MA5505-1 Teoría de Grafos
Profesor: Martín Matamala
Auxiliares: Juan d'Etigny, Freddy Flores

Guía de problemas C1

P1.- Considere el hipercubo H_n, es decir el grafo que tiene los vértices $\{0,1\}^n$ unidos por aristas siempre que difieran en exactamente una entrada.

a) Determine si H_n es bipartito

b) Determine $\kappa(H_n)$ y $\alpha(H_n)$

c) Determine el mayor y menor ciclo de H_n

P2.- Caracterice los árboles cuyos complementos son conexos.

P3.- Considere G un grafo conexo y sean T_1, T_2 los conjuntos de aristas de dos árboles generadores diferentes de G, y fije $e \in T_1 \setminus T_2$. Demuestre que:

a) $\exists f \in T_2 \setminus T_1$, tal que $(T_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ es un árbol generador de G

b) $\exists f \in T_2 \setminus T_1$, tal que $(T_2 \setminus \{f\}) \cup \{e\}$ es un árbol generador de G

P4.- *a*) Demuestre que todo grafo conexo G contiene un camino o ciclo de largo por lo menos $\min\{2\delta(G), |G|\}$

b) Sea G un grafo en $n \geq 3$ vértices, tal que para cada par v, w de vértices de G con $vw \notin E(G)$, se tiene que $d(v) + d(w) \geq n$. Muestre que G tiene un ciclo hamiltoniano.

P5.- *a*) Sea G grafo con $a, b \in V(G)$. Considere $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ un $a-b$ bloqueador. Muestre que X es minimal si y solo si X tiene un vecino en la componente C_a de $G - X$ que contiene a, y otro en la componente C_b de $G - X$ que contiene b.

b) Sea e una arista en un grafo 2-conexo $G \neq K_3$. Muestre que $G - e$ o que G/e es 2-conexo

P6.- Sea $\mathcal{X}$ una familia de grafos $3-$conexos. Considere un grafo G con $\kappa(G) \leq 2$ y G_1, G_2 grafos inducidos propios de G, tales que $G = G_1 \cup G_2$ y $|G_1 \cap G_2| = \kappa(G)$. Demuestre que si G es arista-maximal sin un menor topológico en $\mathcal{X}$, entonces G_1 y G_2 también son arista-maximales, y $G_1 \cap G_2 = K_2$.

P7.- Sea S un conjunto de 3 aristas disjuntas a pares en un grafo 3-conexo G. Muestre que hay un ciclo en G que contiene las 3 aristas de S, salvo si S es un corte de G.

P8.- Recuerde el teorema de Tutte: El espacio de ciclos de un grafo 3-conexo es generado por sus ciclos inducidos no separadores. De una demostración alternativa a la vista en clases usando inducción. Le pueden servir de apoyo las siguientes propiedades (puede demostrarlas como problema aparte):

- Toda arista de un grafo 3-conexo pertenece a un ciclo no separador inducido
- Todo grafo $G \neq K_4$ 3-conexo tiene una arista e, tal que $G \dot{-} e$ es un grafo 3-conexo. $G \dot{-} e$ es el grafo que se obtiene borrando la arista e, y en caso que alguno de sus extremos quede con grado 2, se borra el vértice y se unen ambos vértices de su vecindad.

P9.- Dado un grafo $G = (V, E)$, un par (V, A) es una orientación de G si A es un subconjunto de $V \times V$ y para todo par de vértices u y v adyacentes en G, exactamente uno de los pares (u, v) o (v, u) está en A. (V, A) es un grafo orientado si es la orientación de algún grafo G. Para este problema llamaremos D a la orientación de G.

Dados $A, B \subseteq V(D)$, un A-B-camino en D es un camino $P = v_1 v_2 .. v_l$ con $V(P) \cap A = \{v_1\}$, $V(P) \cap B = \{v_l\}$ y (v_i, v_{i+1}) para cada $i < l$. Un A-B-bloqueador es un conjunto $S \subseteq V(D)$ tal que $D - S$ no contiene ningún A-B-camino.

Muestre el teorema de Menger para grafos orientados: Para cada grafo orientado D y cada $A, B \subseteq V(D)$, se tiene que el máximo número de A-B-caminos disjuntos es igual al mínimo tamaño de un A-B-separador.

P10.- Sea G un grafo con $n \geq 3$. Demuestre que $L(G)$ es hamiltoniano si y solo si G tiene un subgrafo euleriano inducido por un conjunto dominante.