▷ Ejercicios de teoria de Ondas planas (Tema 2)

Ejercicio teórico 1

a) Sabiendo que el vector de Poynting se define como el producto vectorial de $\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)\wedge\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)$ y sabiendo la indentidad matemática $\nabla\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})=\vec{b}\cdot(\nabla\wedge\vec{a})-\vec{a}(\nabla\wedge\vec{b})$ encuentra que:

$$-\oint\!\!\!\oint_{S_{V_0}}\vec{S}(\vec{r},t)\,d\vec{s}=\sigma\iiint_{V_0}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)\vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t)\,dv'+\iiint_{V_0'}\left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}+\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\right)dv'$$

(2.5p)

b) Que hipótesis hacemos para escribir el teorema Poynting en forma:

$$-\oint\!\!\!\oint_{S_{V_0}}\vec{S}(\vec{r},t)\,d\vec{s}=\sigma\iiint_{V_0}|\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)|\,dv'+\frac{1}{2}\iiint_{V_0}\left(\mu\partial_t|\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)|^2+\varepsilon\partial_t|\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)|^2\right)dv'$$

Nota que ayuda: $\vec{A}\cdot\partial_t\vec{A}=A_x\partial_t A_x+A_y\partial_t A_y+A_z\partial_t A_z=\frac{1}{2}\partial_t|\vec{A}|^2$

$\vec{A}\equiv$ Cualquier vector

(2.5p)

c) Cual es la interpretación física del teorema de Poynting (5p)

Ejercicio teórico 2

a) Dado un campo eléctrico de la forma $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\vec{E}(\vec{r})\, e^{j\omega t})$ y otro magnético $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}(\vec{\tilde{H}}(\vec{r})\, e^{j\omega t})$

Demuestra que: $\vec{S}_{AV}(\vec{r}) = \langle \vec{\mathcal{S}}(\vec{r},t) \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{\tilde{E}}(\vec{r}) \wedge \vec{\tilde{H}}^{*}(\vec{r})\right)$

Ayuda: $\frac{1}{2}(\tilde{A} + \tilde{A}^{*}) = \mathrm{Re}(\tilde{A})$

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f(t')\,dt' \qquad (4p)$$

b) ¿Que diferencia hay entre $\vec{\mathcal{S}}(\vec{r},t)$ y $\vec{S}_{AV}(\vec{r})$? Explica tu respuesta. (6p)

Ejercicio teórico 3

a) A partir de las ecuaciones de Maxwell, deduce la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \mu\left(\sigma \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)}{\partial t^2}\right) \qquad (5p)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \mu\left(\sigma \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)}{\partial t^2}\right)$$

Explica todas las hipótesis que has hecho para llegar hasta aquí.

Ayuda $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$: Identidad matemática

b) Si el campo eléctrico es de la forma:

$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = Re(\tilde{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t})$ y el magnético es $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = Re(\tilde{\vec{H}}(\vec{r})e^{j\omega t})$, determina que:

(5p) $\begin{cases} \nabla^2 \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = \gamma^2 \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) \\ \nabla^2 \tilde{\vec{H}}(\vec{r}) = \gamma^2 \tilde{\vec{H}}(\vec{r}) \end{cases}$ donde $\gamma = \sqrt{\mu j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)}$

Ejercicio teórico 4

Se tiene una onda plana cuyo campo eléctrico es $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = Re(\tilde{E}_z(x)e^{j\omega t})\hat{y}$. Se sabe que la onda se propaga en el eje X.

a) Empleando la ley de Faraday comprueba que

$\tilde{H}_z(x) = \frac{-1}{j\omega\mu}\partial_z \tilde{E}_y(x)$ (1p)

b) Demuestra que $\begin{cases} \tilde{E}_y(x) = \tilde{E}_+ e^{-\gamma x} + \tilde{E}_- e^{\gamma x} \\ \tilde{H}_z(x) = \tilde{H}_+ e^{-\gamma x} + \tilde{H}_- e^{\gamma x} \end{cases}$ es

solución de $\begin{cases} \nabla^2 \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = \gamma^2 \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) \\ \nabla^2 \tilde{\vec{H}}(\vec{r}) = \gamma^2 \tilde{\vec{H}}(\vec{r}) \end{cases}$ (2p)

c) Empleando la relación $\frac{\tilde{E}_+}{\tilde{E}_-}$ determina que la impedancia característica de un medio es

$\tilde{\eta} = \left(\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}\right)^{1/2}$ (3p)

d) Dados los campos $\begin{cases} \tilde{E}_y(x) = \tilde{E}_+ e^{-\gamma x} + \tilde{E}_- e^{\gamma x} \\ \tilde{H}_z(x) = \frac{\tilde{E}_+}{\eta}e^{-\gamma x} - \frac{\tilde{E}_-}{\eta}e^{\gamma x} \end{cases}$

Calcula $\vec{S}_{AV}(x)$ ¿A que conclusión llegas?

Ayuda: $\vec{S}_{AV}(\vec{r}) = \frac{1}{2} Re\left(\tilde{\vec{E}}(\vec{r}) \times \tilde{\vec{H}}^*(\vec{r})\right)$

Restringe tu respuesta al sentido de propagación de la onda (2.0p)

d) Empleando la solución dada en el apartado anterior y que:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = Re\left(\tilde{E}_y(x)\, e^{j\omega t}\, \hat{y}\right)$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = Re\left(\tilde{H}_z(x)\, e^{j\omega t}\, \hat{z}\right)$$

Reduce que

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \left(E_+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta_+ - \beta x) + E_- e^{\alpha x} \cos(\omega t + \theta_- + \beta x)\right)\hat{y}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \left(\frac{E_+}{|\eta|} e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \theta_+ - \theta_\eta - \beta x) - \frac{E_-}{|\eta|} \cos(\omega t + \theta_- - \theta_\eta + \beta x)\right)\hat{z}$$

Explica un poco los pasos dado (1p)

e) Desde el punto de vista físico y centrandonos en la energía asociada a una onda electromagnética $W_e = \frac{1}{2}\varepsilon|\vec{\mathcal{E}}|$ y $W_m = \frac{1}{2}\mu|\vec{H}|^2$, ¿qué podemos decir de una onda plana? (1p)

Ejercicio teórico 5

a) En un medio sin perdidas tenemos una onda plana propagandose hacia la derecha en el eje x

$$\vec{\mathcal{E}}(x,t) = E_+ \cos(\omega t + \theta^+ - \beta x).$$

Empleando el argumento de esta solución de la ecuación de ondas deduce que la velocidad de fase es: $V_f = \frac{w}{B}$ (1p)

b) ¿Por qué $V_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$? (1p)

c) ¿Por qué en un dieléctrico perfecto en general la velocidad de fase de una onda plana es menor que en el vacío? (0.5p)

d) ¿Como sería la longitud de onda en un medio de $\varepsilon_r = 2.5$ y $\mu_r = 1$ para una señal de frecuencia υ? Expresa tus conclusiones en relacción al vacío (0.5p)

e) Si dos ondas electromagnéticas que viajan en medios materiales sin pérdidas pero con diferentes permitividades eléctricas y permeabilidades magnéticas posee igual longitud de onda ¿Qué podemos decir de estas ondas? ¿Por qué? (0.5p)

f) El Mar de Galilea es un lago de agua dulce con una permitividad electrica $\varepsilon_r = 35$ y una conductividad de $0.8 \frac{S}{m}$. El Mar muerto posee una gran salinidad y por consiguiente $\varepsilon_r = 53$ y $\sigma = 7.2 \frac{S}{m}$. Se tiene una onda plana que incide normalmente sobre ambos lagos. Comparativamente hablando ¿Que diferencia de profundidad es lograda cuando la amplitud disminuye en 120dB? Resolver el problema para una frecuencia de 1MHz. (4.5p)

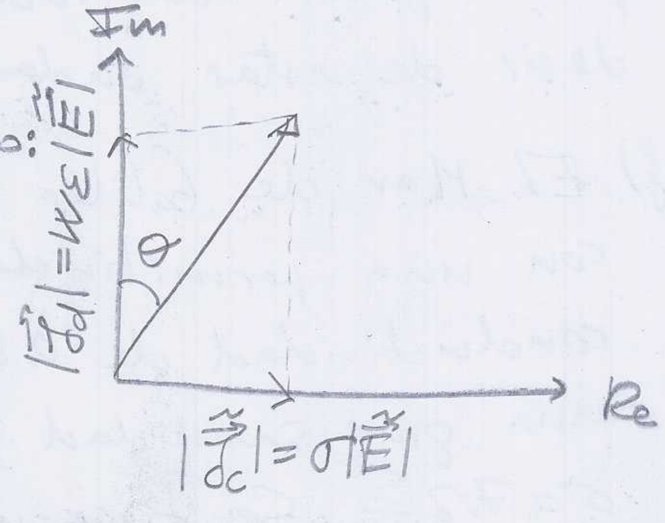
Nota: En ambos caso $\mu_r = 1$

g) ¿En cual de los dos (Mar Muerto o Mar de Galilea) se alcanzaria antes la profundidad a la cual la amplitud ha caido 120dB? ¿Por qué? (2p)

Ejercicio teórico 6

a) ¿Como se define la piel o profundidad de penetración de una onda electromagnetica en un medio material con $\sigma \neq 0$? ¿Cual es el rol de la frecuencia en la profundidad de penetración? (1p)

b) Tenemos el siguiente gráfico:



¿Qué es $\vec{J}_d$? ¿Qué es $\vec{J}_c$?

¿Que es la tangente de Perdidas y para que sirve? (2p)

c) Si la permitividad eléctrica compleja es $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(1 - j\tan\theta)$ y también $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - \varepsilon'' j$ demuestra que la tangente de pérdidas puede ser

$$\tan\theta = \frac{\sigma}{w\varepsilon} \text{ y también } \tan\theta = \frac{\sigma + \varepsilon'' w}{\varepsilon' w} \quad (2P)$$

d) Si $\tan\theta << 1$, demuestra que

$$\gamma = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + jw\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{\sigma^2}{8(\varepsilon w)^2}\right) \quad (2p)$$

Ayuda: Cuando $z \to 0$ se puede escribir que

$$\sqrt{z+1} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \cdots$$

e) Deduce que $\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{1 - j\tan\theta}}$ (1.5p)

f) Si en el apartado anterior e) se tiene que $\tan\theta << 1$ verifica que:

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\left(1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{w\varepsilon}\right)^2\right) + j\left(\frac{\sigma}{2w\varepsilon}\right)\right] \quad (1.5p)$$

Ayuda: Cuando $z \to 0$ se tiene $\frac{1}{\sqrt{1+z}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{3z^2}{8}$

Ejercicio teórico 7

a) Se tiene un buen conductor $\tan\theta >> 1$

Considerando que cuando $z \to 0$ se puede aproximar

$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8}$ verifique que

$$\alpha = \sqrt{\sigma\mu w}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(w\varepsilon)^2}{8\sqrt{2}\sigma^2} - \frac{w\varepsilon}{2\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (1.5p)$$

$$B = \sqrt{\sigma\mu w}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{w\varepsilon}{2\sqrt{2}\sigma} + \frac{w\varepsilon}{8\sigma^2\sqrt{2}}\right)$$

b) Compruebe que en ese caso $\tilde{\eta} \simeq \sqrt{\frac{\mu w}{2\sigma}}\left(\left(1+\frac{\tan\theta}{2}\right)+j\left(1-\frac{\tan\theta}{2}\right)\right)$
(1.5p)

c) Porque en el caso de tener un muy buen conductor podemos escribir $\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu w}{2\sigma}}(1+j)$

$$\alpha = B \simeq \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}} \quad (1.5p)$$

d) ¿Cual es el significado de medio que dispersa energia por rotación dipolar? ¿Cual es la diferencia con un medio que dispersa energia sólo por arrastre? ¿Puede haber medios que dispersen energia por ambos efectos? En caso afirmativo, ¿como seria γ, la constante de onda para un medio que dispersa energia por ambos mecanismos? (1.5p)

e) Existen medios magnéticos dispersivos y se define una tangente de pérdidas para ellos. Explica que es un medio magnético dispersivo y como se define la tangente de pérdidas para estos medios (1.5p).

f) Si la constante de onda de un medio material es de la forma:

$$\gamma = \sqrt{w(\mu''(\sigma + \varepsilon'' w) - w\varepsilon'\mu') + j(\mu'(\sigma + \varepsilon'') + \varepsilon'\mu'')}$$

¿Que tipo de dispersión presenta este medio? (1.5p)

g) Imaginate que la carga magnética existe. Supón un medio LHI cuya conductividad magnética es σ^*. Si la tangente de pérdidas de ese medio fuese

$$\tan\theta = \frac{w\mu'' + \sigma^*}{w\mu'}$$

, ¿Que tipo de pérdidas presenta ese medio? (1p)

Ejercicio teórico 8

a) Enuncia él principio de composición de ondas planas o principio de superposición de estas (2p)

b) Tenemos la siguiente onda plana evanescente

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = Re\left(\left(E_+ e^{-\alpha x} e^{j(\theta_+ - \beta x)} + E_- e^{\alpha x} e^{j(\theta_- + \beta x)}\right) e^{j\omega t}\right) \hat{y}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = Re\left(\left(\frac{E_+}{\eta} e^{-\alpha x} e^{j(\theta_+ - \beta x - \theta_\eta)} - \frac{E_-}{\eta} e^{\alpha x} e^{j(\theta_- + \beta x - \theta_\eta)}\right) e^{j\omega t}\right) \hat{z}$$

Demuestra que $\vec{S}_{AV}(\vec{r}) = \frac{\hat{x}}{2\eta}\left[\left(E_+^2 e^{-2\alpha x} - E_-^2 e^{2\alpha x}\right)\cos\theta_\eta\right.$

$\left.-2E_+ E_- \sin(\theta_- + \theta_+ + 2\beta x)\sin\theta_\eta\right]$. (2p)

c) Una onda viajera es la composición de dos ondas

Onda 1: $\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_I(\vec{r},t) = E_{I0}\cos(\omega t - \beta x)\,\hat{y} \\ \vec{\mathcal{H}}_I(\vec{r},t) = \dfrac{E_{I0}}{\eta}\cos(\omega t - \beta x)\,\hat{z} \end{cases}$

Onda 2: $\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_{II}(\vec{r},t) = E_{II0}\cos(\omega t - \beta x + \theta)\,\hat{z} \\ \vec{\mathcal{H}}_{II}(\vec{r},t) = -\dfrac{E_{II0}}{\eta}\cos(\omega t - \beta x + \theta)\,\hat{y} \end{cases}$

Obtener: $\dfrac{E_y^2}{E_{I0}^2} + \dfrac{E_z^2}{E_{II0}^2} - \dfrac{2E_y E_z}{E_{I0}E_{II0}}\cos\theta = \sin^2\theta$ (5p)

Donde $E_y = E_{I0}\cos(\omega t)$ $E_z = E_{II0}\cos(\omega t + \theta)$

d) Cual es el significado en terminos de polarización de la luz de la ecuación

$$\frac{E_y^2}{E_{I0}^2} + \frac{E_z^2}{E_{II0}^2} - 2\frac{E_y E_z}{E_{I0} E_{II0}} \cos\theta = \sin^2\theta \qquad (1p)$$

Ejercicio teórico 9

a) ¿Que es luz polarizada elíptica levógira? ¿Y dextrogira? ¿Cuando tendremos polarización circular? (1.5p)

b) ¿Por qué en una superposición de ondas de diferente frecuencia definimos la velocidad de grupo? (1.5p)

c) Un barítono-tenor esta en un estudio de radio cantando. La frecuencia de su voz es de 50Hz, haciendo la consideración de tono promedio. La electrónica recibe esos 50 Hz y queremos emitir por la radio. ¿Que consideraciones harías? Considera que quieres emitir en AM. (1.5p)

d) La siguiente expresión: $V_g = V_f - \lambda_0 \frac{dV_f}{d\lambda}$ relaciona la velocidad de grupo V_g con la velocidad de fase V_f

λ_{ol} → es la longitud de onda del oscilador local.

En una señal de amplitud modulada el campo electrico sería

$$\vec{E}(\vec{r},t) = 2E_{sig}\hat{y}\cos(\Delta\omega t - x\Delta\beta)\cos(\omega_{ol} - x\beta_{ol})$$

Deduce la expresión que relaciona V_g con V_f. (2p)

e) Que pasa si $V_g > V_f$ (0.5p)

10) Ejercicio teórico

a) Explica que es el ancho espectral de un paquete de ondas (2.5p)

b) Cuando una onda plana incide de forma normal en una interfaz que separa dos medios de diferente impedancia se tienen dos coeficientes:

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\tilde{\eta}_2 - \tilde{\eta}_1}{\tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2} : \text{coeficiente de reflexión}$$

$$\tilde{T} = \frac{2\tilde{\eta}_1}{\tilde{\eta}_2 + \tilde{\eta}_1} : \text{coeficiente de transmisión}$$

Deducelos (3p)

c) Se tiene una onda incidente que se propaga en un medio de impedancia intrínseca η_1

$$\vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r},t) = Re\left(\tilde{E}_{in}\hat{y}\, e^{j\omega t + \gamma_1 x}\right)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{in}(\vec{r},t) = Re\left(\frac{\tilde{E}_{in}}{\tilde{\eta}_1}\hat{z}\, e^{j\omega t - \gamma_1 x}\right)$$

Tras incidir en la interface que separa el medio de η_1 de otro de η_2 de forma perpendicular se obtienen dos ondas, una reflejada y otra trasmitida:

Onda reflejada: $\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_{re}(\vec{r},t) = Re\left(\tilde{\Gamma}\tilde{E}_{in}\hat{y}\, e^{j\omega t + \gamma_1 x}\right) \\ \vec{\mathcal{H}}_{re}(\vec{r},t) = Re\left(\frac{-\tilde{\Gamma}}{\tilde{\eta}_1}\tilde{E}_{in}\hat{z}\, e^{j\omega t + \gamma_1 x}\right) \end{cases}$

Onda trasmitida: $\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_{tr}(\vec{r},t) = Re\left(\tilde{E}_{in}\tilde{T} e^{j\omega - \gamma_2 x}\right)\hat{y} \\ \vec{\mathcal{H}}_{tr}(\vec{r},t) = Re\left(\frac{\tilde{E}_{in}\tilde{T}}{\eta_2} e^{j\omega - \gamma_2 x}\right)\hat{z} \end{cases}$

Verifica que: $\begin{cases} \vec{S}_{re,AV}(\vec{r}) = -\frac{|E_{in}|^2|\Gamma|^2}{2}\hat{x}\, e^{+2\alpha_1 x}\, Re\left(\frac{1}{\eta_1^*}\right) \\ \vec{S}_{tr,AV}(\vec{r}) = \frac{|E_{in}|^2|T|^2}{2}\hat{x}\, e^{-2\alpha_2 x}\, Re\left(\frac{1}{\eta_2^*}\right) \end{cases}$

(1.5p)

d) En una zona sísmica se desea establecer una relacción entre la actividad magnética terrestre y la incidencia en los eventos sismográficos

Para ello se situan sondas sísmicas en el lecho marino. Las sondas estan separadas 20km las unas de las otras, cubriendo un area enorme. La única forma de monitorizar el sistema es mediante satélite. Como los ingenieros saben que la amplitud de las comunicaciones electromagnéticas en el agua marina sufren dispersión se conecta un cable a las sondas que posiciona las antenas de intercambio de datos con el satelite en una elevación rocosa submarina que posiciona a las mismas a tan solo 10m de profundidad. No se usan bollas de superficie porque se trata de una zona con tremendas corrientes. Para facilitar las comunicaciones se emplean bajas frecuencias 280KHz. Las antenas emiten con una potencia de $5\frac{KW}{m^2}$ y estan protegidas con un radomo especial que permite transferir toda esa potencia desde la antena al medio acuoso. En la zona donde las antenas se ubican las caracteristicas del agua son ($\varepsilon_r = 47$, $\mu_r = 1.05$, $\sigma = 4.2\frac{S}{m}$). Fuera del mar supondremos que el aire tiene las propiedades del vacio. Los satélites posee una sensibilidad capaz de recibir señales con tan solo $112 \frac{nV}{m}$. ¿Han realizado correctamente los cálculos estos ingenieros? ¿Podrán medir los satélites las emisiones de las antenas desde su ubicación? (3p)

Ayuda: $\tan\theta_e \gg 1$

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}}\left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{w\varepsilon}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{w\sigma}{\varepsilon}\right) \\ \beta = \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}}\left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{w\varepsilon}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{w\sigma}{\varepsilon}\right) \\ \eta = \sqrt{\frac{\mu w}{2\sigma}}\left(\left(1 + \frac{\tan\theta_e}{2}\right) + j\left(1 - \frac{\tan\theta_e}{2}\right)\right) \end{cases}$$

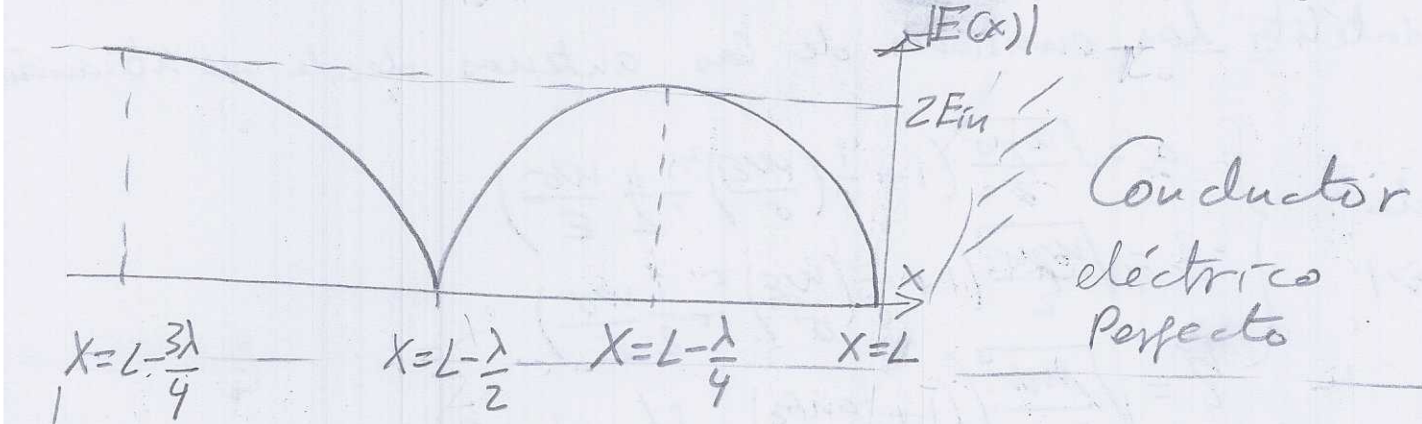
Nota: verifica que se trata de un buen conductor.
Explica tus respuestas

11) Ejercicio teórico

a) Supongamos que las antenas submarinas del ejercicio anterior pueden detectar hasta $200 \frac{nV}{m}$ y que la potencia de emisión del satelite es de $8 \frac{KW}{m^2}$. ¿Puede comunicar el satelite con las antena suponiendo que las antenas actuan como receptores y el satelite como emisor? (3p) Usar la ayuda del ejercicio anterior

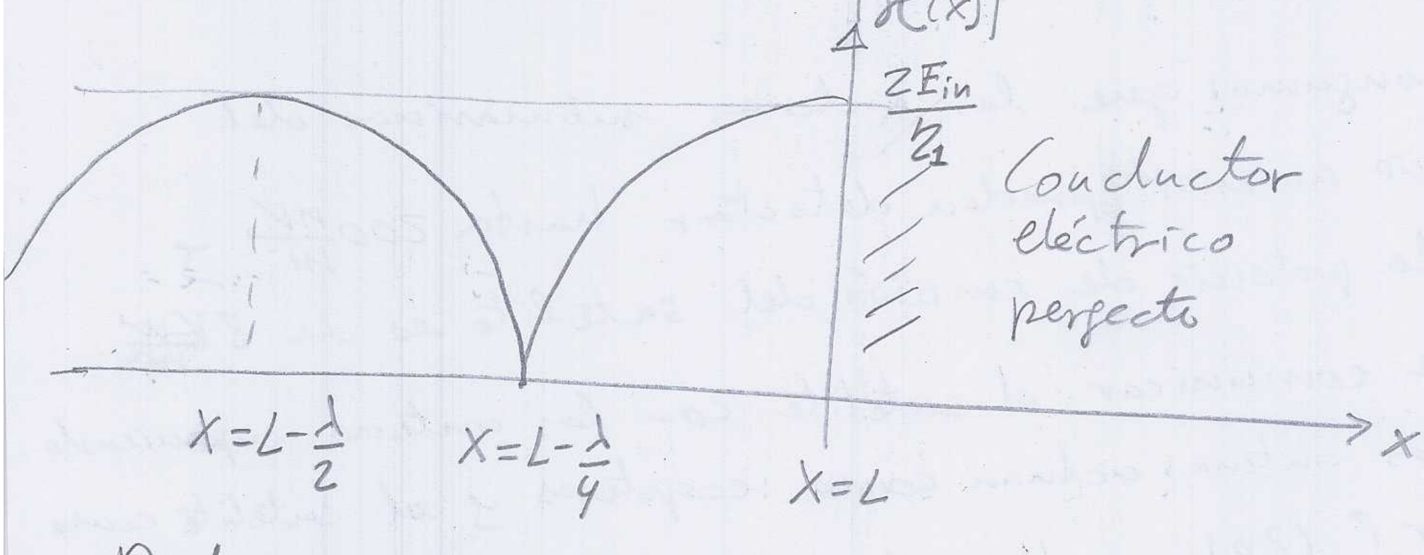
b) En incidencia normal entre medios sin perdidas se producen ondas estacionarias. Se define así la relación de onda $S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$, explica este concepto (1p)

c) Una onda plana incide desde un conductor a un dielectrico perfecto. Encontramos dos grafos, uno para el campo eléctrico y otro para el magnético.



Campo eléctrico

Campo magnético



Deduce estos gráficos (4p)

d) Se tiene una onda plana que se propaga en el eje y' de un sistema de coordenadas

$$\vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r},t) = Re(\tilde{E}_{in} e^{-\tilde{\gamma}_1 y'} e^{j\omega t}) \tilde{z}'$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{in}(\vec{r},t) = Re\left(\frac{\tilde{E}_{in}}{\tilde{\eta}_1} e^{-\tilde{\gamma}_1 y'} e^{j\omega t}\right) \tilde{x}'$$

Si la transformación entre el sistema de coordenadas $(x',y',z') \to (x,y,z)$ es un giro dado por:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_{xx'} & \cos\theta_{yx'} & \cos\theta_{zx'} \\ \cos\theta_{xy'} & \cos\theta_{yy'} & \cos\theta_{zy'} \\ \cos\theta_{xz'} & \cos\theta_{yz'} & \cos\theta_{zz'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Verifica que: (2p)

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{E}_{in}\, e^{-\vec{r}\cdot\tilde{\vec{\gamma}}_1} e^{j\omega t}\right)\left(\cos\theta_{xz'}\hat{x} + \cos\theta_{yz'}\hat{y} + \cos\theta_{zz'}\hat{z}\right) \\ \vec{\mathcal{H}}_{in}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\tilde{E}_{in}}{\tilde{\eta}_1} e^{-\vec{r}\cdot\tilde{\vec{\gamma}}_1} e^{j\omega t}\right)\left(\cos\theta_{xx'}\hat{x} + \cos\theta_{yx'}\hat{y} + \cos\theta_{zx'}\hat{z}\right) \end{cases}$$

Nota: $\vec{r}\cdot\tilde{\vec{\gamma}}_1 = \tilde{\gamma}_1 y'$ Explica esto (2p)

12) Ejercicio teórico

a) Tomando del apartado último de ejercicio anterior que la dirección de propagación de un campo es $\hat{a}_n = \cos\theta_{xy'}\hat{x} + \cos\theta_{yy'}\hat{y} + \cos\theta_{zy'}\hat{z}$, porque podemos escribir para una onda plana:

$$\tilde{\vec{H}}(\vec{r}) = \frac{\hat{a}_n \wedge \tilde{\vec{E}}(\vec{r})}{\tilde{\eta}} \quad (1.5p)$$

b) Demuestra la ley de Snell $\tilde{\gamma}_2 \sin\Omega_{in} = \tilde{\gamma}_1 \sin\Omega_{tr}$ (5p)

c) Particulariza la ley de Snell para dieléctricos LHI y perfectos. Has de obtener que $\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}\,\sin\Omega_{in} = \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}\,\sin\Omega_{tr}$

Nota: El apartado anterior tiene (1.5p)

d) ¿Por qué $\sqrt{\varepsilon_{r_1}\mu_{r_1}} = n_1$ lo llamamos índice de refracción? (0.5p)

e) ¿Qué le ocurre a una onda plana que se propaga en un dieléctrico perfecto y pasa a un dieléctrico conductor? ¿Qué dice la ley de Snell en este caso? Si $N(\theta_{in}) = \sqrt{a^2 + n_1^2 \sin^2\theta_{in}}$ con

$$a = \left(\frac{1}{2}\left(\alpha_2 - \beta_1 \sin^2\theta_{in} + \sqrt{(\alpha_2 - \beta_1 \sin^2\theta_{in})^2 + \beta_2^2}\right)\right)^{1/2},$$ y

nos dicen que $\theta_{tr} = \mathrm{ArcSin}\left(\frac{n_1 \sin\theta_{in}}{N(\theta_{in})}\right)$, ¿A qué se refiere el ángulo θ_{tr}? (1.5 p)

13> Ejercicio teórico

a) Cual es la relación de dos medios con parámetros $(\varepsilon_{r_1}, \mu_{r_1})$ y $(\varepsilon_{r_2}, \mu_{r_2})$ donde se entiende que son dieléctricos perfectos para que exista ángulo límite. (1.5p)

b) Por encima de ángulo límite, la onda trasmitida existe pero se atenúa exponencialmente, de hecho, si suponemos que el eje Y es perpendicular a la interface de separación de medios el campo electromagnético trasmitido correspondiente a una onda plana sería:

$$\vec{\mathcal{E}}_{tr}(\vec{r},t) = Re\left(\vec{\tilde{E}}_{tr}\, e^{j(\omega t - \beta_2 z)}\, e^{-\alpha_2 y}\right)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{tr}(\vec{r},t) = Re\left(\frac{\vec{E}_{tr}}{\tilde{\eta}_2}\, e^{j(\omega t - \beta_2 z)}\, e^{-\alpha_2 y}\right)$$

Donde $\alpha_2 = \beta_2\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\sin^2\theta_{in} - 1\right)$

Demuestra esto (2.p)

c) Demuestra que para una onda P se tiene:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\tilde{E}_{in}}{\tilde{E}_{re}} = \frac{\eta_2\cos\theta_{tr} - \eta_1\cos\theta_{in}}{\eta_1\cos\theta_{in} + \eta_2\cos\theta_{tr}} \qquad T_{\parallel} = \frac{2\eta_2\cos\theta_{in}}{\eta_1\cos\theta_{in} + \eta_2\cos\theta_{tr}}$$

Así mismo verifica que para una onda S se tiene:

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\tilde{E}_{re}}{\tilde{E}_{in}} = \frac{\eta_2\cos\theta_{in} - \eta_1\cos\theta_{tr}}{\eta_2\cos\theta_{in} + \eta_1\cos\theta_{tr}} \qquad T_{\perp} = \frac{2\eta_2}{\eta_2\cos\theta_{in} + \eta_1\cos\theta_{tr}}$$

Nota: Supon ondas planas en dielectricos perfectos (6.p)

14) Ejercicio teórico

a) ¿Qué es el angulo de Brewster? (1p)

b) Demuestra que; (5p)

Onda P: $\sin\theta_{Br,\parallel} = \sqrt{\dfrac{1 - \dfrac{\varepsilon_{1r}/\mu_{2r}}{\mu_{1r}\varepsilon_{2r}}}{1 - \left(\dfrac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}\right)^2}}$

Onda S: $\sin\theta_{Br\perp} = \sqrt{\dfrac{1 - \dfrac{\varepsilon_{r2}/\mu_{r1}}{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}}}{1 - \left(\dfrac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}\right)^2}}$

c) ¿Como reflejará un haz de rayos X ($\nu = 10^{18}\,Hz$) para focalizar el haz en un detector? (4p)

¿Podríamos usar láminas de plata de conductividad $\sigma = 6.3 \cdot 10^7 \frac{S}{m}$? Un tipo afirma que empleando un dieléctrico perfecto es mejor porque sale más barato ¿Esta loco o tiene razón? (4p)