Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA5402-1 Cálculo Estocástico 2018
10 de noviembre de 2018

Control #1

Profesor: Joaquín Fontbona
Auxiliares: Pablo López, Andrés Riveros

En todo el presente control, $(B_t)_{t\geq 0}$ es un MB estándar en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad dado.

P1. **(a)** El objetivo de este problema es probar que el movimiento Browniano, casi seguramente, no es monótono en ningún intervalo.

i) (2pts) Sea F el conjunto de $\omega \in \Omega$ tales que $t \mapsto B_t(w)$ es monótona en algún intervalo. Pruebe que:

$$F \doteq \bigcup_{\substack{s,t\in\mathbb{Q}\\ 0\leq s<t<\infty}} \{\omega \in \Omega : t \to B_t(\omega) \text{ es monótono en } [s,t]\}.$$

Concluya que basta probar que B no es monótona en $[0,1]$.

ii) (2pts) Sea

$$A \doteq \{\omega \in \Omega : t \mapsto B_t(\omega) \text{ es no decreciente }\}.$$

Considere los conjuntos

$$A_n \doteq \bigcap_{k=0}^{n-1} \left\{\omega \in \Omega : B_{\frac{k+1}{n}}(\omega) - B_{\frac{k}{n}}(\omega) \geq 0\right\}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(A) = 0$, concluyendo así el resultado.

(b) (2pts) Sea $b \in \mathbb{R}$ dado. Pruebe que el conjunto de nivel

$$\{t \geq 0 : B_t = b\}$$

es cerrado, acotado, de medida de Lebesgue nula y denso en sí mismo.

P2. **Teorema: (Ley de los grandes números para el MB)**

Casi seguramente y en L^p para todo $p \in [1, \infty)$, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0.$$

Procederemos a su demostración, mediante los siguientes pasos:

(a) Pruebe que

$$\left|\frac{B_t}{t}\right| \leq \frac{\lfloor t\rfloor + 1}{\lfloor t\rfloor} \left|\frac{B_{\lfloor t\rfloor+1}}{\lfloor t\rfloor + 1}\right| + \max_{\lfloor t\rfloor\leq s\leq\lfloor t\rfloor+1} \left|\frac{B_s - B_{\lfloor t\rfloor+1}}{\lfloor t\rfloor}\right|.$$

(b) Sea $n \geq 1$ y definamos

$$X_n \doteq \max_{n\leq s\leq n+1} \left|\frac{B_s - B_{n+1}}{n}\right|.$$

Pruebe que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2\right) < +\infty.$$

(c) Concluya el resultado.

(d) Demuestre que casi seguramente,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty, \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

P3. Más adelante en el curso, vamos a estudiar la noción de variación cuadrática para un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$, que va a ser crucial para definir la integral estocástica. En concreto, recordemos que para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define su variación cuadrática en el intervalo $[a, b]$ como:

$$QV_{[a,b]}(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{j+1}) - f(t_j))^2$$

donde el supremo se toma sobre el conjunto $\mathcal{P}$ de todas las particiones P de la forma $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, n variable.

Sea $(B(t))_{t\geq 0}$ un M.B. estándar, entonces se puede probar que con probabilidad 1:

$$QV_{[0,t]}(B(\cdot)) = t$$

En esta pregunta, probaremos algunos resultados similares, pero más débiles:

(a) Pruebe que para $t > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (B(\frac{it}{n}) - B(\frac{(i-1)t}{n}))^2\right] = t$$

(b) Pruebe que para $t > 0$, con probabilidad 1:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left[B(\frac{it}{2^n}) - B(\frac{(i-1)t}{2^n})\right]^2 = t$$

Para esto siga los siguientes pasos:

i) Defina $\Delta_{ni} = B(\frac{it}{2^n}) - B(\frac{(i-1)t}{2^n})$ y $W_{ni} = \Delta_{ni}^2 - \frac{t}{2^n}$ para $i = 1, \ldots, 2^n$. Muestre que basta probar que con probabilidad 1:

$$\sum_{i=1}^{2^n} W_{ni} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

ii) Calcule $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{2^n} W_{ni}\right)^2\right]$. *Hint: le puede ser útil que si* $X \sim N(0, \sigma^2)$, *entonces* $\mathbb{E}(X^4) = 3\sigma^2$.

iii) Pruebe que c.s. $\forall\epsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, se tiene que $\left|\sum_{i=1}^{2^n} W_{ni}\right| \leq \epsilon$.

Hint: Estudie $\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^{2^n} W_{ni}\right| > \epsilon\right]$.

iv) Concluya.

(c) Pruebe, usando lo anterior, que, para $t > 0$, con probabilidad 1:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left|B(\frac{it}{2^n}) - B(\frac{(i-1)t}{2^n})\right| = \infty$$

TIEMPO: 3:30 HORAS
¡Éxito!