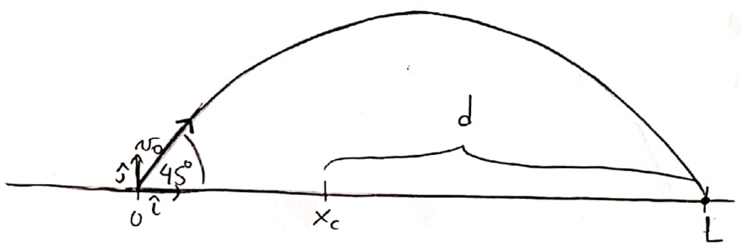
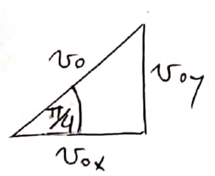
Pauta Auxiliar # 1

P2) Un proyectil y un carro



Dado que se nos pide la velocidad del carro tal que se encuentre con el proyectil en el punto L, debemos determinar la distancia que debe recorrer y en cuanto tiempo. En otras palabras debemos encontrar d y el tiempo de vuelo del proyectil.
Los datos del problema son la velocidad inicial $\vec{v}_0$ (al conocer el ángulo de lanzamiento del proyectil y su rapidez inicial podemos decir que conocemos la velocidad, que es un <u>vector</u>) y la distancia x_c desde el punto de lanzamiento a partir de la cual el carro inicia su movimiento. (este punto puede encontrarse a la izquierda o a la derecha del origen, veremos que nuestra solución contempla los dos casos.)
De $\vec{v}_0$ podemos despejar el alcance, pero antes debemos encontrar las componentes horizontal y vertical de la velocidad:



$$\cos \pi/4 = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = \cos \pi/4 \cdot v_0$$

$$\operatorname{Sen} \pi/4 = \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = \operatorname{Sen} \pi/4 \cdot v_0$$

* Una forma fácil de recordar los valores de senos y cosenos de ángulos específicos es la siguiente:

	0°	30°	45°	60°	90°
Sen	0	1	2	3	4
Cos	4	3	2	1	0

$$\sqrt{} \;/\; 2$$

También para transformar entre grados y radianes: Sea θ el ángulo en grados y θ_r el ángulo en radianes:

$$\frac{180}{\theta} = \frac{\pi}{\theta_r} \Rightarrow \theta_r = \frac{\theta}{180} \cdot \pi$$

Reemplazando los valores de $\cos \pi/4$ y $\operatorname{sen} \pi/4$

$$v_{ox} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_o$$

$$v_{oy} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_o \,.$$

Para determinar el tiempo de vuelo t_v hacemos uso de la ecuación itinerario para la posición en y.

$$y(t) = y_o + v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Ya que parte desde el origen, $y_o = 0$.
Además buscamos que en t_v vuelva a tocar el suelo, por lo que $y(t_v) = 0$.
También $v_{oy} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_o$.

$$\Rightarrow y(t=t_v) = y_o + \frac{\sqrt{2}}{2} v_o \cdot t_v - \frac{1}{2} g \cdot t_v^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 + \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} v_o \cdot t_v - \frac{1}{\cancel{2}} g\, t_v^2$$

$$\Leftrightarrow t_v^2 g - \sqrt{2} v_o t_v = 0$$

$$\Leftrightarrow t_v (t_v g - \sqrt{2} v_o) = 0$$

De aquí se desprenden dos soluciones.

$t_v = 0$ que corresponde al tiempo inicial en el cual, efectivamente, el proyectil está a una altura 0 del origen.

La otra solución se desprende de:

$$t_v \cdot g - \sqrt{2} \cdot v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t_v = \frac{\sqrt{2}\, v_0}{g}$$

la cual nos dará la información sobre el alcance L.

Usando la ecuación itinerario para la posición en x obtendremos el alcance.

$$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t \quad / \ t = t_v$$

$$\Leftrightarrow \quad L = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \cdot \frac{\sqrt{2}\, v_0}{g}$$

$$\Leftrightarrow \quad L = \frac{v_0^2}{g}$$

Con L podemos determinar la distancia que debe recorrer el carro:

$$\Rightarrow \quad d = L - x_c$$

(si consideramos que el carro parte desde la izquierda entonces a x_c se le antepone un signo menos, dando así que $d = L + x_c$).

Luego:

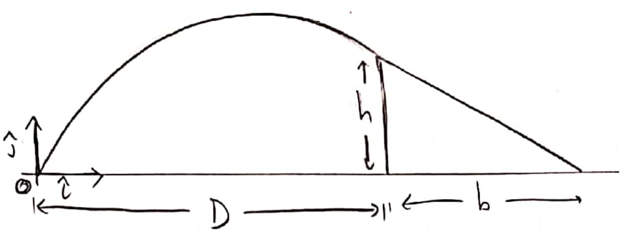
$$d = \frac{v_0^2}{g} - x_c$$

Finalmente:

$$v_c = \frac{d}{t_v} = \frac{\frac{v_0^2}{g} - x_c}{\frac{\sqrt{2}\, v_0}{g}} = \frac{v_0^2 - x_c \cdot g}{\sqrt{2}\, v_0}$$

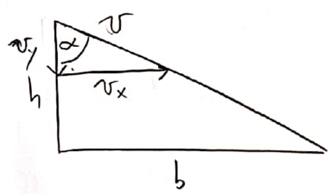
$$\Rightarrow \quad v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}} - \frac{x_c \cdot g}{\sqrt{2}\, v_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(v_0 - \frac{x_c \cdot g}{v_0} \right) \quad //.$$

P3] Un proyectil y un tobogán



En primer lugar debemos identificar la condición que asegure que el proyectil llegue al vértice superior del tobogán con una velocidad paralela a este.

Veamos que:



$$tg\,\alpha = \frac{b}{h},$$

también:

$$tg\,\alpha = -\frac{v_x}{v_y}$$ (el signo menos es porque la velocidad va en el sentido opuesto a nuestro sistema de referencia.)

De estas dos últimas relaciones podemos establecer que en un tiempo t_D

$$\frac{v_x(t_D)}{v_y(t_D)} = -\frac{b}{h}$$

Dado que v_x se mantiene constante durante el trayecto (no hay aceleración en $\hat{\imath}$)

$$\boxed{\frac{v_x}{v_y(t_D)} = -\frac{b}{h}} \quad (1)$$

Que corresponde a la condición que se busca.

Debemos relacionar estas velocidades con las iniciales. Para v_x es muy simple ya que:

$$v_x(t_D) = \boxed{\frac{D}{t_D} = v_x} \quad (2)$$

Para y, queremos ver el momento en el que la altura sea igual a h.

$$\Rightarrow y(t_D) = h$$

$$\Leftrightarrow h = \cancel{y_0}^{0} + v_{oy} \cdot t_D - \frac{1}{2} g \cdot t_D^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2} g t_D^2 - v_{oy} \cdot t_D + h = 0} \quad (3)$$

Despejando t_D usando la fórmula para las soluciones de una ecuación cuadrática:

Si $A t_D^2 + B t_D + C = 0$

entonces $t_D = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

Ahora, con $A = \frac{1}{2} g$, $B = -v_{oy}$, $C = h$

$$\Rightarrow t_{D\pm} = \frac{v_{oy} \pm \sqrt{v_{oy}^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot h}}{g}$$

$$t_{D\pm} = \frac{v_{oy} \pm \sqrt{v_{oy}^2 - 2gh}}{g}$$

De las dos soluciones, nos quedamos con t_{D+}, ya que t_{D-} representa el tiempo en que alcanza una altura h pero mientras va subiendo (*).

$$\Rightarrow t_D = \frac{v_{oy} + \sqrt{v_{oy}^2 - 2gh}}{g}$$

Sabemos también que:

$$\boxed{v_y(t_D) = v_{oy} - g \cdot t_D} \quad (4)$$

Despejando v_x de ① e introduciéndolo en la ecuación ④

$$\Rightarrow -\frac{v_x h}{b} = v_{oy} - g\frac{D}{v_x} \quad (4')$$

Podemos trabajar con ③

$$h = v_{oy} t_D - \frac{1}{2} g t_D^2$$ / Por ② tenemos que $t_D = \frac{D}{v_x}$

$$h = v_{oy}\frac{D}{v_x} - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{v_x^2} \quad (3')$$

Vemos que esta expresión es similar a (4')

Trabajemos un poco más con (4').

$$(4') \cdot \frac{D}{v_x} \Rightarrow -\frac{hD}{b} = \frac{v_{oy} D}{v_x} - \frac{g D^2}{v_x^2} \quad (4'')$$

Luego, (3') − (4'')

$$\Rightarrow h + \frac{hD}{b} = \frac{g D^2}{2 v_x^2}$$

$$\frac{h}{b}(b + D) = \frac{g D^2}{2 v_x^2}$$

$$\Rightarrow v_x^2 = \frac{g D^2 b}{2h(b + D)} \quad /\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x = D\sqrt{\frac{gb}{2h(b+D)}}}$$

Introduciendo v_x en (3')

$$h = v_{oy}\frac{\cancel{D}}{\cancel{D}\sqrt{\frac{gb}{2h(b+D)}}} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{g}\cdot\frac{\cancel{D^2}}{\frac{\cancel{g}\cancel{D^2}b}{\cancel{2}h(b+D)}}$$

$$h = v_{oy}\sqrt{\frac{2h(b+D)}{gb}} - \frac{h(b+D)}{b}$$

$$\Rightarrow v_{oy}\sqrt{\frac{2h(b+D)}{gb}} = h + \frac{h(b+D)}{b}$$

$$\Rightarrow v_{oy} = \frac{(bh + h(b+D))}{b}\cdot\sqrt{\frac{gb}{2h(b+D)}}$$

$$\boxed{v_{oy} = (2b + D)\sqrt{\frac{gh}{2b(b+D)}}}$$

Scanned by CamScanner

Habiendo llegado al resultado me doy cuenta que no era necesario despejar t_D, pero sirvió para darnos cuenta la ⊛.