**MA4006. Combinatoria. 2018.**
**Profesor: José Soto.**

# Tarea 4.

**Fecha entrega**: Viernes 7/12. (En papel solo durante la clase; escaneada, vía ucursos antes de las 17:59)
Puntaje por ejercicio: 20 puntos. Puntaje calculado: $0 \leq T \leq 100$.

La nota del control 4 se calculará como sigue, donde $T_i$ es el puntaje calculado de cada tarea.

$$N = \begin{cases} \text{máx}(10, \text{mín}(T_4, T_5, T_6)) & \text{si mín}(T_4, T_5, T_6) < 30 \\ \text{mín}(70, \frac{T_4+T_5+T_6}{3}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (en ucursos). En particular, si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, también debe indicarlo, escribiendo específicamente la frase *sin colaboración*.

**Ejercicio 1.**

(a) Sea $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito. Decimos que $G$ satisface la condición de Hall si para todo $X \subseteq L$, $|N(X)| \geq |X|$. El **teorema de Hall** garantiza que si $G$ satisface la condición de Hall entonces existe un emparejamiento $M \subseteq E$ que cubre a $L$. Demuestre el teorema de Hall usando el teorema de Dilworth.

(b) Pruebe, usando el teorema de Hall, que si $G$ es un grafo bipartito y regular (es decir, todos los vértices tienen el mismo número de vecinos), entonces $G$ admite un emparejamiento perfecto.

(c) Una generalización del resultado anterior es el siguiente. Sea $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito tal que para toda arista $\ell r \in E$, $\ell \in L$, $r \in R$, se tiene $d(\ell) \geq d(r)$. Pruebe, usando el teorema de Hall, que existe un emparejamiento de $G$ que cubre $L$.
**Indicación:** Para $X \subseteq L$, calcule
$$\sum_{(\ell,r)\in E\colon\, \ell\in X} \frac{1}{d(\ell)}.$$

**Ejercicio 2.** Sean $P$, $Q$ posets finitos.

(a) Probar que $[2]^{\bullet[n]} \cong [n+1]$.

(b) Probar que $(P^{\bullet Q})^{\bullet R} \cong P^{\bullet(Q\times R)}$.

(c) Probar que si $L$ es un reticulado, entonces $L^{\bullet P}$ es reticulado para las operaciones $\vee, \wedge$ siguientes. Si $f$ y $g$ son monótonas, entonces

$$(f \vee g)\colon P \to L, \quad (f \vee g)(x) = f(x) \vee_L g(x)$$
$$(f \wedge g)\colon P \to L, \quad (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge_L g(x).$$

(d) Si $L$ es reticulado distributivo, ¿es $L^{\bullet P}$ distributivo? Justifique.

**Ejercicio 3.** Consideremos el reticulado $\Pi_n$ de las particiones de $[n]$ con orden $\pi \leq \tau$ si y solo si las partes de $\tau$ son uniones de partes de $\pi$. El máximo y mínimo de $\Pi_n$ son la partición $\hat{1} = \{[n]\}$ y $\hat{0} = \binom{[n]}{1}$ respectivamente. $\Pi_n$ es graduado con función de rango $\rho(\pi) = n - |\pi|$.

Para $x \in \mathbb{N}, x \geq 1$ y $h\colon [n] \to [k]$, llamamos $\ker(h)$ a la partición de $[n]$ inducida por la relación de equivalencia $a \equiv b$ si y solo si $h(a) = h(b)$. Definamos las funciones $g_x, f_x\colon \Pi_n \to \mathbb{N}$ por

$$g_x(\pi) = |\{h\colon [n] \to [x] \mid \ker(h) = \pi\}$$
$$f_x(\pi) = |\{h\colon [n] \to [x] \mid \ker(h) = \sigma, \text{ para algún } \sigma \geq \pi\} = \sum_{\sigma \geq \pi} g_x(\sigma).$$

(a) Pruebe por argumentos de conteo básico que $g_x(\pi) = x^{\underline{|\pi|}}$ y $f_x(\pi) = x^{|\pi|}$.

(b) Use la fórmula de inversión de Möbius dual para $\Pi_n$ deduzca semicombinatorialmente la identidad polinomial

$$x^{\underline{n}} = \sum_{\sigma \geq \hat{0}} \mu(\hat{0}, \sigma) x^{|\sigma|}$$

(c) Deduzca de las fórmulas de cambio de base para monomios y factoriales decrecientes que para todo $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{\sigma \in \Pi_n :\ |\sigma| = k} \mu_{\Pi_n}(\hat{0}, \sigma) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = s(n, k)$$

En particular, concluya que

$$\mu_{\Pi_n}(\hat{0}, \hat{1}) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

(d) Sea ahora $\sigma \in \Pi_n$ una partición en $k$ partes con tipo $(n_1, \ldots, n_k) \vdash n$. Pruebe que el intervalo $[\hat{0}, \sigma]_{\Pi_n}$ es isomorfo a $\Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2} \times \cdots \times \Pi_{n_k}$.

(e) Para $\pi = \{A_1, \ldots, A_\ell\} \in \Pi_n$ defina el orden parcial $\hat{\Pi}_\pi$ sobre el conjunto de las particiones del conjunto $\pi$. Trivialmente, $\hat{\Pi}_\pi$ es isomorfo a $\Pi_\ell$. Para cada $\sigma \in \Pi_n$ con $\pi \leq \sigma$ llame $\hat{\sigma} \in \hat{\Pi}_\pi$ a la partición obtenida de $\sigma$ fusionando los elementos de cada bloque de $\pi$. Por ejemplo, si $A_1 = \{1, 2, 4\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3, 7\}$, $A_4 = \{5, 6\}$, $\pi = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ y $\sigma = \{\{1, 2, 3, 4, 7\}, \{2, 5, 6\}\}$ entonces $\hat{\sigma} = \{\{A_1, A_3\}, \{A_2, A_4\}\}$.
Pruebe que la función $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ es un isomorfismo del intervalo $[\pi, \hat{1}]_{\Pi_n}$ en el poset $\hat{\Pi}_\pi$. Más aún, pruebe que el isomorfismo es tal que $\hat{\sigma}$ tiene el mismo número de bloques que $\sigma$.

(f) Concluya de las partes anteriores que para $\pi \leq \sigma$

$$\mu_{\Pi_n}(\pi, \sigma) = \mu_{\Pi_{|\pi|}}(\hat{0}, \hat{\sigma}) = (-1)^{|\pi| - |\sigma|} \prod_{i=1}^{|\sigma|} (\hat{n}_i - 1)!$$

donde $\hat{n}_i$ es el número de bloques de $\pi$ cuya unión es el $i$-ésimo bloque de $\sigma$.

**Ejercicio 4.** Sea $L$ un reticulado finito con mínimo 0 y máximo 1. Sea $a > 0$. Considere la expresión

$$S = \sum_{x, y \in L} \mu(0, x) \zeta(x, y) \zeta(a, y) \mu(y, 1)$$

(a) Manipulando $S$ y usando las fórmulas que dispone para la función de Möbius, pruebe que

$$S = \sum_{x} \mu(0, x) \sum_{y \geq x \vee a} \mu(y, 1) = \sum_{x :\ x \vee a = 1} \mu(0, x).$$

(b) Manipule $S$ nuevamente (esta vez dejando $y$ en la suma externa) para probar que $S = 0$.

Las partes anteriores son una demostración del teorema de Weisner: en todo reticulado finito, y para todo $a > 0$ se tiene

$$0 = \sum_{x :\ x \vee a = 1} \mu(0, x)$$

(c) Sea $L$ ahora un reticulado submodular finito. Use el teorema de Weisner para probar que para cada átomo $a \gtrdot 0$ de $L$,

$$\mu(0, 1) = -\sum_{h :\ a \not\leq h \lessdot 1} \mu(0, h)$$

(d) Usando que todo intervalo de un reticulado $L$ submodular es submodular, pruebe por inducción que para todo $x \leq y$, $(-1)^{\rho(y) - \rho(x)} \mu(x, y) \geq 0$.

**Ejercicio 5.** Un reticulado $L$ es **atómico** si todo elemento de $L$ es supremo de átomos (entendiendo 0 como supremo de un conjunto vacío de átomos). Un reticulado $L$ es **geométrico** si es atómico y submodular. Los reticulados geométricos están intrínsecamente relacionados con las geometrías discretas y sus abstracciones llamadas matroides.

Tal vez en cursos anteriores usted se ha encontrado con matroides. Estas se pueden definir de muchas maneras, pero la forma más apropiada para este ejercicio es mediante la función de rango.

**Definición:** Sea $E$ un conjunto finito. Una función $r\colon \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}$ se dice función de rango matroidal si:

(r1) $\forall X \subseteq E$ , $0 \leq r(X) \leq |X|$.

(r2) Si $X \subseteq Y \subseteq E$ entonces $r(X) \leq r(Y)$.

(r3) $\forall X, Y \subseteq E$,

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y).$$

Al par $(E, r)$ se le conoce como matroide. Los conjuntos $I \subseteq E$ tal que $r(I) = |I|$ se conocen como conjuntos independientes de la matroide. El generado por $X \subseteq E$ está definido por $\operatorname{span}(X) = \{y \in E\colon r(X \cup \{y\}) = r(X)\}$. y se sabe (no lo pruebe) que la función span satisface

(I) $\operatorname{span}(\operatorname{span}(X)) = \operatorname{span}(X)$

(II) si $X \subseteq Y$ entonces $\operatorname{span}(X) \subseteq \operatorname{span}(Y)$.

(III) $r(\operatorname{span}(X)) = X$.

**Definición:** Un conjunto $X \subseteq E$ es un **flat** (o cerrado) si $X = \operatorname{span}(X)$.

**Definición:** Una **matroide simple** es una matroide tal que los singletons son flats (equivalentemente, todo conjunto de tamaño a lo más 2 es independiente).

En lo que sigue, sea $(E, \mathcal{I})$ una matroide simple y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de todos los flats.

(a) Pruebe que $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un reticulado, con operaciones $X \wedge Y = X \cap Y$ y $X \vee Y = \operatorname{span}(X \cup Y)$. Pruebe además que el reticulado es geométrico (Este reticulado se conoce como el reticulado de flats de la matroide)

Veamos que en realidad todo reticulado geométrico es reticulado de flats de alguna matroide. Sea $(L, \leq)$ un reticulado geométrico con función de rango $\rho$ (tal que $\rho(0) = 0$). Llame $E$ a su conjunto de átomos y defina para cada $F \subseteq E$, $r(F) = \rho(\bigvee F)$.

(b) Pruebe que $(E, r)$ es una matroide simple y que $(L, \leq)$ es su reticulado de flats.