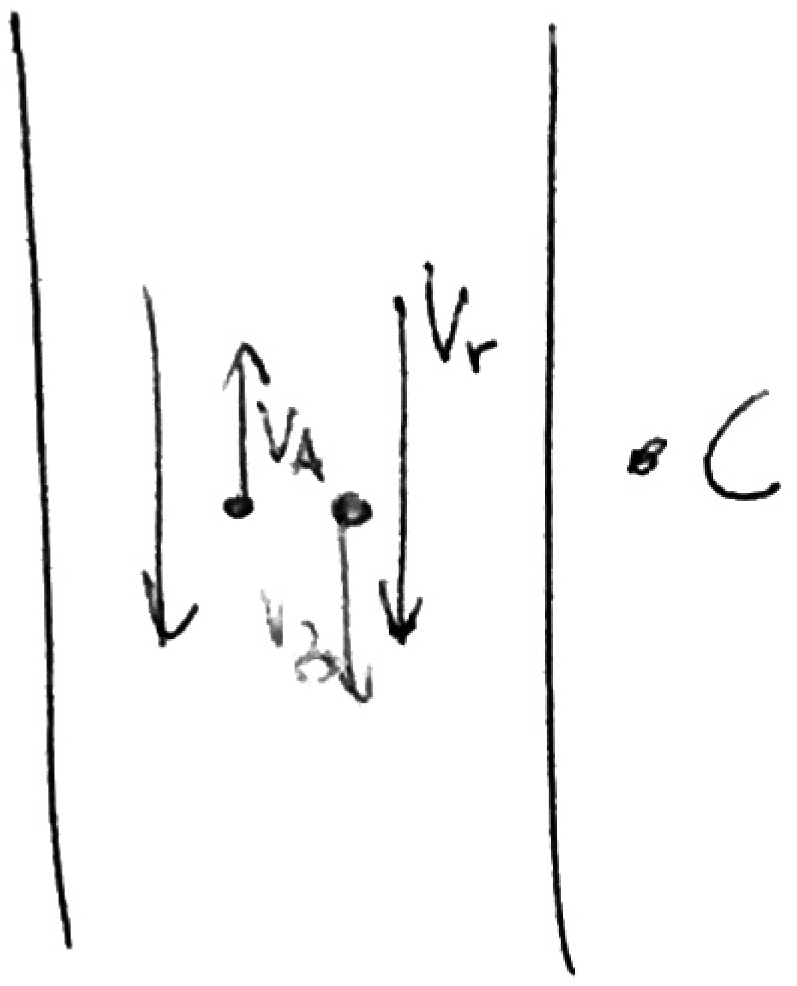
Pauta Aux 3

P1)



a) Como las dos lanchas son idénticas, su rapidez respecto al agua es la misma:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + \vec{V}_r \quad , \quad \vec{V}_A = 1{,}2 \ m/s$$

$$\vec{V}_B = -\vec{V}_0 + \vec{V}_r \qquad \vec{V}_B = -2{,}9 \ m/s$$

$$\vec{V}_r = -V_r$$

$$\Rightarrow \vec{V}_0 = \frac{\vec{V}_A - \vec{V}_B}{2} = \frac{1{,}2 - (-2{,}9)}{2} = \frac{4{,}1}{2} \ m/s$$

$$\vec{V}_r = \frac{\vec{V}_A + \vec{V}_B}{2} = \frac{1{,}2 - 2{,}9}{2} = -\frac{1{,}7}{2} \ m/s$$

La rapidez de la corriente del río es $V_r = \frac{1{,}7}{2} \ m/s$

b) $\vec{V}_{BC}$ = Velocidad de B respecto a C

$\cancel{\vec{V}_{BC} = \vec{V}_B - \vec{V}_C}$

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \qquad\qquad \vec{V}_{CA} = \vec{V}_C - \vec{V}_A$$

$\cancel{(-\vec{V}_0 + \vec{V}_r) - (\vec{V}_0 + \vec{V}_r)}$

$$= -2{,}9 - 1{,}2 \qquad\qquad = 0 - 1{,}2$$

$$= -4{,}1 \ m/s \qquad\qquad = -1{,}2 \ m/s$$

Tiene sentido que las dos velocidades sean negativas porque, desde punto de vista de A, B y C se mueven en el sentido negativo

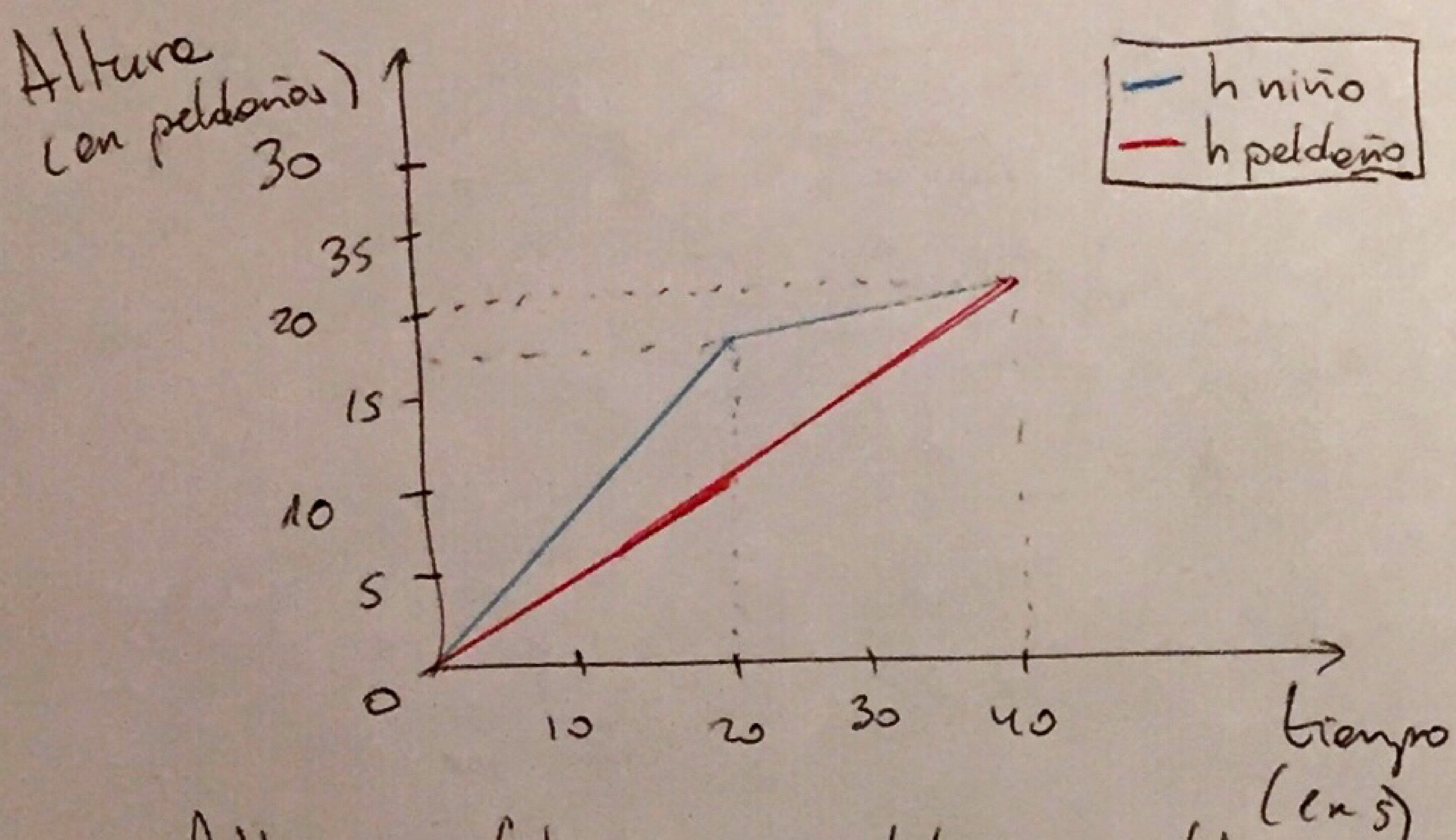
P2) Grafiquemos la posición del primer peldaño y la posición del niño en el tiempo.

El primer peldaño parte a una altura $h_0 = 0$ peldaños

Después de 20 s, llega a una altura $h_1 = 10$ peldaños

El niño comienza en el primer peldaño ($h_0^{niño} = 0$) y después de 20 s llega a una altura 8 peldaños mayor a la del primer peldaño que ahora está a una altura $h_1 = 10$.

Por lo tanto, después de 20 s el niño se encuentra a $h_1^{niño} = 18$



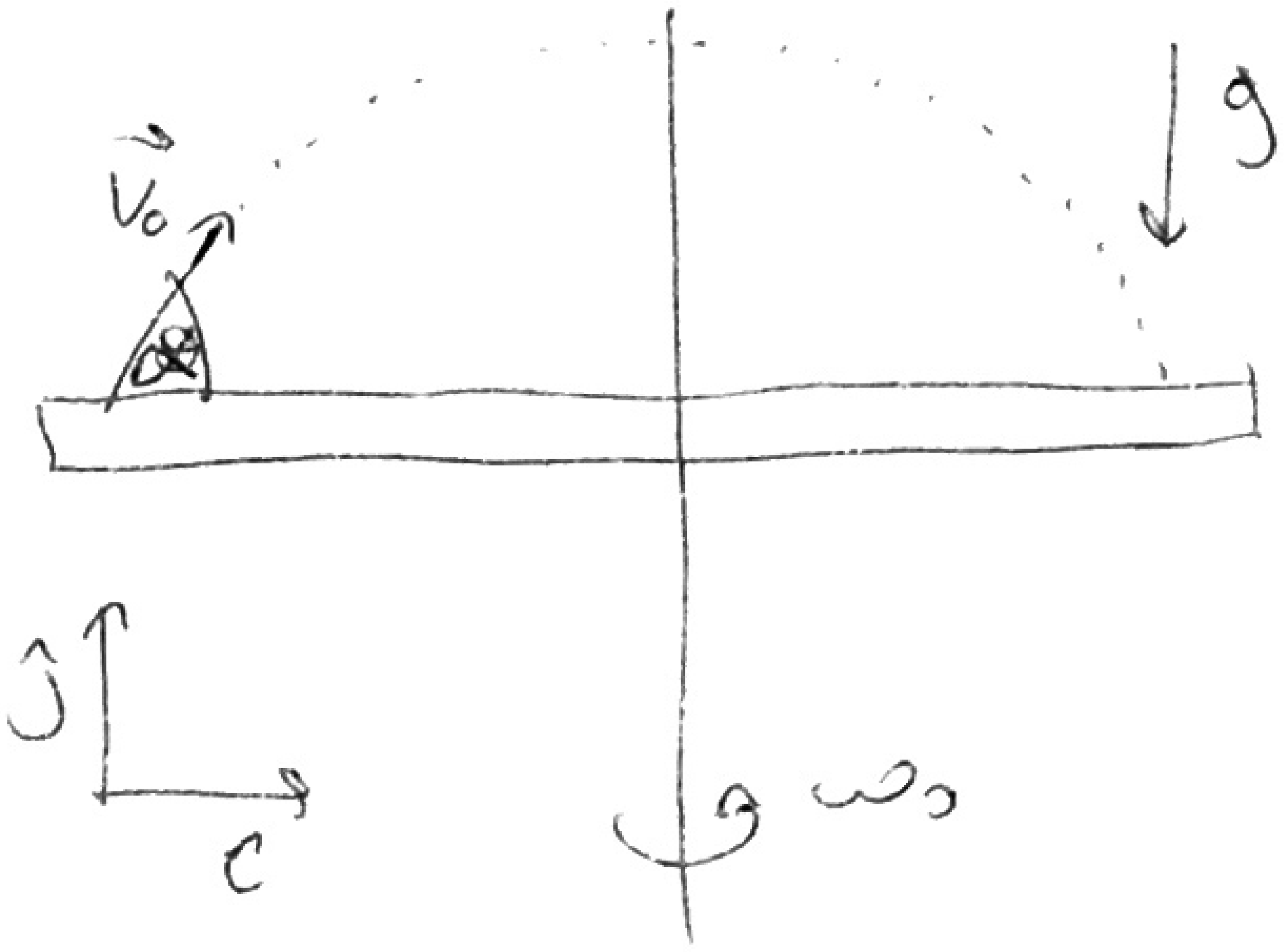
Altura del primer peldaño y del niño en función del tiempo

Después de otros 20 s, es claro que el primer peldaño llega a una altura de 20 peldaños

Por otro lado, el niño baja 8 peldaños desde el ~~primer~~ peldaño número 18. Al bajar esos 8 peldaños, el peldaño número 18 sube al 28. Por lo que el niño termina bajando al peldaño 20, que corresponde al primer peldaño.

En cada juego, el niño sube 20 peldaños. Si la escalera tiene 200 peldaños, entonces el niño puede realizar 10 veces el juego.

P5) Visto de lado:



Definimos el origen del sistema en el punto desde donde se lanza la partícula y los ejes en los sentidos usuales

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad , \vec{r}_0 = 0, \ \vec{V}_0 = V_0\cos\alpha\,\hat{\imath} + V_0 \operatorname{sen}\alpha\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = -g\hat{j}$$

$$= V_0 \cos\alpha\, t\ \hat{\imath} + \left[V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2\right]\hat{j}$$

Buscamos que en el tiempo que el hoyito da media vuelta, la partícula caiga justo en el hoyito.
Sea t^* el tiempo que le toma al hoyito dar media vuelta:

$$t^* = \frac{\pi}{\omega} \quad , \quad r(t^*) = 2R\hat{\imath} + 0\hat{j}$$

$$\Rightarrow \quad V_0 \cos\alpha\, t^* = 2R \qquad y \qquad V_0 \operatorname{sen}\alpha\, t^* - \frac{1}{2}g{t^*}^2 = 0$$

$$V_0 \cos\alpha = \frac{2R}{t^*} \qquad y \qquad V_0 \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}gt^*$$

Reemplazando $t^* = \frac{\pi}{\omega}$: $\quad V_0 \cos\alpha = \frac{2R\omega}{\pi} \quad y \quad V_0 \operatorname{sen}\alpha = \frac{g\pi}{2\omega}$

Luego por pitágoras $V_x^2 + V_y^2 = V_0^2$

$$\Rightarrow (V_0 \cos\alpha)^2 + (V_0 \operatorname{sen}\alpha)^2 = V_0^2$$

$$\left(\frac{2R\omega}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{g\pi}{2\omega}\right)^2 = V_0^2$$

$$\Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{4R^2\omega^2}{\pi^2} + \frac{g^2\pi^2}{4\omega^2}}$$

Por otro lado

$$\frac{V_0 \operatorname{sen}\alpha}{V_0 \cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\frac{\frac{g\pi}{2\omega}}{\frac{2R\omega}{\pi}} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{g\pi^2}{4R\omega^2}$$

El movimiento de la partícula ocurre en dos fases, la primera es un movimiento en un plano inclinado y el segundo un movimiento parabólico.

En el plano inclinado si medimos la distancia desde el origen hacia arriba por el plano, la velocidad inicial es V_0, la aceleración es $a = -g \sin \pi/4 = -g\sqrt{2}/2$ y la distancia total a recorrer es $D\sqrt{2}$. La trayectoria de la partícula es

$$x(t) = V_0 t - g\sqrt{2}t^2/2$$

Se busca la solución de $x(t) = D\sqrt{2}$, lo que da una ecuación cuadrática de la que hay que tomar la primera solución dando

$$t^* = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gD}}{g/\sqrt{2}}$$

Entonces la velocidad con que sale del plano inclinado es

$$V_s = V_0 - g\sqrt{2}t^*/2 = \sqrt{V_0^2 - 2gD}$$

Noten que este resultado también se puede sacar de la fórmula $V_s^2 = V_0^2 + 2ad$.

Para el segundo movimiento tomamos un sistema de coordenadas con origen en el vértice (intersección de los dos planos inclinados), con eje x hacia la derecha y eje y hacia arriba. Así la condición inicial es

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & V_{x0} &= V_s\sqrt{2}/2 \\ y_0 &= 0 & V_{y0} &= V_s\sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

Entonces, la trayectoria de la partícula es

$$\begin{aligned} x &= V_s\sqrt{2}t/2 \\ y &= V_s\sqrt{2}t/2 - gt^2/2 \end{aligned}$$

cuya solución (aparte de la trivial $y = 0$ que no nos interesa) es

$$y = \frac{(\sqrt{3}-1)V_s^2}{3g}$$

Esta altura está medida desde nuestro origen. Nos piden que midamos desde el suelo, por lo que se suma D, dando

$$y_{\text{desde suelo}} = D + \frac{(\sqrt{3}-1)V_s^2}{3g} = \frac{5+2\sqrt{3}}{3}D + \frac{\sqrt{3}-1}{3}\frac{V_0^2}{g}$$

donde se reemplazó el valor de V_s (no es necesario hacer esto último para tener correcto el problema pues V_s es conocido).

Para determinar los valores mínimos y máximos, notamos que primero la velocidad debe ser suficiente para terminar el primer plano inclinado. Es decir, se debe cumplir que V_s exista. Para eso se pide que $V_0^2 - 2gD > 0$

$$V_0 > \sqrt{2gD}$$

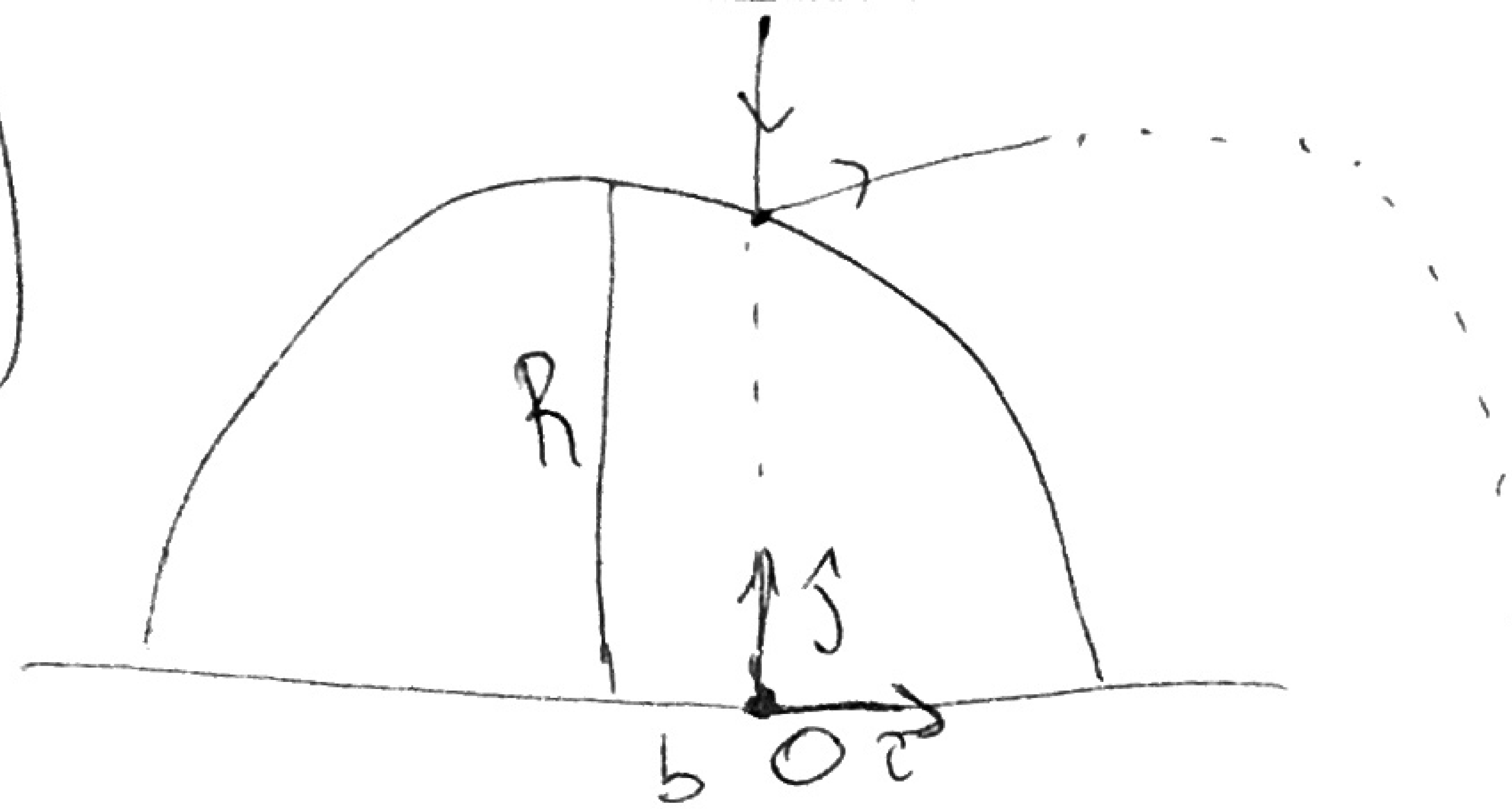
El valor máximo está dado por la condición de que si se lanza muy rápido caerá más allá de H. Entonces, pedimos que la altura a la cual choca sea menor que H, $y_{\text{desde suelo}} < H$. En términos de V_0 resulta en la condición

$$V_0 < \sqrt{\frac{3g}{\sqrt{3}-1}}\sqrt{H - \frac{5+2\sqrt{3}}{3}D}$$

Tenemos entonces tres ecuaciones para tres incógnitas: x, y y t. Nos interesa y así que eliminamos las otras dos quedando una ecuacón sólo para y

$$\frac{3g}{V_s^2}y^2 - (\sqrt{3}-1)y = 0$$

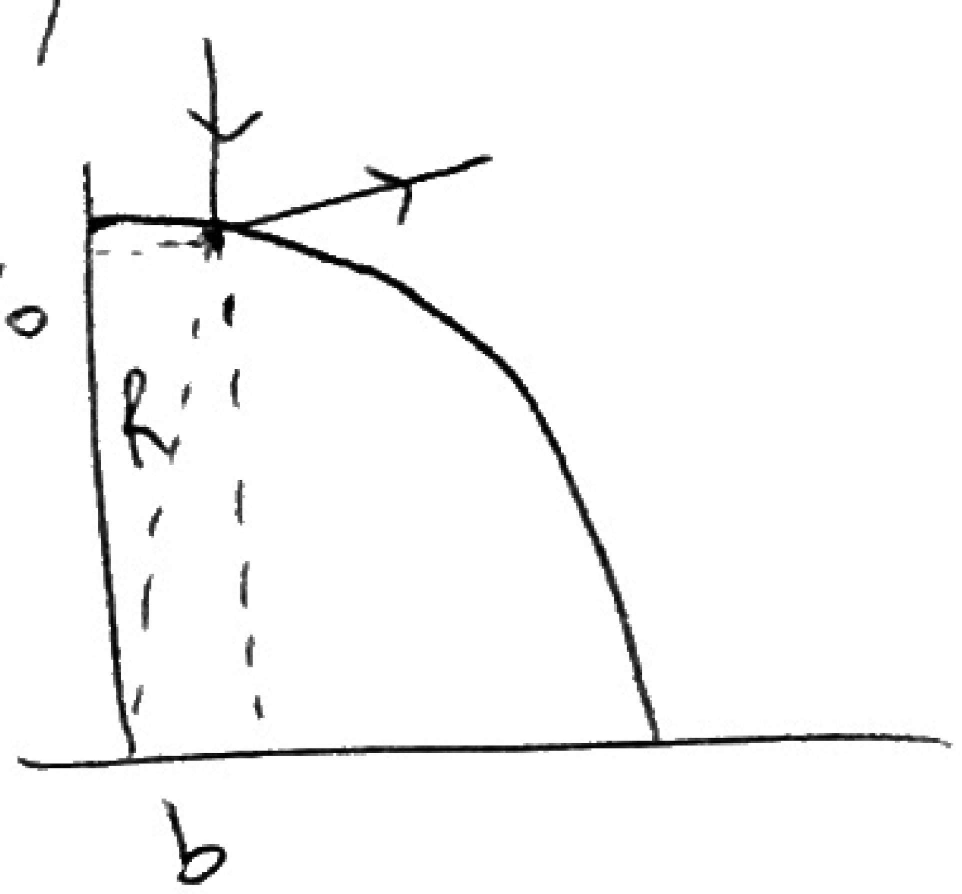
P7



Definiremos nuestro origen O a distancia b horizontal del centro de la cúpula, como en la figura.

Luego, $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

Donde $\vec{r}(t)$ es la posición de la partícula después del choque. Determinemos las condiciones iniciales:



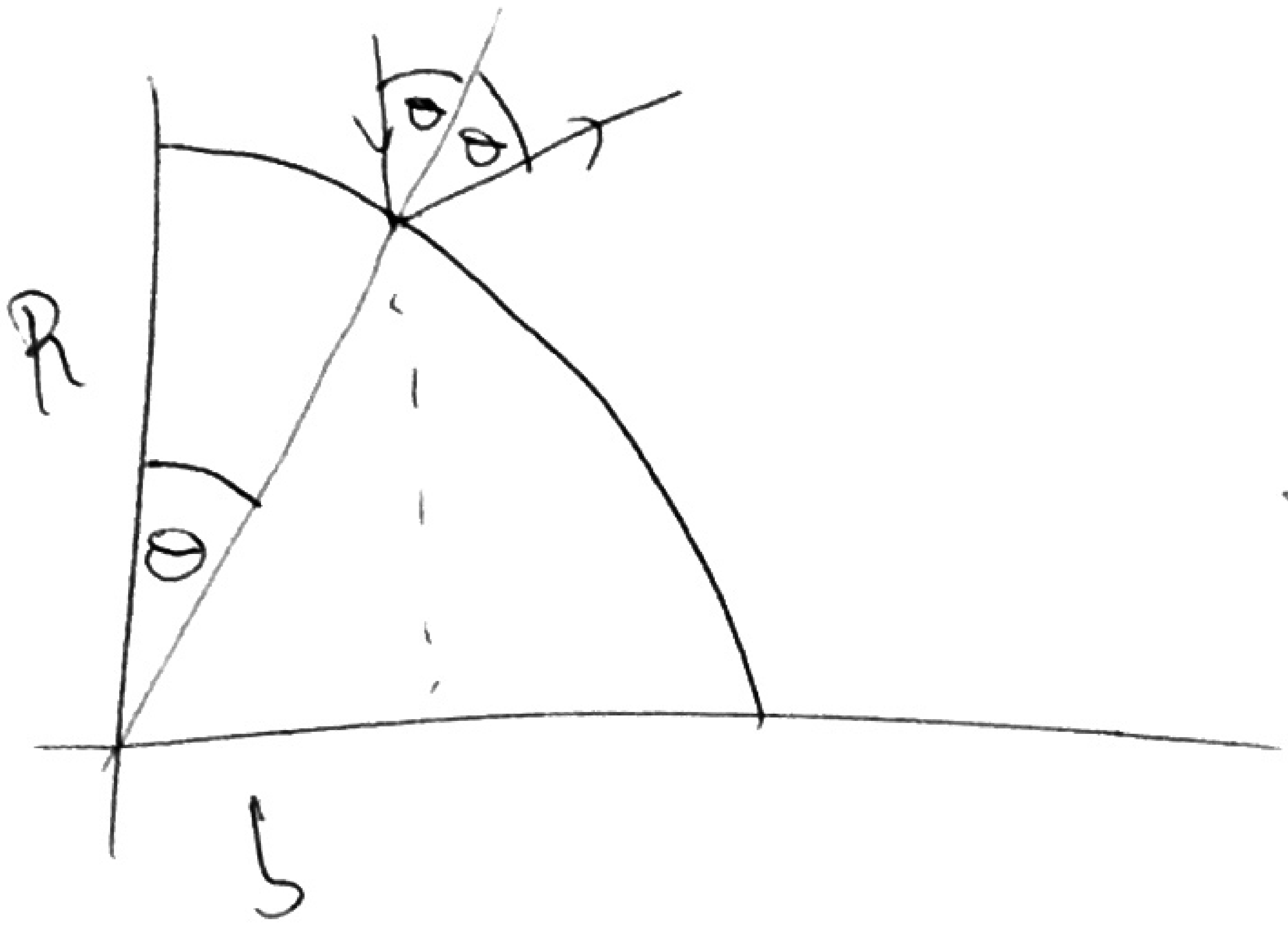
$\vec{r}_0 = y_0\hat{\jmath}$, por pitágoras:

$$b^2 + y_0^2 = R^2$$

$$\Rightarrow y_0 = \sqrt{R^2 - b^2}$$

$$\vec{r}_0 = \sqrt{R^2-b^2}\,\hat{\jmath}$$

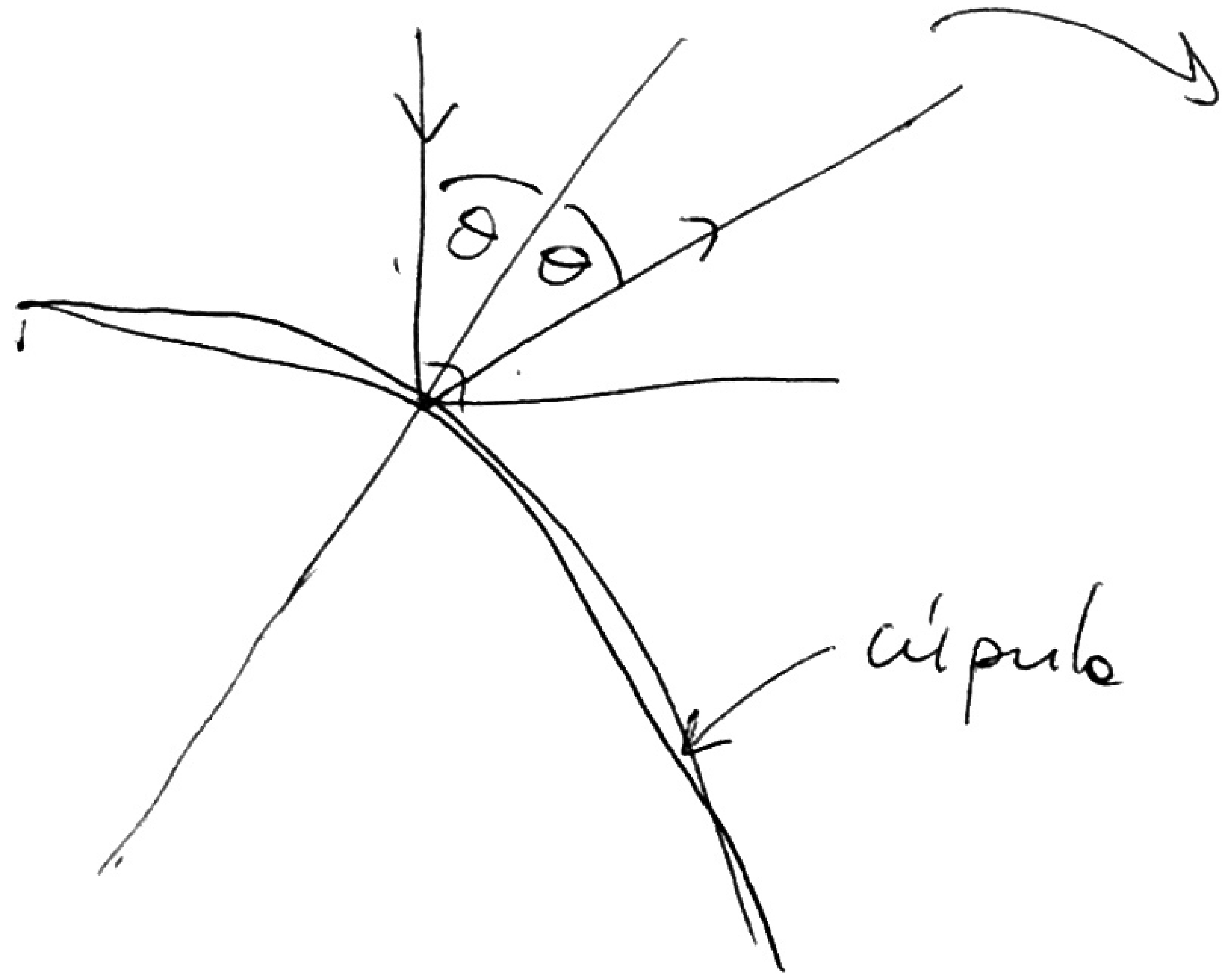
Para determinar las componentes de la velocidad necesitamos conocer el ángulo que forma con el eje horizontal (o vertical)

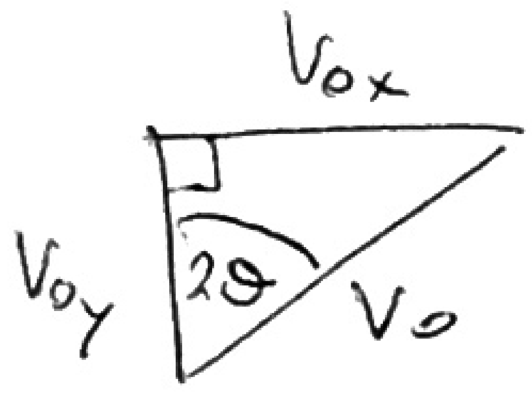


Notemos que se forma el triángulo:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{R}$$

Ahora conocemos el ángulo entre el eje vertical con la velocidad inicial:





$$V_{0y} = V_0 \cos 2\theta$$

$$V_{0x} = V_0 \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\Rightarrow \vec{V_0} = V_0 \operatorname{sen} 2\theta\,\hat{\imath} + V_0 \cos 2\theta$$

Tenemos entonces:

$$\vec{r} = V_0 \operatorname{sen} 2\theta\, t\,\hat{\imath} + \left[\sqrt{R^2 - b^2} + V_0 \cos 2\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2\right]$$

$$\vec{V} = V_0 \operatorname{sen} 2\theta\,\hat{\imath} + \left[V_0 \cos 2\theta - g t\right]\hat{\jmath}$$

Alcanza la altura máxima cuando $V_y(t^*) = 0$

$$\Rightarrow V_0 \cos 2\theta - g t^* = 0$$

$$\Rightarrow \quad t^* = \frac{V_0 \cos 2\theta}{g}$$

En ese instante la altura es:

$$y(t^*) = \sqrt{R^2-b^2} + \frac{V_0^2 \cos^2 2\theta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{V_0^2 \cos^2 2\theta}{g^2}$$

$$= \sqrt{R^2-b^2} + \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \cos^2 2\theta}{g}$$

Por pitágoras, $V_{0x}^2 + V_{0y}^2 = V_0^2$

$$\Rightarrow \quad V_{0y}^2 = V_0^2 - V_{0x}^2, \quad V_{0x} = V_0 \operatorname{sen} 2\theta$$

$$y \quad V_{0y} = V_0 \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow V_0^2 \cos^2 2\theta = V_0^2 - V_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

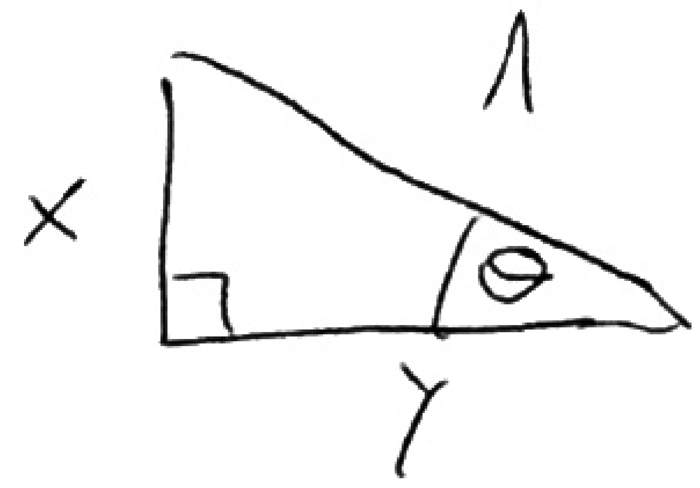
Por pitágoras $\Rightarrow V_0^2\cos^2 2\theta = V_0^2(1-\text{sen}^2 2\theta)$

Pero, por identidad del ángulo doble,

$$\text{sen}\,(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2(2\theta) = 2\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

pero $\text{sen}^2\theta = \left(\frac{b}{R}\right)^2 = 1-\cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = 1-\left(\frac{b}{R}\right)^2$

ya que  

$\Rightarrow x = 1\cdot\text{sen}\,\theta$

$y = 1\cdot\cos\theta$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 1$

$\Rightarrow \text{sen}^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$\text{sen}^2(2\theta) = 2\left(\frac{b}{R}\right)^2\left(1-\left(\frac{b}{R}\right)^2\right)$$

$$y(t^*) = \sqrt{R^2-b^2} + \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\left(1-2\left(\frac{b}{R}\right)^2\left(1-\frac{b^2}{R^2}\right)\right)$$

La velocidad en la caida es:

$$\vec{v} = -gt\,\hat{j}$$

Luego, en el instante que choca,

$$\vec{V}(\bar{t}) = -g\bar{t}\,\hat{j}$$

$$= -g\cdot\sqrt{\frac{2(H-\sqrt{R^2-b^2})}{g}}\,\hat{j}$$

$$= -\sqrt{2g(H-\sqrt{R^2-b^2})}\,\hat{j}$$

Pero tenemos que

$$\vec{v}(\bar{t}) = -v_0\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow v_0 = +\sqrt{2g(H-\sqrt{R^2-b^2})}$$

$\Rightarrow$ ~~v~~ Queda reemplazar esta expresión de v_0 en $y(t^*)$ y listo!

~~Finalmente la altura máxima es~~

$$y(t^*) = \sqrt{R^2-b^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2g(H-\sqrt{R^2-b^2})}{g}\left(1-\frac{b^2}{R^2}\right)$$

$$= \sqrt{R^2-b^2} + (H-\sqrt{R^2-b^2})\left(1-\frac{b^2}{R^2}\right)$$

$$= \frac{b^2}{R^2}\sqrt{R^2-b^2} + H\left(1-\frac{b^2}{R^2}\right)$$