

Exploremos la esperanza en grafos un poco más:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(e(G)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{e \in \binom{V}{2}} \mathbb{1}_e\right) = \sum_{e \in \binom{V}{2}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_e) \\
 &= \sum_{e \in \binom{V}{2}} \mathbb{P}(e \in E(G)) \\
 &= \sum_{e \in \binom{V}{2}} \left[\mathbb{P}_e(\{1\}) \cdot \prod_{w \in \binom{V}{2} \setminus e} \mathbb{P}_w(\{0,1\}) \right] \\
 &= p \cdot \binom{n}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e(G)) = \frac{p \cdot (n-1)}{2}$$

Ahora si queremos contar la cantidad de k -ciclos:

Primero notamos que en vértices los posibles ciclos que podemos armar están dados por las secuencias de largo k , que son $\frac{n!}{(n-k)!}$ posibles y eliminando los casos sobrantes que corresponden a las k rotaciones y eliminando el sentido de recorrer

$$\Rightarrow \underbrace{\# \text{ ciclos posibles en } n \text{ vértices}}_{\mathcal{C}_k} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{k!}{2k} \cdot \binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\underbrace{\# \text{ ciclos en } G}_{\mathcal{C}(G)}) = \mathbb{E}\left(\sum_{C \in \mathcal{C}_k} \mathbb{1}_C\right) = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} \mathbb{E}(\mathbb{1}_C) = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} \mathbb{P}(C \in G)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\gamma_k(G)) = p^k \cdot \frac{k!}{2k} \binom{n}{k}$$

Vemos ahora la siguiente propiedad (no probabilista):

$$(\# \Delta \subseteq G) \geq \frac{m(4m - n^2)}{3n}$$

Dem: Definimos $\forall e \in E(G)$, $t(e) = \# \Delta's \subseteq G ; e \in E(\Delta)$

$$\text{Luego } d(x) + d(y) \leq n + t(e)$$

$$\text{En efecto, } d(x) = |N(x)| \Rightarrow |N(x)| + |N(y)| = |N(x) \cup N(y)| + |N(x) \cap N(y)| \\ \leq n + t(xy)$$

$$\text{Ahora } t(G) = \frac{1}{3} \sum_{e \in E(G)} t(e).$$

$$\text{Pero vemos } \sum_{xy \in E(G)} d(x) + d(y) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in N(x)} [d(x) + d(y)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{x \in V} d(x) \sum_{y \in N(x)} 1 + \sum_{x \in V} \sum_{y \in N(x)} d(y) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{x \in V} d(x)^2 + \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} d(y) \cdot \mathbb{1}_{\{xy \in E(G)\}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{x \in V} d(x)^2 + \sum_{y \in V} d(y) \sum_{x \in V} \mathbb{1}_{\{xy \in E(G)\}} \right] = \sum_{x \in V} d(x)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in V} d(x)^2 \leq \sum_{e \in E} t(e) + n = 3t(G) + mn$$

$$\text{y adem\'as } \sum_{x \in V} d(x)^2 \geq n \left[\sum_{x \in V} \frac{d(x)}{n} \right]^2 = n \left(\frac{2m}{n} \right)^2 = \frac{4m^2}{n}$$

$$\Rightarrow t(G) \geq \frac{m(4m - n^2)}{3n}$$

Lema: Sea $k \in \mathbb{N}$ y $p = p(n)$, tal que $p(n) \geq \frac{16k^2}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$ grande)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(d \geq \frac{1}{2} \frac{n}{k}) = 0$$

$$\uparrow \left(\frac{6k \ln(n)}{n} \right)$$

Dem: Ya vimos que para $n \geq r \geq 2$, $G \in \mathcal{G}_{n,p}$, se tiene

$$P(d \geq r) \leq \binom{n}{r} (1-p)^{\binom{r}{2}} \leq \cancel{\left(\frac{2^n}{r!} \right)} \leq 2^n (1-p)^{\binom{r}{2}} \leq 2^n e^{-P(\frac{r}{2})}$$

Ahora si n es lo suficientemente grande para $p \geq \frac{16k^2}{n}$, y consideramos $r = \lceil \frac{n}{2k} \rceil \geq 2$

$$\Rightarrow P(d \geq r) \leq 2^n e^{-\frac{pr^2}{4}} \leq 2^n e^{-\frac{pn^2}{8}} \leq 2^n e^{-n} \rightarrow 0$$

teorema (Erdős 1959): $\forall k \geq 0$, $\exists H$ grafo, tal que:

$$g(H) > k \quad \wedge \quad \chi(H) > k$$

Dem: Supongamos que $k \geq 3$ y fijamos $\varepsilon \in (0, \frac{1}{k})$, $p = n^{\varepsilon-1}$

Definimos $X = \#$ ciclos de largo $\leq k$.

Por lo ya visto, $E(X) = \sum_{j=3}^k E(X_j) = \sum_{j=3}^k p^j \frac{j!}{2^j} \binom{n}{j}$

(notamos que: $pn = n^\varepsilon \Rightarrow (pn)^j \leq (pn)^k$) $\leq \sum_{j=3}^k p^j \frac{n^j}{2}$

$$\Rightarrow E(X) \leq \frac{(k-2)n^{\varepsilon k}}{2}$$

$\Rightarrow$ Por la desigualdad de Markov que

$$P(X \geq \frac{n}{2}) \leq E(X) / \binom{n}{2} \leq (k-2)n^{\varepsilon k-1} \rightarrow 0$$

Notamos que $p(n) = n^{c-1}$ cumple que es $\geq \frac{16k^2}{n}$ a partir de cierto punto.

Luego escogemos n lo suficiente grande para que

$$P(X \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{2} \wedge P(\alpha \geq \frac{n}{2k}) < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(X \geq \frac{n}{2} \vee \alpha \geq \frac{n}{2k}) \leq P(X \geq \frac{n}{2}) + P(\alpha \geq \frac{n}{2k})$$

$$\Rightarrow P(X < \frac{n}{2} \wedge \alpha < \frac{n}{2k}) > 0 \Rightarrow G \in \mathcal{G}_{n,p} \text{ que lo cumple.}$$

Para cada ciclo de largo $\leq k$ sacamos un vértice.

Así obtenemos H , tal que $v(H) \geq \frac{n}{2} \wedge g(H) > k$.

Además el número de coloreo es la partición en menos clases de independencia de un grafo posible

$$\Rightarrow \chi(H) \geq \frac{|H|}{\alpha(H)} \geq \frac{n/2}{\alpha(G)} > k.$$

Antes de entrar a propiedades de casi todos los grafos, vemos el siguiente resultado:

Si $s, t \geq 2$, $\exists C_1, C_2 > 0$; Kővári-Sós-Turán

$$C_1 \cdot n^{2 - \frac{(s+t-2)}{(st-1)}} \leq \text{ex}(n, K_{s,t}) \leq C_2 \cdot n^{2 - \frac{1}{s}}$$

Alon-Kollar-Pronyai-Szabo.
Construcción proba.

Teorema: $\exists k \in \mathbb{N}$; $\forall c < \frac{1}{k}$, n lo suficiente grande: $\frac{1}{2}$
 $ex(n, \{C_1, \dots, C_k\}) \geq n^{1+c}$

Dem: Consideramos $\mathcal{G}_{n,p}$ con $p = 4n^{-1+c}$

Queremos un grafo con $v(G) = n$, $e(G) = n^{1+c}$ y sin ciclos de largo $l \in \{3, \dots, k\}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e(G)) = p \binom{n}{2} = \frac{4n^c \cdot (n-1)}{2} \approx 2n^{c+1}$$

$$\frac{1-4^{k+1}}{1-4} = \frac{4^{k+1}-1}{3}$$

Si $X = \# \text{ciclos de largo } \leq k$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \sum_{l=3}^k p^l \frac{l!}{2l} \binom{n}{l} \leq \sum_{l=3}^k p^l n^l = \sum_{l=3}^k 4^l n^{-l+lc} \cdot n^l$$

Como $l \leq k \Rightarrow \sum_{l=3}^k 4^l n^{lc} \leq n^{kc} \sum_{l=3}^k 4^l = n^{kc} \left(\frac{4}{3} \cdot 4^k - \frac{1}{3} \right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}(e(G) - X) &\geq 2n^{c+1} - n^{kc} \left(\frac{4}{3} 4^k - \frac{1}{3} \right) \\ &= n^{c+1} \left(2 - \underbrace{n^{kc} \left(\frac{4}{3} 4^k - \frac{1}{3} \right)}_{n^{c+1}} \right) \geq n^{c+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists G \in \mathcal{G}_{n,p}; e(G) - X(G) \geq n^{c+1} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Si se construye G' sacando una e de cada ciclo $\Rightarrow e(G') - \underbrace{X(G')}_{=0} \geq n^{c+1} \quad \Downarrow$