitatoria del sistema en función de θ y $\dot{\theta}$.

c) Si en $t = 0$ el ángulo θ vale θ_0 encontrar $\theta(t)$ para valores de $\theta(t)$ mucho menores que uno.

Hint: *La matriz de inercia de una esfera de radio R y masa M, medida desde su centro de masas es:*

$$I_O = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}MR^2 \end{pmatrix}$$



Solución

a) Como sabemos, las matrices de inercia son aditivas, por lo que tenemos:

$$I^O = I_e^O + I_p^O$$

Conocemos la matriz de inercia de la esfera (I_e^O), solo nos falta la de la partícula (I_p^O), para lo que usaremos (aunque parezca raro) el teorema de Steiner. Como la partícula es puntual, su momento de inercia respecto a su centro es nulo, por lo tanto:

$$I_{p,ij}^O = I_{p,ij}^G + M(R_{Gp}^2 \delta_{ij} - R_{Gpi} R_{Gpj})$$

Definimos el vector centro de masa de la partícula (como es puntual, es la misma posición de la partícula),

$$\vec{R}_{Gp} = R\hat{y}$$

Por lo tanto

$$I_{p,xx}^O = I_{p,zz}^O = MR^2$$

Todas las otras componentes son nulas. Por lo que finalmente la matriz de inercia del sistema compuesto será:

$$I_O = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}MR^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix}$$

$$I_O = \begin{pmatrix} \frac{7}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5}MR^2 \end{pmatrix}$$

b) Ahora nos piden calcular la energía cinética, que tiene la forma:

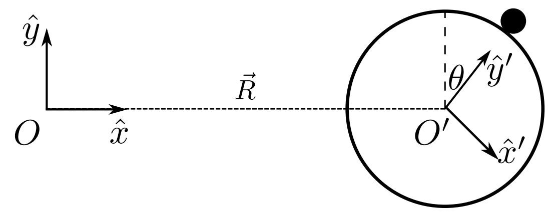
$$K = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + M\dot{\vec{R}} \cdot \vec{\Omega} \times \vec{R}_G' + \frac{1}{2}\vec{\Omega} I^{O'} \vec{\Omega}$$

Tomemos como sistema de referencia no inercial, uno que tenga origen en el centro de la esfera, con el eje $\hat{y}$ apuntando en la dirección de la partícula. Con lo que tendríamos que el centro de masas descrito en este sistema, está dado por:

$$\vec{R}_G' = \frac{R}{2}\hat{y}'$$

Y el vector $\vec{R}$ que une los origenes de los sistemas de referencia sería: $\vec{R} = x\hat{x}$.

Como la esfera rueda, lo que avanza su centro de masa debe ser igual al arco de circunferencia que define al girar, osea $x = R\theta$. Por lo tanto, $\vec{R} = R\theta\hat{x}$ y su derivada temporal $\dot{\vec{R}} = R\dot{\theta}\hat{x}$. Finalmente, la velocidad angular del sistema la escribimos como $\vec{Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$.



De esta forma, la energía cinética del sistema es:

$$K = \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{2} + MR\dot{\theta}\hat{x}\cdot(\dot{\theta}\hat{z}\times(\frac{R}{2}cos\theta\hat{y} + \frac{R}{2}sin\theta\hat{x})) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^T I^{O'}\vec{\Omega}$$

$$K = \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{2}cos\theta + \frac{7MR^2\dot{\theta}^2}{5}$$

$$K = \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{2}(1 - cos\theta)$$

Para la energía potencial gravitatoria, nos interesa la altura del centro de masas del sistema, por lo que tenemos:

$$U_g = MgR_{Gy} = \frac{MgR}{2}cos\theta$$

c) Ahora, usando el hecho que la energía se conserva, tenemos:

$$E = \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{2}(1 - cos\theta) + \frac{MgR}{2}cos\theta$$

Derivamos respecto al tiempo y despreciamos los términos conorden mayor al cuadrático:

$$0 = \frac{24MR^2\dot{\theta}^2}{10}\ddot{\theta}\dot{\theta} - \frac{MgRsin\theta}{2}\dot{\theta}$$

$$0 = \ddot{\theta} - \frac{5g}{24R}sin\theta$$

Que en aproximación de pequeñas oscilaciones es:

$$0 = \ddot{\theta} - \frac{5g}{24R}\theta$$

Esta última ecuación tiene como solución:

$$\theta(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}$$

Donde $\gamma^2 = \frac{5g}{24R}$ y las constantes A y B se calculan con las condiciones iniciales del problema.