MA4802-1. Ecuaciones en Derivadas Parciales
Profesor: Hanne Van Den Bosch
Auxiliares: Camilo Gómez, María Eugenia Martínez

Auxiliar 1: Derivada débil, espacios de Sobolev

2 de septiembre, 2018

P1. Verifique que

$$g(x) = \frac{H(x) sin(\omega x)}{w} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}),\ \omega \in \mathbb{R},$$

es solución en el sentido de las distribuciones de la EDO

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} = \omega^2 \right) g = \delta.$$

P2. Regla de la cadena.
Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$.

a) Si f' es acotada, demuestre que $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\partial_i f(u) = f'(u) \partial_i u.$$

b) Suponga $u \in L^\infty(\Omega)$. Prueba la regla de la cadena para f' no necesariamente acotada.

c) Calcule la derivada débil de $g(x) = e^{-|x|}$.

P3. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Demuestre que $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \||u|\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

P4. Sea $\phi \in D(\mathbb{R}^d)$, $h \in \mathbb{R}^d/\{0\}$, $t \in \mathbb{R}/\{0\}$. Se define

$$\phi_t = \frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t}.$$

a) Muestre que $\phi_t \in D(\mathbb{R}^d)$.

b) Demuestre que ϕ_t converge en $D(\mathbb{R}^d)$ cuando $t \to 0$. Calcule su límite.