

MA4802-1. Ecuaciones en Derivadas Parciales**Profesor:** Hanne Van Den Bosch**Auxiliares:** Camilo Gómez, María Eugenia Martínez**Auxiliar 4**

16 de octubre, 2018

P1. Sea $\varphi \in D(R)$ no nula, demuestre que $\hat{\varphi}$ no tiene soporte compacto.**P2.** a) Sea $\alpha \in (0, \infty)$, compruebe que

$$\mathcal{F}\left(e^{-\alpha|x|^2}\right)(x) = \frac{1}{(2\alpha)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}}.$$

b) Demuestre el siguiente resultado:

Proposición 1. Sea $d \geq 3$ y $0 < \alpha < d$, se define

$$C_\alpha = 2^{d/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

donde

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt.$$

Entonces

$$\mathcal{F}^*\left(C_\alpha T_{\frac{1}{|k|^\alpha}}\right)(x) = C_{d-\alpha} T_{\frac{1}{|x|^{d-\alpha}}}.$$

c) Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Encuentre una solución a la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^d$$

para $d \geq 3$.**P3.** Sea $d \geq 3$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ para $t > 0$ y $f(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R})$ para $x \in \mathbb{R}^d$. Hallar una solución para las siguientes EDPs de evolucióna) **Calor:**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

b) **Poisson:**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$