Unidad 5:
ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Programa desarrollado por la FCFM año 2019

CONTENIDOS	INDICADOR DE LOGRO
5.1. Descripción cinemática de un sólido rígido. • Determinación del centro de masas de un sólido rígido. • Momentum lineal de un sólido rígido. **5.2. Torque asociado a una fuerza.** • Producto vectorial entre dos vectores. **5.3. Condiciones de equilibrio para un sólido rígido.** • Equilibrio de fuerzas. • Equilibrio de torques.	El estudiante: 1. Determina la posición, velocidad y aceleración del centro de masas de sólidos rígidos con simetrías espaciales. 2. Describe el momentum lineal de un sólido rígido en términos de la velocidad de su centro de masas. 3. Identifica al torque como la capacidad de una fuerza para hacer rotar a un sólido rígido. 4. Utiliza el producto vectorial para calcular el torque asociado a una fuerza con respecto a un eje de rotación fijo. 5. Evalúa las condiciones necesarias para que un sólido rígido se encuentre en equilibrio. 6. Realiza experimentos guiados para medir el torque y confirmar las condiciones de equilibrio de un sólido rígido. 7. Redacta resúmenes sobre los resultados experimentales obtenidos en su trabajo de laboratorio. 8. Cumple, según el rol asignado, las tareas y actividades comprometidas con su equipo, considerando formalidades de la entrega y organización del trabajo. 9. Planifica y presenta sus trabajos, basándose en sus capacidades, sin incurrir en plagio, copia, suplantación de identidad.

Unidad 5:
ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

1. **Introducción**

2. **Descripción Cinemática de un Sólido Rígido**
   - Determinación del CM de un Sólido Rígido
   - Momentum lineal de un Sólido Rígido

3. **Ejemplos**

4. **Torque asociado a una Fuerza**
   - Producto vectorial entre dos vectores

1. Introducción

Sólido rígido:
Es un caso particular del Sistema de partículas

1) Todas giran con igual velocidad angular.

2) Distancias relativas constantes.

Movimiento de un sólido rígido:
Analizado por partes. (VIDEO)

1. Introducción

El bolo gira y se desplaza hacia la derecha.

Calculamos la aceleración de su CM con la 2da ley de Newton.

Fuerzas externas: pesos de las partículas que lo constituyen => a_{CM} viene dada por:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum \vec{F}_{ext} = \frac{1}{M}\sum m_i\,\vec{g} = \vec{g}$$

1. Introducción

El CM del sólido se mueve como un punto cuya masa es la masa total del sistema.

Describe un movimiento parabólico.

2da Ley de Newton => describir el movimiento de traslación del CMde un sólido rígido.

1. Introducción

El sólido describe traslación del CM y giros.

La 2da ley de Newton describe sólo traslación.

Encontraremos otra ecuación que nos permita analizar el movimiento rotacional.

Desde una referencia en el CM, el movimiento es sólo de rotación.

1. Introducción

Movimiento de un sólido:

Podemos estudiarlo como una superposición del movimiento de traslación de su CM con respecto al origen del sistema de referencia y la rotación del sólido con respecto a un eje que pasa por el CM.

1. Introducción

Movimiento de un sólido:

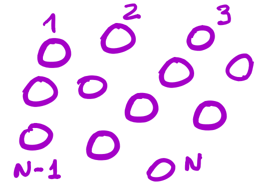
En esta Unidad encontraremos las ecuaciones que describen estos movimientos de rotación y de traslación

2. Descripción Cinemática de un Sólido Rígido

RECORDEMOS: En Sistemas de Partículas vimos que

<u>Masa y Centro de Masa</u>

Masa del sistema: $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$



Centro de masa del sistema:

Punto geométrico que depende de la ubicación de las partículas del sistema, ponderadas por sus masas.

Se definió la posición del Centro de Masa en la forma: $\vec{R}_{CM} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i$

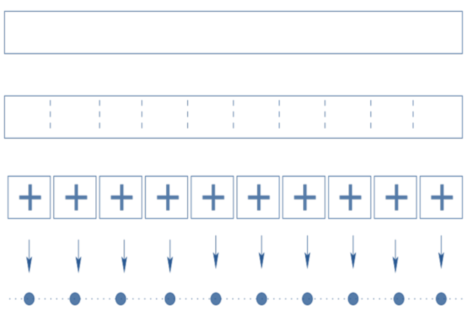
$$\vec{X}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{x}_i \quad ; \quad \vec{Y}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{y}_i \quad ; \quad \vec{Z}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{z}_i$$

$$\vec{V}_{CM} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \vec{R}_{CM}}{\Delta t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i \quad ; \quad \vec{A}_{CM} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \vec{V}_{CM}}{\Delta t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{a}_i$$

2. Descripción Cinemática de un Sólido Rígido

Determinación del CM de un Sólido Rígido

Sólido indeformable: La distribución continua de masa la modelamos como un sistema de muchas partículas.



(a) $\longrightarrow$ Solido indeformable: En este caso, una barra.

(b) $\longrightarrow$ Barra trozada, imaginariamente, en muchas celdas.

(c) $\longrightarrow$ Celdas contiguas ejercen fuerzas de cohesión.

(d) $\longrightarrow$ Representación de la barra como sistema de muchas partículas.

Masa de la barra: $$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

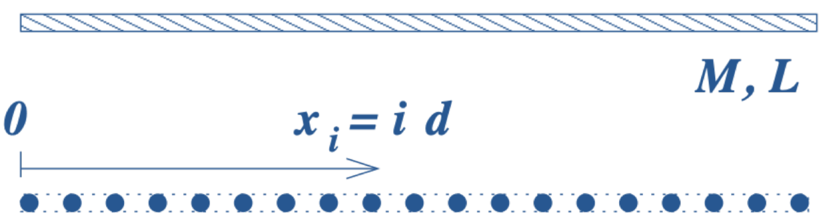
Posición del Centro de Masa: $$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i$$

2. Descripción Cinemática de un Sólido Rígido

Determinación del CM de un Sólido Rígido

Barra de largo L

$$R_x = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{N} m_i x_i = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{N}\frac{M}{N+1}\times\frac{iL}{N} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=0}^{N} = \frac{L}{2}$$



Hacemos notar que, dependiendo del caso, puede ser conveniente dividir un objeto en N trozos, numerados de 1 a N o, como en este caso, en $N+1$ trozos, numerados de 0 a N.

2. Descripción Cinemática de un Sólido Rígido

Velocidad del CM y Momentum de un Sólido Rígido

- Si las partículas tienen velocidad $\vec{v}_i$, el momentum total del sistema es

$$\vec{P} = \sum_{i=0}^{N} m_i \vec{v}_i$$

- Por otro lado, la velocidad del centro de masa está dada por

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{N} m_i \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{P}}{M}$$

por lo tanto, el momentum total del sistema es

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

3. EJEMPLOS

Determinación del CM de un Sólido Rígido

Centro de masa de centros de masas

Usando la propiedad asociativa:

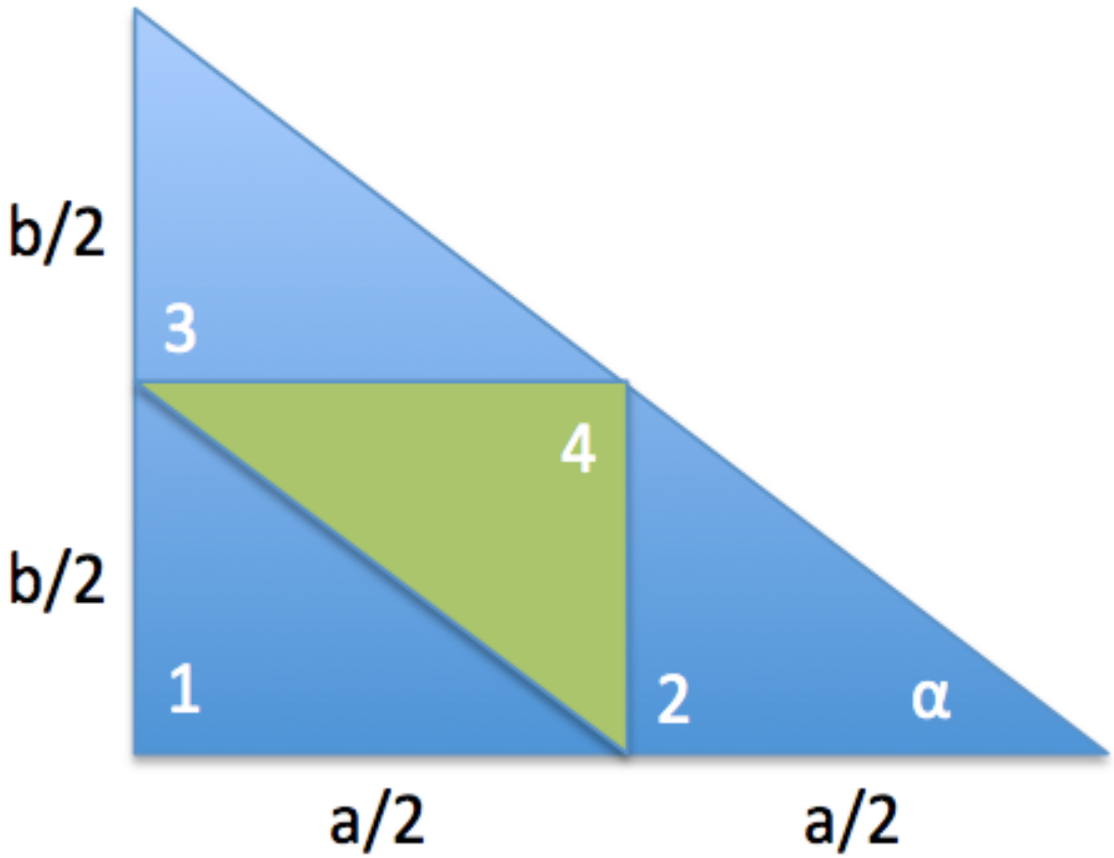
$$\vec{R}_{CM\,A+B} = \frac{1}{M_{A+B}} \sum_{i=1}^{N_A+N_B} m_i\,\vec{r}_i = \frac{1}{M_A + M_B}\left(\sum_{i=1}^{N_A} m_i\,\vec{r}_i + \sum_{i=N_A+1}^{N_A+N_B} m_i\,\vec{r}_i\right)$$

$$\vec{R}_{CM\,A+B} = \frac{M_A \vec{R}_{CM\,A} + M_B\,\vec{R}_{CM\,B}}{M_A + M_B}$$

3. PROPUESTO

Determinación del CM de un Sólido Rígido

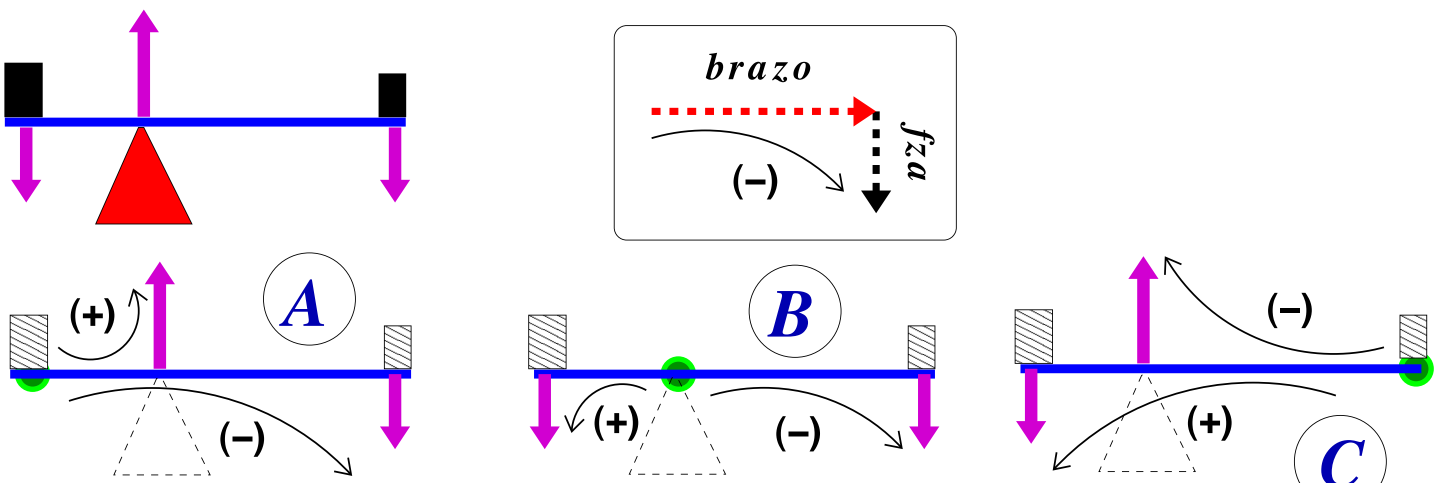
Ejemplo: El centro de masas de un triángulo



4. Torque de una Fuerza

Balancín equilibrado

La barra horizontal tiene masa despreciable. Los bloques en los extremos forman parte del sistema.

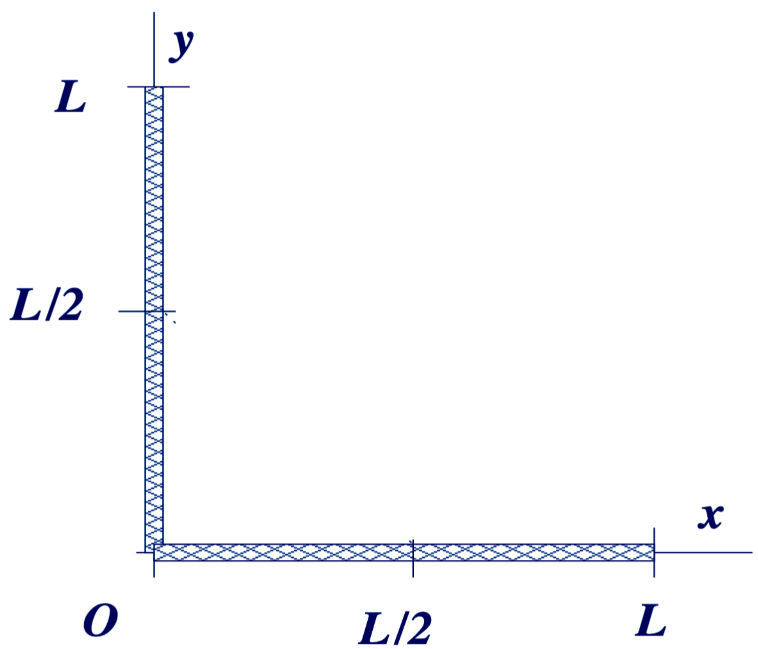


Fuerzas externas?; Fuerzas internas?

PRACTICO

Determinación del CM de un Sólido Rígido

Centro de masa de una escuadra formada por dos barras idénticas de largo L y masa M.



Unidad 5:
ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Programa desarrollado por la FCFM año 2019

CONTENIDOS	INDICADOR DE LOGRO
5.1. Descripción cinemática de un sólido rígido. • Determinación del centro de masas de un sólido rígido. • Momentum lineal de un sólido rígido. **5.2. Torque asociado a una fuerza.** • Producto vectorial entre dos vectores. **5.3. Condiciones de equilibrio para un sólido rígido.** • Equilibrio de fuerzas. • Equilibrio de torques.	El estudiante: 1. Determina la posición, velocidad y aceleración del centro de masas de sólidos rígidos con simetrías espaciales. 2. Describe el momentum lineal de un sólido rígido en términos de la velocidad de su centro de masas. 3. Identifica al torque como la capacidad de una fuerza para hacer rotar a un sólido rígido. 4. Utiliza el producto vectorial para calcular el torque asociado a una fuerza con respecto a un eje de rotación fijo. 5. Evalúa las condiciones necesarias para que un sólido rígido se encuentre en equilibrio. 6. Realiza experimentos guiados para medir el torque y confirmar las condiciones de equilibrio de un sólido rígido. 7. Redacta resúmenes sobre los resultados experimentales obtenidos en su trabajo de laboratorio. 8. Cumple, según el rol asignado, las tareas y actividades comprometidas con su equipo, considerando formalidades de la entrega y organización del trabajo. 9. Planifica y presenta sus trabajos, basándose en sus capacidades, sin incurrir en plagio, copia, suplantación de identidad.

Unidad 5:
ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

1. **Elementos presentados en la clase anterior: Retroalimentación**

2. **Lo que viene:**
   - Torque asociado a una fuerza
   - Leyes de la Estática: Condiciones de Equilibrio para un Sólido Rígido

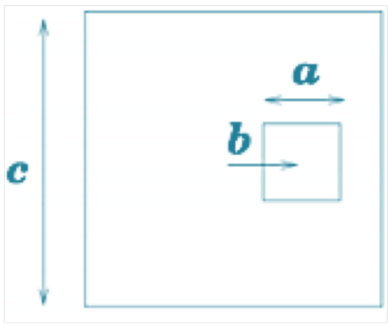
3. **Ejemplos**

4. **Problema Propuesto**

1. Introducción: Retroalimentación

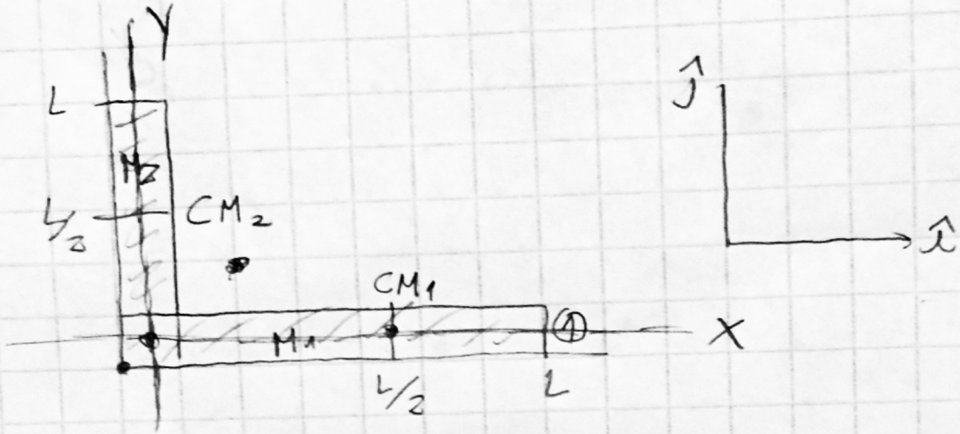
Otro Ejemplo de Cálculo de Centro de Masa

Determine el centro de masas de una placa cuadrada de masa uniforme y ancho c, la cual tiene un orificio cuadrado de ancho a. El centro del orificio dista b del centro de la placa.



1. Introducción: Retroalimentación

PRACTICO (SOLUCIÓN)



$$CM_x = \frac{M_1 \cdot L/2}{M_1 + M_2} = \frac{m \cdot L/2}{2m} = \frac{L}{4}\,\hat{j}$$

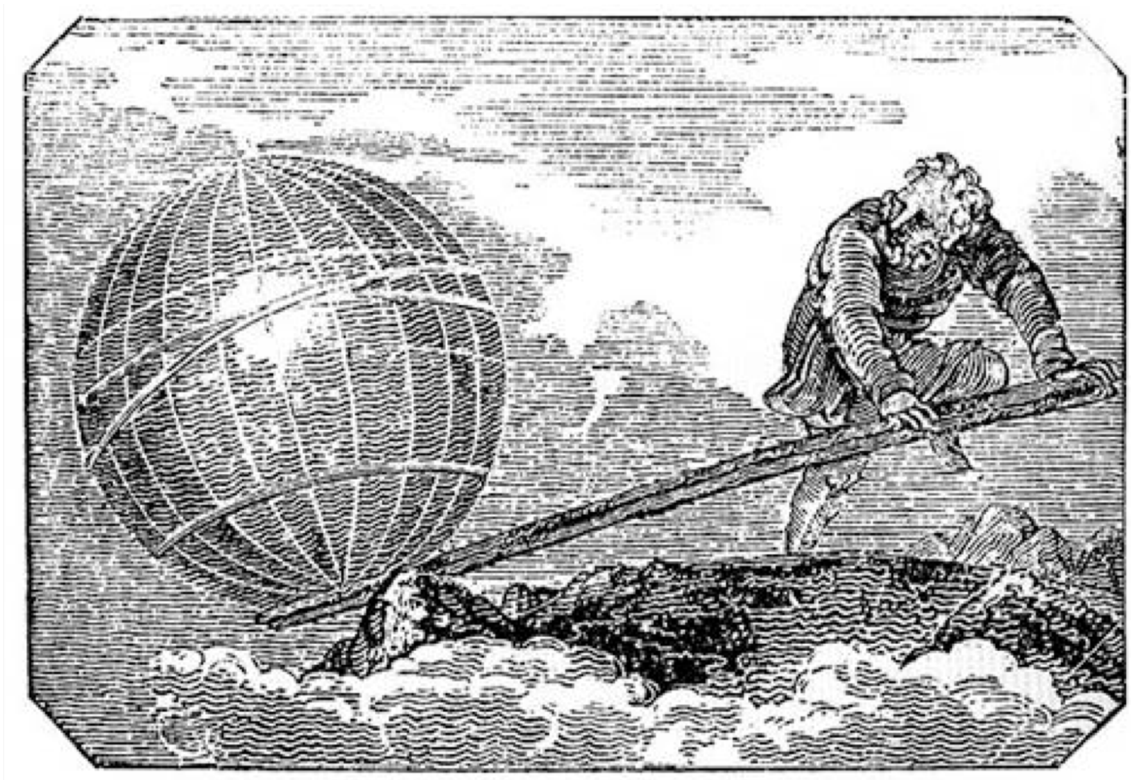
$$CM_y = \frac{M_2 \cdot L/2}{M_1 + M_2} = \frac{\cancel{m} \cdot L/2}{2\cancel{m}} = \frac{L}{4}\,\hat{i}$$

Se sabe por lo visto en clase que el CM de la Barra es $L/2$ además es homogenea

Por lo tanto el CM del sist se encuentra en el punto:

$$\left[\frac{L}{4}\,\hat{i},\ \frac{L}{4}\,\hat{j}\right]$$

1. Introducción: Contexto

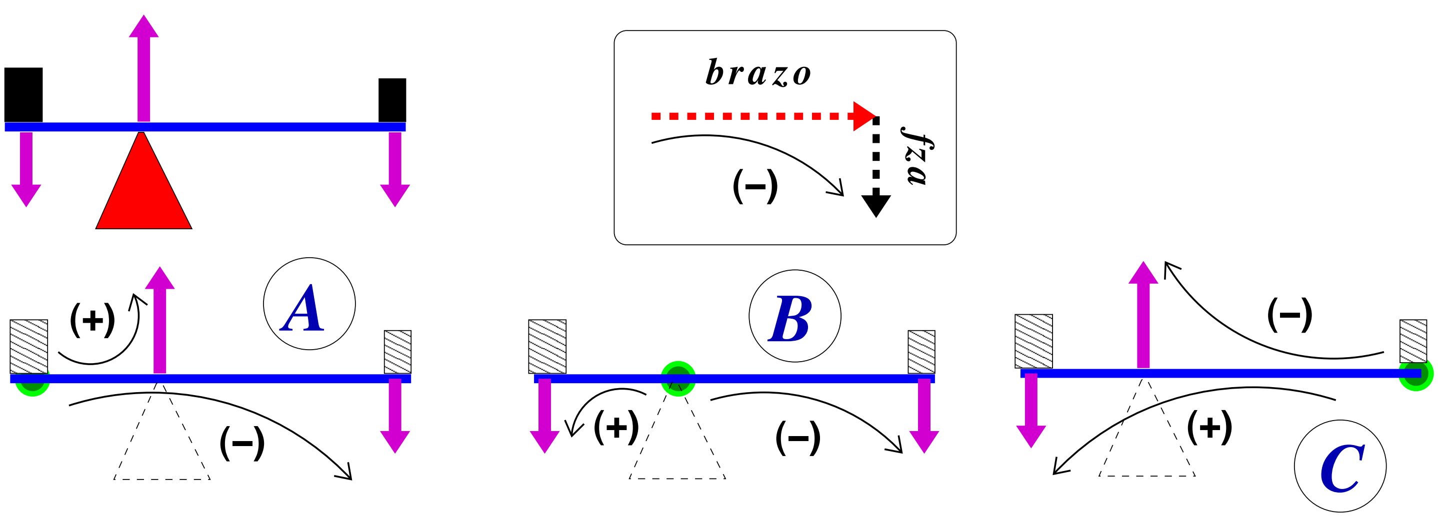


Grabado mostrando a Arquímedes levantando al mundo con una palanca (*Mechanics Magazine*, Londres 1824).

2. Torque de una Fuerza

Balancín equilibrado

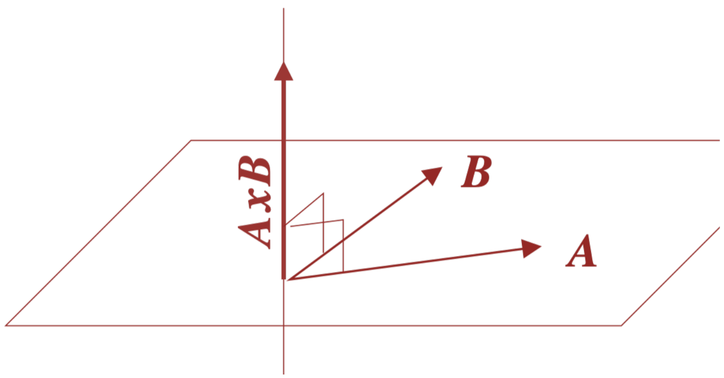
La barra horizontal tiene masa despreciable. Los bloques en los extremos forman parte del sistema.



Fuerzas externas?; Fuerzas internas?

2. Torque de una Fuerza

Producto Cruz: Definición



Sean $\acute{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores, entonces el elemento

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B},$$

es un vector cuya

- dirección es perpendicular a ambos, $\vec{A}$ y $\vec{B}$;
- magnitud es $AB\,\mathrm{sen}(\theta_{AB})$, con θ_{AB} el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$; y
- sentido se define según la *regla de la mano derecha*[4].

2. Torque de una Fuerza

Producto Cruz: Propiedades

1. $\vec{A}\times\vec{A}=0$, para todo $\vec{A}$;
2. $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$;
3. $\vec{A}\times(\lambda\vec{B})=\lambda(\vec{A}\times\vec{B})$; con λ un escalar;
4. $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$; $\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$; y $\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$;
5. $|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\operatorname{sen}\theta=A_{\perp}B=AB_{\perp}$, donde $A_{\perp}$ es la magnitud de la componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$.
6. $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$;
7. $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{C}\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{B}\vec{C})$

2. Torque de una Fuerza

Producto Cruz: Regla Nemotécnica

Regla nemotécnica para evaluar el producto cruz:
Consideremos el producto cruz entre dos vectores $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. El producto cruz $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es un vector. Sus componentes son complicadas, como vemos a continuación:

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)\,. \tag{4A.1}$$

Para recordarlas es conveniente escribir el vector $\vec{C}$ en forma de un determinante:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\,. \tag{4A.2}$$

cuya expansión nos entrega directamente la Ec. (4A.1).

2. Torque de una Fuerza

Se define el torque $\vec{\tau}_P$ ejercido por una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto P como

$$\vec{\tau}_P = \vec{r} \times \vec{F},$$

Donde $\vec{r}$ es el vector posición del punto P con origen en O.

El Torque representa la capacidad de producir un giro en cuerpo en torno al punto O

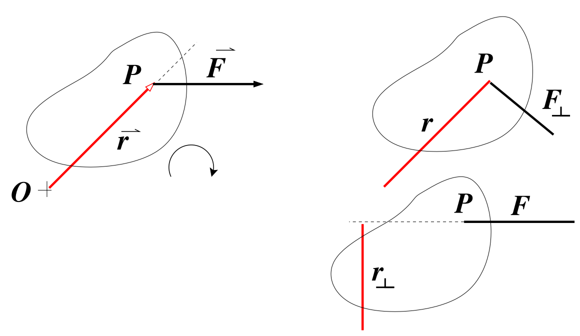


Figura 4A.4: Torque ejercido por una fuerza $\vec{F}$ en un punto P. $\vec{r}$ está medido desde el origen O.

2. Torque de una Fuerza

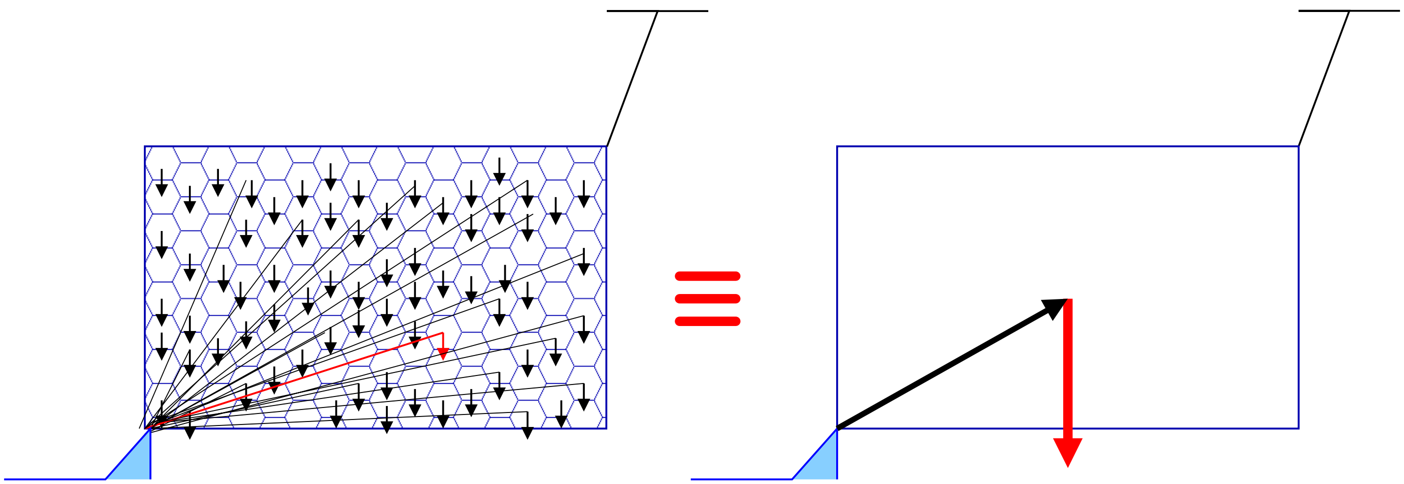
Torque debido a la Gravedad Terrestre

El torque en el sólido, debido a la gravedad, corresponde a la superposición de los torques, debidos a la gravedad, en cada una de los elementos de masa m_i que lo componen.

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \right)}_{M\vec{R}_{CM}} \times \vec{g} = \vec{R}_{CM} \times (M\vec{g}),$$

2. Torque de una Fuerza

Torque debido a la Gravedad Terrestre



$\sum \vec{r}_i x \vec{w}_i$ $\qquad$ $\vec{R}_{CM} x \vec{W}$

El torque del peso de un sólido es igual al torque ejercido por el peso del solido concentrado completamente en su centro de masas.

3. Leyes de la Estática

Los sólidos son un caso particular de los sistemas de partículas. Por lo tanto las propiedades de los sistemas de partículas son aplicables a los sólidos.

Para que el sistema esté en equilibrio estático se debe verificar que:

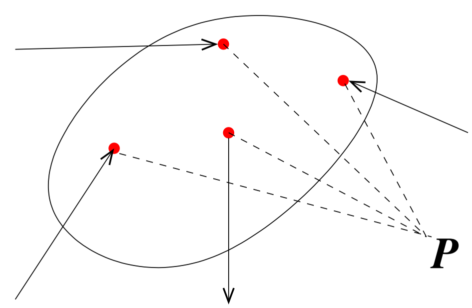
I.- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \vec{0}$;

II.- $\vec{\tau}_P(\vec{F}_1) + \vec{\tau}_P(\vec{F}_2) + \cdots + \vec{\tau}_P(\vec{F}_N) = \vec{0}$;

III.- $\vec{v} = \vec{0}$;

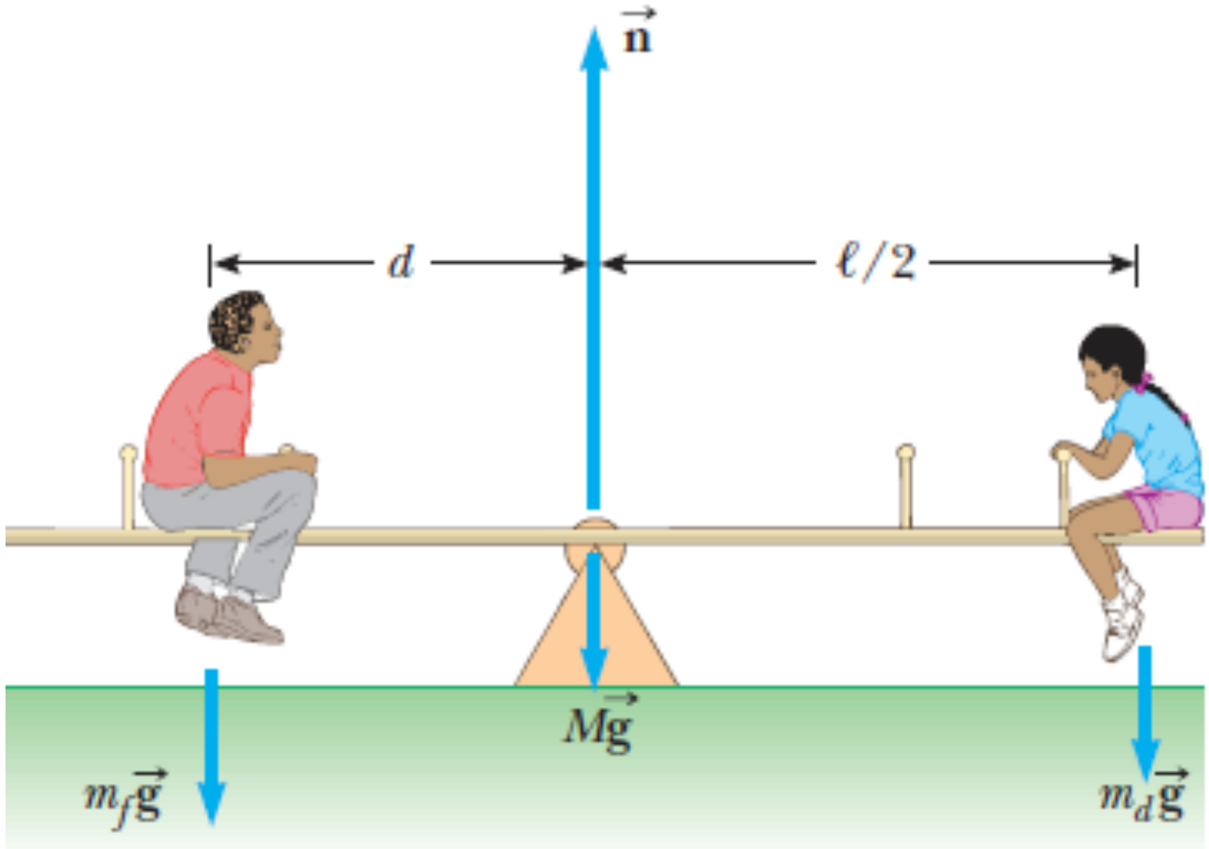
IV.- $\vec{\omega} = \vec{0}$,

donde hemos indicado explícitamente el punto P con respecto al cual se determinan los torques.



Sobre el sólido actúan N fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$. P representa el origen del sistema de coordenadas.

3. Leyes de la Estática

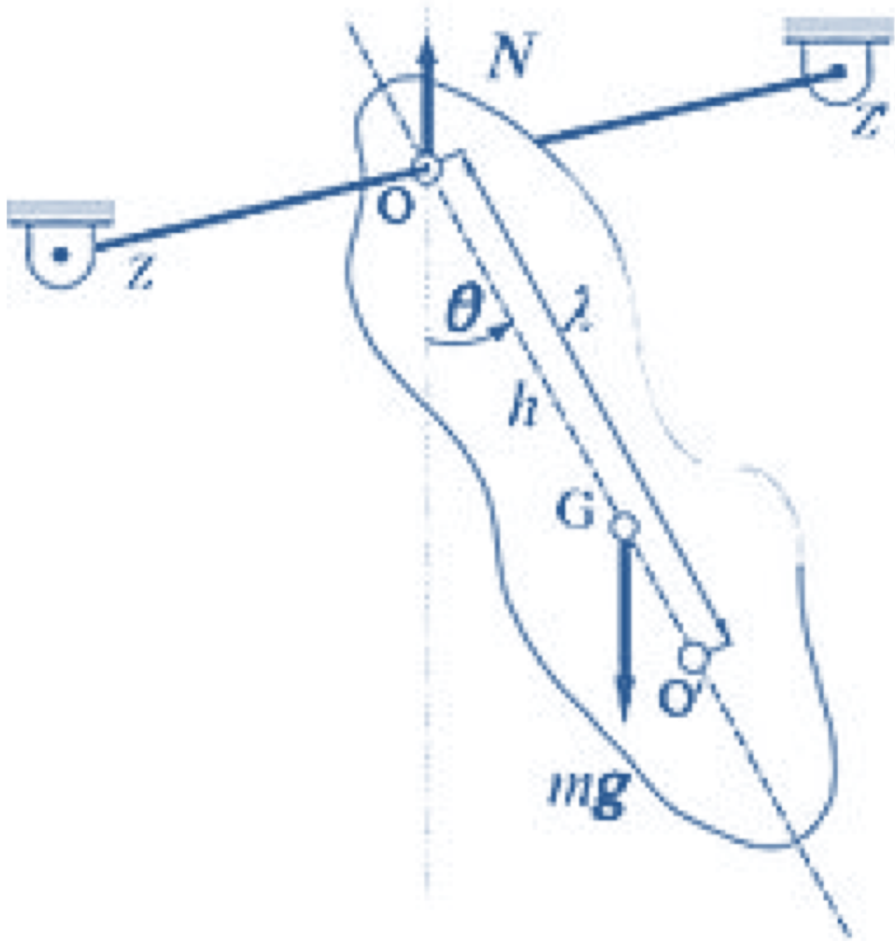


$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$
$$\vec{\omega} = \vec{0}$$

3. Leyes de la Estática

Una fuerza actuando sobre un sólido puede provocar rotación y puede provocar desplazamiento.



Unidad 5:
ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Programa desarrollado por la FCFM año 2019

CONTENIDOS	INDICADOR DE LOGRO
5.1. Descripción cinemática de un sólido rígido. • Determinación del centro de masas de un sólido rígido. • Momentum lineal de un sólido rígido. **5.2. Torque asociado a una fuerza.** • Producto vectorial entre dos vectores. **5.3. Condiciones de equilibrio para un sólido rígido.** • Equilibrio de fuerzas. • Equilibrio de torques.	El estudiante: 1. Determina la posición, velocidad y aceleración del centro de masas de sólidos rígidos con simetrías espaciales. 2. Describe el momentum lineal de un sólido rígido en términos de la velocidad de su centro de masas. 3. Identifica al torque como la capacidad de una fuerza para hacer rotar a un sólido rígido. 4. Utiliza el producto vectorial para calcular el torque asociado a una fuerza con respecto a un eje de rotación fijo. 5. Evalúa las condiciones necesarias para que un sólido rígido se encuentre en equilibrio. 6. Realiza experimentos guiados para medir el torque y confirmar las condiciones de equilibrio de un sólido rígido. 7. Redacta resúmenes sobre los resultados experimentales obtenidos en su trabajo de laboratorio. 8. Cumple, según el rol asignado, las tareas y actividades comprometidas con su equipo, considerando formalidades de la entrega y organización del trabajo. 9. Planifica y presenta sus trabajos, basándose en sus capacidades, sin incurrir en plagio, copia, suplantación de identidad.

Unidad 5:
ESTÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

1. **Introducción:**

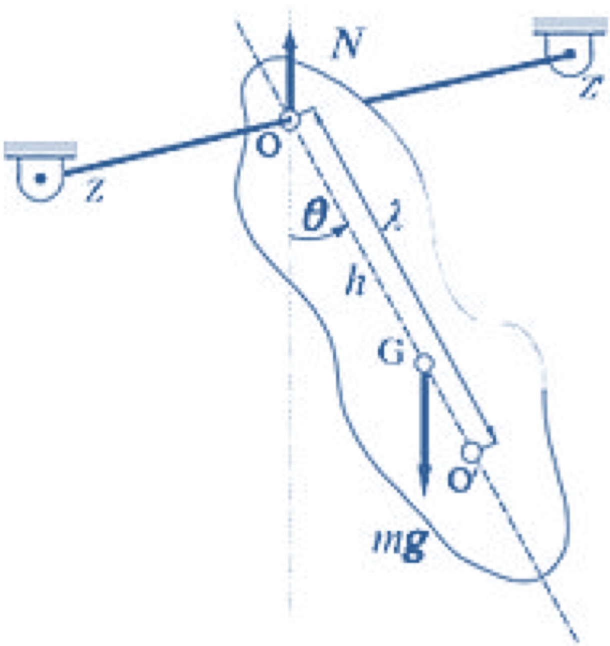
- Clase Anterior: Condiciones de Equilibrio para un Sólido Rígido. Leyes de la Estática
- Retroalimentación

2. **Ejemplos**

3. **Práctico**

1. Leyes de la Estática

Una fuerza actuando sobre un sólido puede provocar rotación y puede provocar desplazamiento.



3. Leyes de la Estática

Los sólidos son un caso particular de los sistemas de partículas. Por lo tanto las propiedades de los sistemas de partículas son aplicables a los sólidos.

Para que el sistema esté en equilibrio estático se debe verificar que:

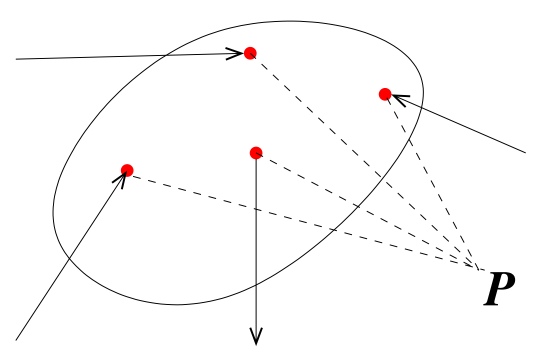
I.- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \vec{0}$;

II.- $\vec{\tau}_P(\vec{F}_1) + \vec{\tau}_P(\vec{F}_2) + \cdots + \vec{\tau}_P(\vec{F}_N) = \vec{0}$;

III.- $\vec{v} = \vec{0}$;

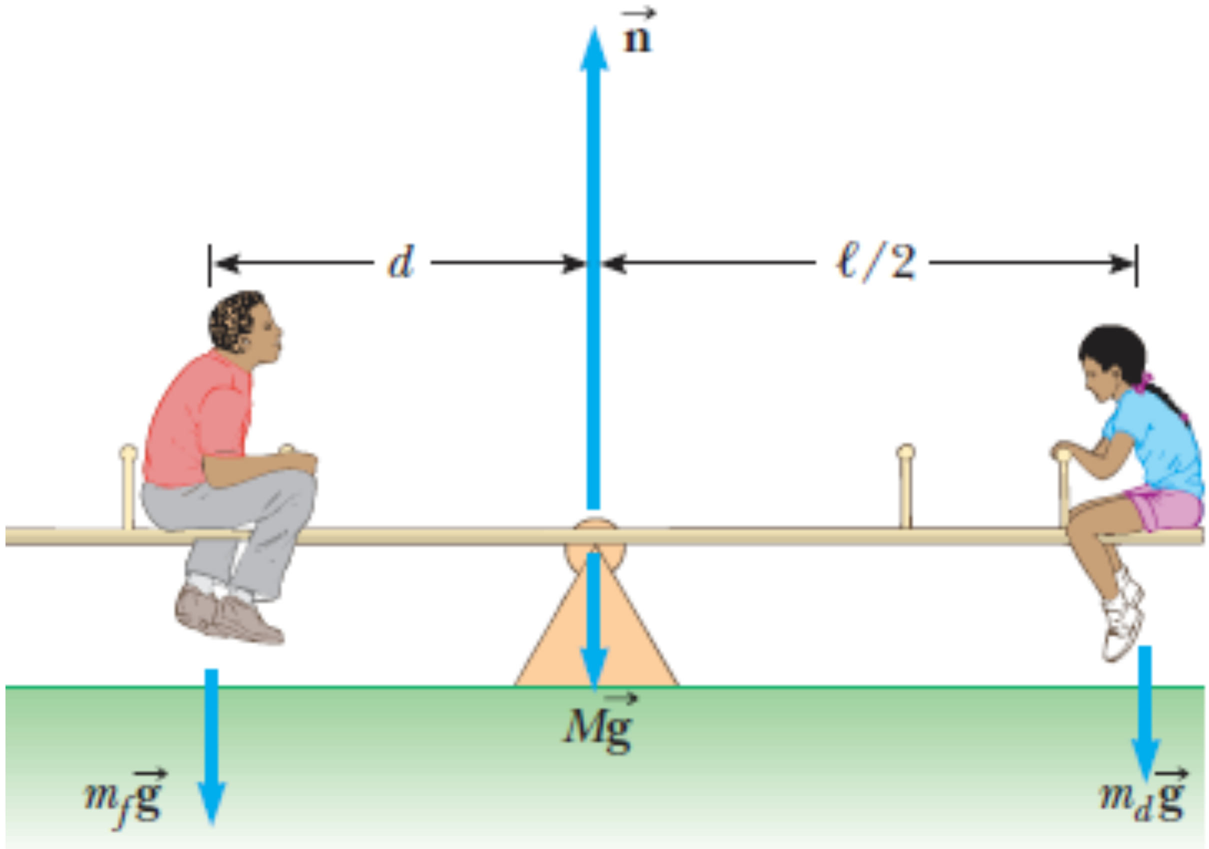
IV.- $\vec{\omega} = \vec{0}$,

donde hemos indicado explícitamente el punto P con respecto al cual se determinan los torques.



Sobre el sólido actúan N fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$. P representa el origen del sistema de coordenadas.

3. Leyes de la Estática

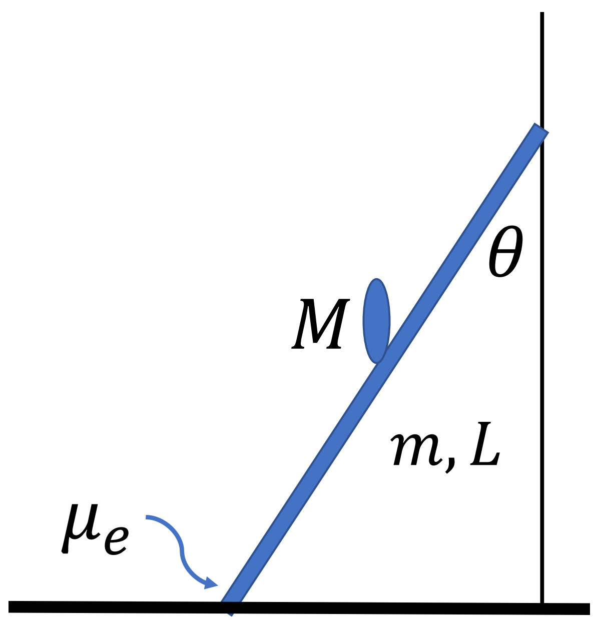


$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = \vec{0} \qquad \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{0} \\ \vec{\omega} &= \vec{0} \end{aligned}$$

2. Ejemplo

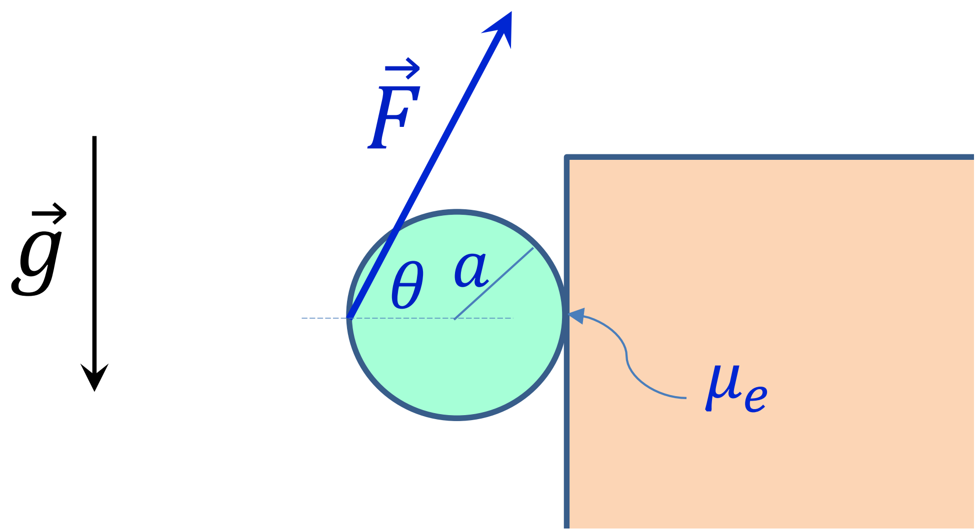
Una escalera de masa m y largo L está apoyada en una pared pulida, con la cual forma un ángulo θ, como muestra la figura.

Si sobre la escalera se ubica una persona de masa M, encuentre el mínimo valor de μ_e que debe existir entre el suelo y la escalera para que ésta no resbale, para cualquier altura a la que se encuentre la persona.



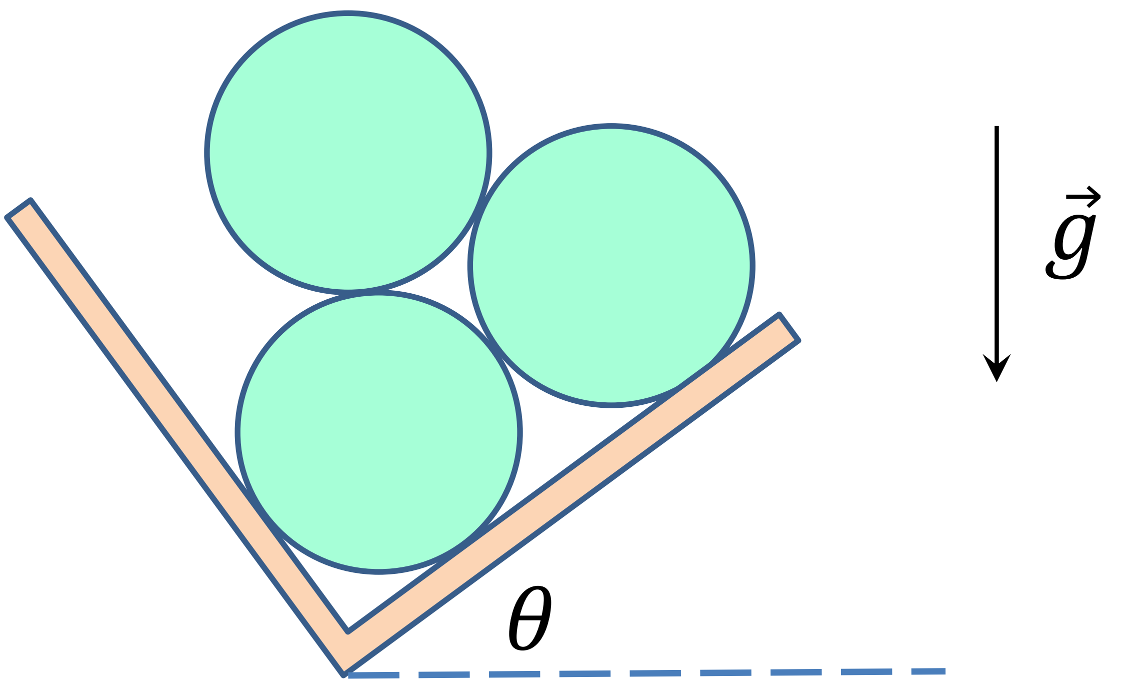
2. Ejemplo

Un cilindro de masa m y radio a está en contacto con una pared vertical con la que existe un roce estático de coeficiente μ_e. Sobre el cilindro se aplica una fuerza F (desconocida) formando un ángulo θ con la horizontal, como muestra la figura. Calcule la fuerza F y el mínimo valor de μ_e tales que el cilindro se mantenga en equilibrio.



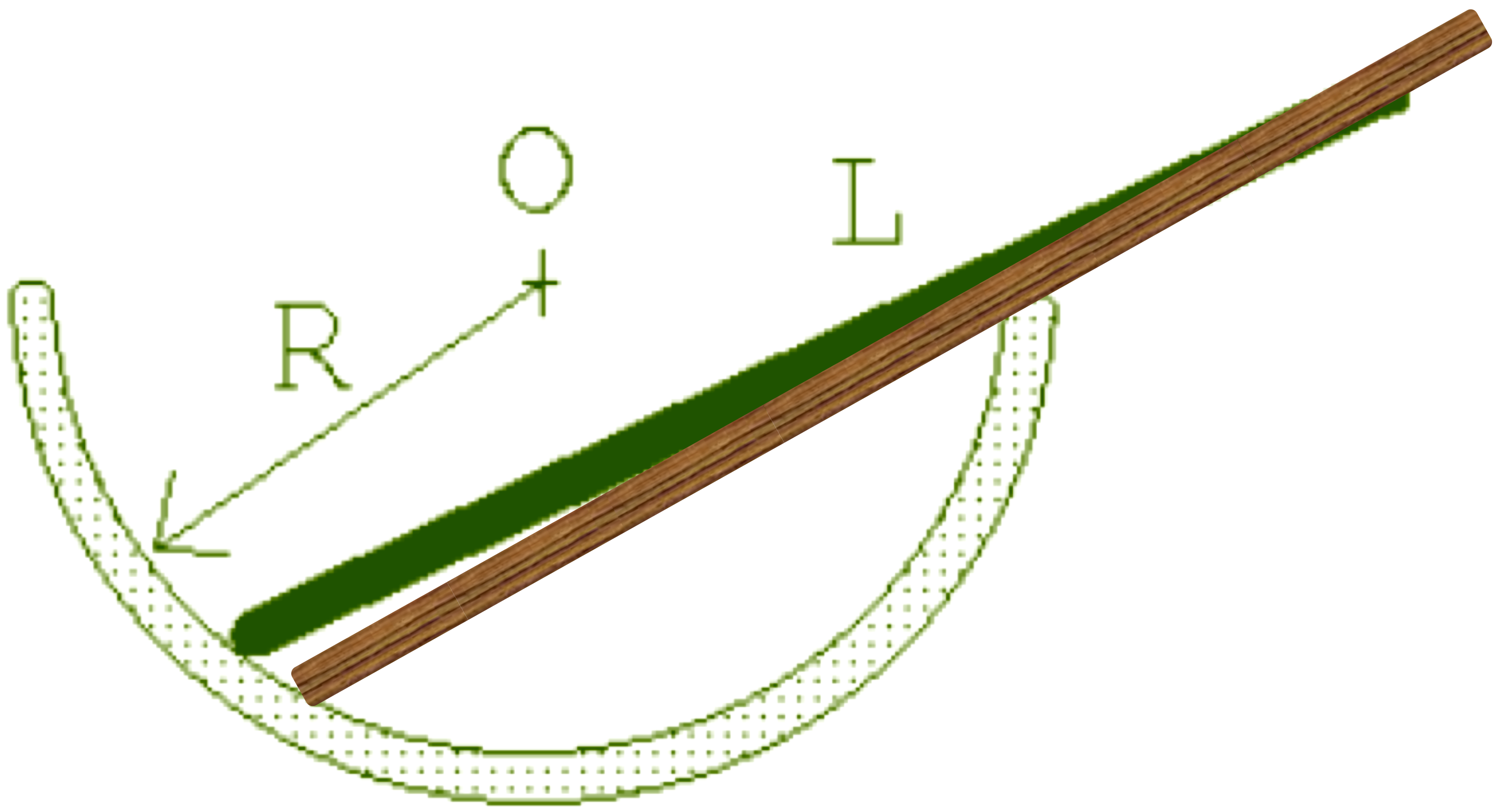
2. Ejemplo

Los tres cilindros, de masa M y radio R, son idénticos y están en equilibrio. Sin embargo, si el ángulo θ decrece, existe un valor θ^*para el cual los cilindros comienzan a rodar. Despreciando todo tipo de roces, encuentre el valor del ángulo θ^*



2. Ejemplo

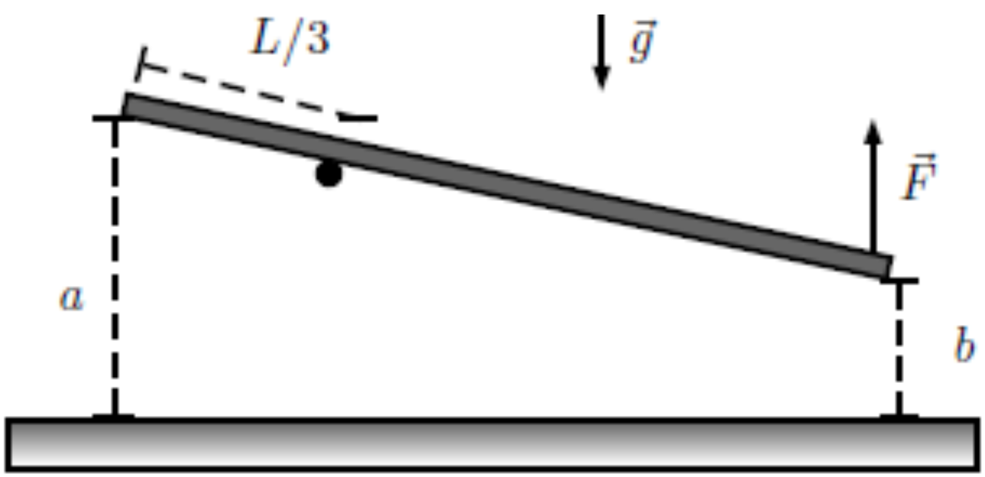
Encuentre la posición de equilibrio de una varilla de largo L y masa m, colocada dentro de un pocillo semi-esférico de radio R. Todos los roces son despreciables.



2. Ejemplo

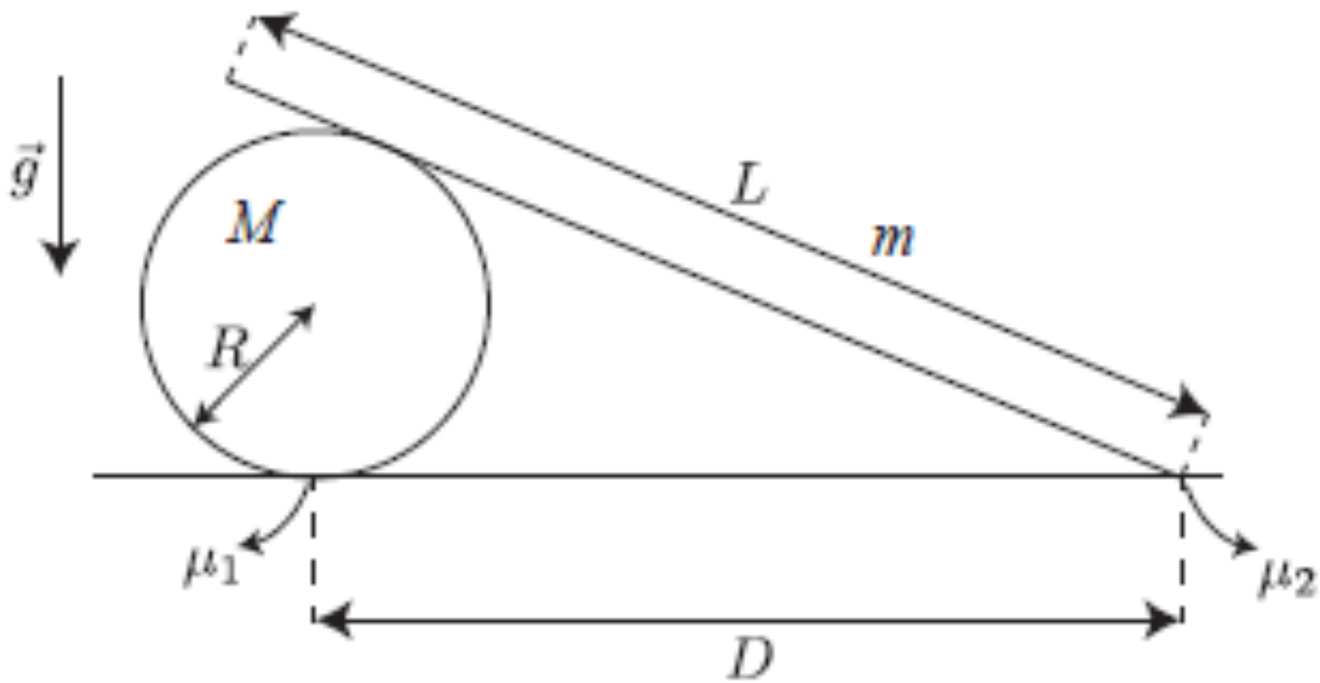
Se tiene una barra homogénea de masa M y largo L, que se sostiene en un pivote a una distancia L/3 de su extremo izquierdo. Su extremo izquierdo está a una altura a desde el piso, mientras que su extremo derecho está a una altura b, con a > b como se muestra en la figura. En el extremo derecho de la barra se ejerce una fuerza de magnitud F en el sentido vertical.

- Calcule la magnitud F de la fuerza para que la barra esté en equilibrio estático.
- Si se comienza a mover la barra sin variar su inclinación, ¿Cuánto debe desplazarse para que la magnitud de la fuerza ejercida sea F=Mg/2?
- Desde la configuración inicial, piense que ahora la barra no se desplaza pero varía el ángulo de inclinación, calcule el ángulo para que la fuerza sea igual que en la parte b



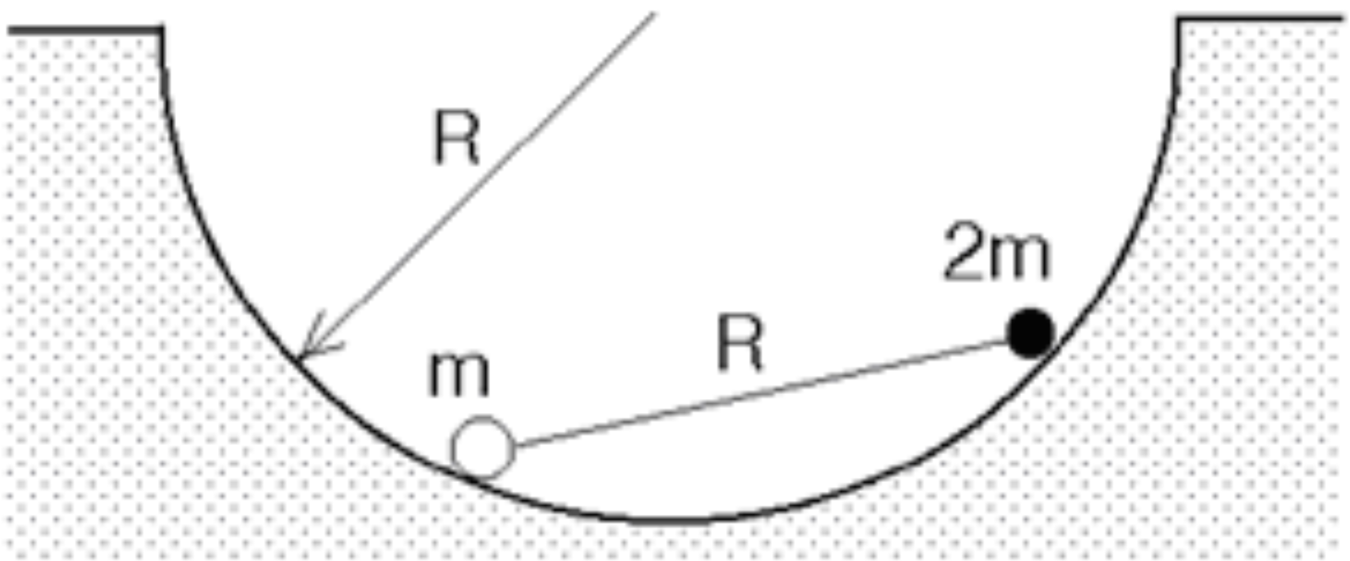
2. Ejemplo

Una tabla de longitud L y masa m reposa sobre un cilindro de radio R y masa M, como se muestra en la figura. La distancia horizontal entre el punto de apoyo de la tabla en el suelo y el centro del cilindro es D. Entre el suelo y el cilindro hay un coeficiente de roce estático u1. Entre el suelo y la tabla el coeficiente de roce estático es u2. Entre el cilindro y la tabla no hay roce. ¿Cuáles son los valores mínimos de u1 y u2 para que el sistema esté en equilibrio estático?



2. Ejemplo

En los extremos de una barra de masa despreciable se adhieren bolas de masa m y 2m, respectivamente. El sistema posa sobre un tiesto de fondo esférico resbaloso, de radio igual al largo de la barra. Calcule el ángulo que la barra forma con la vertical y la distancia desde el suelo hasta el centro de masa de la configuración.



3. Práctico

Una viga horizontal, uniforme, de largo L y masa M está unida a una pared mediante una junta articulada. Su extremo lejano está sostenido por un cable que forma un ángulo θ con la viga, y una persona de masa m está parada a una distancia l de la pared.

a) Identifique todas las fuerzas externas sobre la viga

b) Si el sistema está en reposo, encuentre la tensión en el cable y la fuerza que ejerce la pared a la viga.