MA4006. Combinatoria. 2018.
Profesor: José Soto.

Tarea 3.

Fecha entrega: Miércoles 7/11. (En papel solo durante la clase; escaneada, vía ucursos antes de las 17:59)
Puntaje por ejercicio: 10 puntos. Puntaje calculado: $0 \leq T \leq 100$.

La nota del control 2 se calculará como sigue, donde T_i es el puntaje calculado de cada tarea.

$$N = \begin{cases} \text{máx}(10, \text{mín}(T_1, T_2, T_3)) & \text{si mín}(T_1, T_2, T_3) < 30 \\ \text{mín}(70, \frac{T_1+T_2+T_3}{3}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (en ucursos). En particular, si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, también debe indicarlo, escribiendo específicamente la frase *sin colaboración*.

Ejercicio 1. Dos permutaciones g y h de S_n se dicen conjugadas (y se escribe $g \sim f$) si existe $f \in S_n$ tal que $g = f \circ h \circ f^{-1}$. Pruebe que dos permutaciones son conjugadas si y solo sí tienen el mismo tipo, concluya que $\sim$ es de equivalencia y que $|S_n/\sim|$ es el número de particiones $p(n)$.

Ejercicio 2. En el estilo de la demostración de la identidad de Vandermonde (i.e., extrayendo coeficientes de la identidad $(1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^c$), o de otras funciones generatrices conocidas, dé demostraciones cortas de las siguientes identidades para $n, k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+k+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+k}{k}$$

$$4^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}.$$

Ejercicio 3. Sea $\pi = \pi_1 \dots \pi_n \in S_n$ una permutación, decimos que $i \in [n-1]$ es un descenso de π si $\pi_i > \pi_{i+1}$. Los descensos de π particionan naturalmente a π, entendido como palabras, en subpalabras cuyos elementos son crecientes. Por ejemplo, la permutación $\pi = 6\underline{7}25\underline{9}1\underline{4}38$ tiene a las posiciones 2, 5 y 7 como descensos (están subrayados en π). Usando esas posiciones como separadores obtenemos que π se particiona en las 4 cadenas crecientes 67, 259, 14, 38.

Llame $A(n,k)$ al conjunto de permutaciones de $[n]$ con exactamente $k-1$ descensos o equivalentemente, las permutaciones que se particionan en k cadenas ascendentes. Los números $A(n,k)$ se conocen como números Eulerianos. Se tiene que $A(0,0) = 1$ y $A(n,0) = 0 = A(0,k)$ para todo $n, k \geq 1$.

(a) Calcule $A(1,k)$, $A(2,k)$ y $A(3,k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Pruebe que A satisface la recurrencia:

$$\forall n, k \geq 1, A(n,k) = kA(n-1,k) + (n+1-k)A(n-1,k-1)$$

(c) Use lo anterior para probar que para cada $n \geq 0$, la función generatriz $A_n(x)$ de la secuencia $(A(n,k))_{k \geq 0}$ es

$$A_n(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{j \geq 0} j^n x^j$$

(d) Evalúe la fórmula anterior para obtener explícitamente $A_1(x), A_2(x), A_3(x)$, y compare con lo obtenido en la parte (a).

Ejercicio 4. Sea $k \geq 1$. Pruebe, usando funciones generatrices que el número de formas de obtener una suma de $k+20$ al tirar k dados de 6 caras es

$$\left(\!\!\binom{k}{20}\!\!\right)\binom{k}{0} - \left(\!\!\binom{k}{14}\!\!\right)\binom{k}{1} + \left(\!\!\binom{k}{8}\!\!\right)\binom{k}{2} - \left(\!\!\binom{k}{2}\!\!\right)\binom{k}{3}.$$

Ejercicio 5. (a) Pruebe, usando cambios de variables conocidos entre bases de polinomios formales, que:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k} \leq n-1} i_1 i_2 \ldots i_{n-k}$$

(b) Manipulando la fórmula para $S(n,k)$ obtenida a través del PIE, deduzca que

$$\sum_{n \geq 0} S(n,k) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^t - 1)^k$$

$$\sum_{n,k \geq 0} S(n,k) u^k \frac{t^n}{n!} = \exp(u(e^t - 1)).$$

Ejercicio 6. Defina $B_k(x) = \sum_{k \geq 0} S(n,k) x^n$ como la FGO de la secuencia $(S(n,k))_{n \geq 0}$. Use la recurrencia

$$\forall n, k \geq 1, S(n,k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

con valores de borde $S(0,0) = 1$, $S(n,0) = 0 = S(0,k), \forall n, k \geq 1$ para deducir que

$$\forall k \geq 1, B_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$$

Deduzca, expandiendo la expresión a la derecha, que

$$S(n,k) = \sum_{a \in \mathrm{WCOM}(n-k,k)} 1^{a_1} 2^{a_2} \cdots k^{a_k}$$

Ejercicio 7. Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, considere la recurrencia

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha a_{n-1} + \beta \quad \forall n \geq 1 \\ a_0 &= \gamma. \end{aligned}$$

Pruebe que, como sucesiones, a satisface (donde $*$ es convolución, y $(\underline{m})$ es la sucesión tal que $(\underline{m})_i = m^i$):

$$a * (1, -\alpha) = (\gamma - \beta) + \beta(\underline{1})$$

y deduzca que su FGO es

$$A(x) = \frac{\gamma + (\beta - \gamma)x}{(1 - \alpha x)(1 - x)}.$$

Finalmente, desarrollando la serie formal mediante fracciones parciales (trate por separado los casos $\alpha \in \{0, 1\}$ y $\beta = \gamma$) deduzca una fórmula cerrada para a_n.

Ejercicio 8. Use el método **Snake Oil** para:

Encontrar una fórmula cerrada para: $$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k-r} x^k$$

Probar que: $$\sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{m} x^k = \binom{n}{j} x^m (1+x)^{n-m}$$

Ejercicio 9. Una sucesión $a = (a_0, a_1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es una **distribución de probabilidad sobre los naturales** si $\forall k, 0 \leq a_k \leq 1$ y $\lim_{K\to\infty} \sum_{k\in[K]} a_k = 1$. Dada una distribución a decimos que una variable aleatoria X distribuye como a ($X \sim a$) si $\Pr[X = k] = a_k, \forall n \in \mathbb{N}$.

La FGO de una distribución de probabilidad con respecto a una indeterminada s se conoce en probabilidades como la función generadora de probabilidades (fgp), y formalmente es igual a $\mathbb{E}[s^X]$. Calcule una forma cerrada (como función racional) de las fgp de las siguientes distribuciones de probabilidades, para parametros $0 < p < 1$, $\lambda > 0$, $N \in \mathbb{N}^+$. Sus respuestas deben ser series formales en la variable s.

(a) Bernoulli(p): $a = (1 - p, p)$.
(b) Uniforme(N): $a_k = [\![k \in [N]]\!]/N$.
(c) Binomial(N, p): $a_k = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$.
(d) Geométrica(p): $a_k = (1 - p)p^k$.
(e) Binomial-Negativa (N, p): $a_k = \binom{-N}{k}(-p)^k(1 - p)^N$.
(f) Poisson (λ): $a_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Ejercicio 10. Se sabe que si p y q son coprimos, entonces todo n suficientemente grande se puede escribir como $ip + jq$ con $i, j \geq 0$. El **problema de los billetes de Sylvester** consiste en estudiar todas las cantidades que no pueden "pagarse" con billetes de p pesos y billetes de q pesos, donde p y q son coprimos.

Sea $A(p, q)$ el conjunto de combinaciones lineales de p y q con coeficientes naturales, es decir

$$A(p, q) = \{ip + jq : i, j \in \mathbb{N}\} = \{ip + jq : 0 \leq i \leq q - 1, j \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto $A(p, q)$ contiene a todos los naturales, excepto por una cantidad finita. Además, como p y q no tienen divisores en común se puede probar (no lo haga) que $A(p, q)$ se particiona en los conjuntos $(A_i)_{i=0}^{q-1}$, con

$$A_i = \{ip + jq : j \in \mathbb{N}\}, \qquad \forall 0 \leq i \leq q - 1.$$

(a) Sea f la secuencia indicatriz de $A(p, q)$, es decir $f_i = [\![i \in A(p, q)]\!]$. Pruebe que la FGO de f es

$$F(x) = \frac{1 - x^{pq}}{(1 - x^p)(1 - x^q)}.$$

(b) Deduzca que el máximo número natural fuera de $A(p, q)$ es $pq - p - q$.
Indicación: Sea $G(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$ la FGO de la secuencia indicatriz de todos los naturales. Estudie el polinomio $H(x) = G(x) - F(x)$.

(c) Usando que $H(x)$ es un polinomio a coeficientes 0 y 1. Encuentre la cantidad de números naturales que no pertenecen a $A(p, q)$. **Indicación:** Evalúe H en un punto x adecuado.