MA4006. Combinatoria. 2018.
Profesor: José Soto.

Tarea 2.

Fecha entrega: Viernes 12/10. (En papel solo durante la clase; escaneada, vía ucursos antes de las 17:59)
Puntaje por ejercicio: 10 puntos. Puntaje calculado: $0 \leq T \leq 100$.

La nota del control 2 se calculará como sigue, donde T_i es el puntaje calculado de cada tarea.

$$N = \begin{cases} \text{máx}(10, \text{mín}(T_1, T_2, T_3)) & \text{si } \text{mín}(T_1, T_2, T_3) < 30 \\ \text{mín}(70, \frac{T_1+T_2+T_3}{3}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (en ucursos). En particular, si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, también debe indicarlo, escribiendo específicamente la frase *sin colaboración.*

Ejercicio 1.
(a) Pruebe combinatorialmente que el número de particiones de enteros en a lo más a partes y con parte más grande de tamaño a lo más b es igual a $\binom{a+b}{a,b}$.
(b) Sean, $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq \binom{m+1}{2}$. Pruebe que el número de particiones de n en m partes distintas es igual al número de particiones de $n - \binom{m+1}{2}$ en a lo más m partes (no necesariamente distintas).
Indicación: En ambos casos estudie el diagrama de Young asociado, gráficamente.

Ejercicio 2. En lo que sigue, llame $P(n, k)$ a la colección de caminos crecientes en el plano desde el punto $(-k, 0)$ al punto $(0, n-k)$.
(a) Sean $n, k, a \in \mathbb{N}$, con $n - a \geq k \geq a$. Dé una demostración combinatorial usando la interpretación de coeficientes binomiales como caminos crecientes en el plano para la desigualdad:

$$\binom{n}{k-a}\binom{n}{k+a} \leq \binom{n}{k}\binom{n}{k}$$

Indicación: Tome un par de caminos $(p, q) \in P(n, k-a) \times P(n, k+a)$. Pruebe que se intersectan. ¿Puede construir a partir de estos caminos dos caminos $(p', q') \in P(n, k) \times P(n, k)$?

(b) Sean $n, k, b \in \mathbb{N}$, con $n - b \geq k$. Dé una demostración combinatorial usando la interpretación de coeficientes binomiales como caminos crecientes en el plano para la desigualdad:

$$\binom{n-b}{k}\binom{n+b}{k} \leq \binom{n}{k}\binom{n}{k}$$

Indicación: Tome un par de caminos $(p, q) \in P(n-b, k) \times P(n+b, k)$. ¿Puede encontrar dos puntos $s \in p$, $t \in q$ con igual coordenada horizontal, pero a distancia exactamente b entre ellos? ¿Puede construir a partir de estos caminos dos caminos $(p', q') \in P(n, k) \times P(n, k)$?

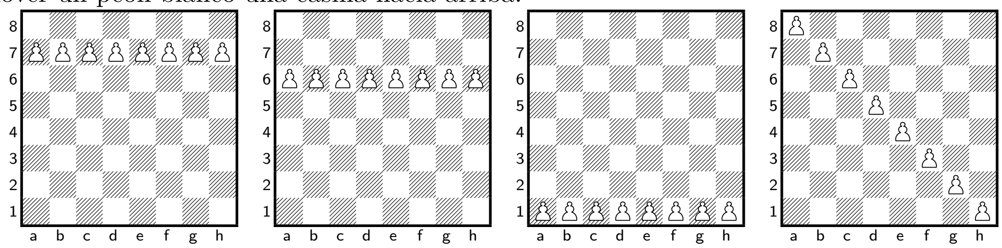
Ejercicio 3. Pruebe combinatorialmente que

$$\text{wcom}(n, k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \text{com}(n, j)$$

$$n^k = \sum_{a \in \text{WCOM}(n,k)} \binom{n}{a_1, \ldots, a_k}$$

$$k!S(n, k) = \sum_{a \in \text{COM}(n,k)} \binom{n}{a_1, \ldots, a_k}$$

Ejercicio 4. (a) Para cada una de las siguientes posiciones de un tablero de ajedrez, calcule la cantidad de formas distintas de llevar los 8 peones blancos hasta la fila superior del tablero asumiendo que en cada jugada solo podemos mover un peón blanco una casilla hacia arriba.



(b) Un árbol binario es un grafo dirigido $T = (V, E)$ conexo, sin ciclos (dirigidos o no dirigidos) y donde cada nodo $v \in V$ tiene grado de salida 0 o 2. Si (u, v) es un arco, decimos que v es hijo de u. Es decir, cada nodo tiene 0 o 2 hijos. Los nodos sin hijos se llaman hojas y los nodos con 2 hijos se llaman nodos internos. Pruebe, encontrando una biyección con algún objeto ya visto en clases o auxiliar, que el número de árboles binarios con n nodos internos es exactamente el n-ésimo número de Catalán, C_n.

Ejercicio 5. En este ejercicio deseamos formalizar un poco más los conceptos de indistinguibilidad basado en la siguiente pregunta ¿Cómo repartimos pelotas de colores en cajas de colores? Tanto para pelotas como para cajas, los colores se pueden repetir, y además, lo único que puede diferenciar un objeto de otro es su color.

Formalmente, un conjunto coloreado de tamaño n y s colores es una partición $\Pi = \{A_1, \ldots, A_s\} \in \mathcal{P}(n, s)$. El conjunto A_i consiste de aquellos elementos de $[n]$ de color i. En principio no nos interesan los nombres de los elementos (en $[n]$) ni el nombre de sus colores (en $[s]$), solo nos interesa distinguir colores distintos, así que nos basta trabajar con la partición entera x de n asociada.
presenta la partición de pelotas, entonces éstas son totalmente distinguibles si y solo si x es la partición $(1^n) := (1, 1, \ldots, 1) \vdash n$, y son totalmente indistinguibles si $x = (n) \vdash n$.

Sea $\Pi = \{A_i\}_{i\in[s]}$ un conjunto coloreado de pelotas representado por la partición entera $\lambda \vdash n$ y $\Omega = \{B_j\}_{j\in[t]}$ un conjunto coloreado de cajas representado por la partición entera $\mu \vdash m$. Decimos que dos funciones $f, g\colon [n] \to [m]$ son equivalentes bajo color si existe una permutación $\pi\colon [n] \to [n]$ que fija las clases de colores de $[n]$ (es decir, $\pi(A_i) = A_i$ para $i \in [s]$), y una permutación $\omega\colon [m] \to [m]$ que fija las clases de colores de $[m]$ (es decir $\omega(B_i) = B_i$) tal que $g = \omega \circ f \circ \pi$. En este caso escribimos $f \sim g$. Las asignaciones coloreadas de pelotas en cajas son entonces clases de equivalencias bajo la relación $\sim$ (es decir, el número de asignaciones coloreadas es $|[m]^{[n]}/\sim|$.)

Llame $\mathrm{Arb}(\lambda, \mu), \mathrm{Iny}(\lambda, \mu), \mathrm{Sobre}(\lambda, \mu)$ al número de asignaciones coloreadas arbitrarias, inyectivas o sobreyectivas de pelotas en cajas cuyas particiones enteras son respectivamente λ y μ.

En clases estudiamos como calcular estos parámetros, para todo (λ, μ) en

$$\{\big((1^n), (1^m)\big); \big((1^n), (m)\big); \big((n), (1^m)\big); \big((n), (m)\big)\}$$

1. Pruebe que para todo $\lambda \vdash n$,

$$\mathrm{Arb}(\lambda, (1^m)) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\!\!\binom{m}{\lambda_k}\!\!\right)$$

Esto corresponde al número de repartir λ_1 pelotas de color 1, λ_2 pelotas de color 2, y así sucesivamente en m cajas distintas.

2. Pruebe que para todo $\lambda \vdash n$ en s partes

$$\mathrm{Iny}(\lambda, (1^m)) = [\![n \leq m]\!] \binom{m}{m-n, \lambda_1, \ldots, \lambda_s}$$

3. Pruebe que para todo $\mu \vdash m$,

$$\mathrm{Sobre}((1^n), \mu) = S(n, m) \binom{m}{\mu}$$

Verifique que las fórmulas son correctas al reemplazar λ por los casos conocidos (1^n) y (n); y μ por los casos conocidos (1^m) y (m).

Ejercicio 6. Dos candidatos (llamados, por simplicidad, 1 y 2) se enfrentan en una votación. Los n votos se encuentran en una caja cerrada y se revelan uno a uno. Se sabe que al final del conteo hay a votos para el candidato 1 y b votos para el candidato 2, con $a \geq b$.

Suponga que al leer los votos el orden en el que se revelan los votos es uniforme (es decir, cada uno de los posibles anagramas de $1^a 2^b$ aparece con igual probabilidad). Usando argumentos combinatoriales pruebe que la probabilidad que durante la cuenta el número de votos parciales del primer candidato sea siempre mayor o igual que los del segundo candidato es

$$\frac{a+1-b}{a+1}$$

Indicación: Use el principio de reflexión de André.

Ejercicio 7. Llame para este ejercicio $\text{sobre}(n,k)$ como el cardinal de $|\text{Sobre}([n],[k])|$ o equivalentemente, el tamaño del conjunto de todas las particiones ordenadas de $[n]$ en $[k]$ bloques.

1. Pruebe combinatorialmente que la siguiente recurrencia define a $\text{sobre}(n,k)_{(n,k)\geq 0}$:

$$\forall n,k \geq 1\colon \text{sobre}(n,k) = k \cdot \text{sobre}(n-1,k) + k \cdot \text{sobre}(n-1,k-1),$$

   con valores de borde $\text{sobre}(0,0) = 1$, y $\text{sobre}(n,0) = \text{sobre}(0,k) = 0$ para $n,k \geq 1$.
2. Pruebe combinatorialmente que los números de Fubini $T(n)_{n\geq 0}$ están definidos por la siguiente recurrencia:

$$\forall n \geq 1: \; T(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T(n-k) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} T(k).$$

   con valor de borde $T(0) = 1$

Ejercicio 8.
1. De una demostración directa (combinatorial) que el número de subconjuntos de $[n]$ de tamaño k que no contienen dos enteros consecutivos es

$$\binom{n-k+1}{k}$$

   Indicación: Considere cualquier conjunto $\{a_1, \ldots, a_k\}$ con $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ que satisface la propiedad pedida. ¿Qué ecuación debe satisfacer el vector x con $x_i = a_i - a_{i-1}$?
2. Un grupo de n parejas (es decir $2n$ personas) se desea sentar en una fila ¿De cuántas maneras se pueden sentar de modo que ninguna pareja aparezca consecutiva en la fila?
3. Un grupo de n parejas (es decir $2n$ personas) se desea sentar en una mesa rectangular de n personas por lado (sin cabecera) ¿De cuántas maneras se pueden sentar de modo que ninguna pareja esté frente a frente en la mesa?

Indicación: Para las dos últimas partes use PIE.

Ejercicio 9. Para $0 \leq m \leq n$, use el método DIE para calcular las siguientes sumas alternantes.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\!\binom{k}{m}\!\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_{k+1} (-1)^k$$

Ejercicio 10.
1. Sabemos que el número de multiconjuntos de $[n]$ de tamaño k donde cada elemento en $[n]$ aparece a lo más una vez es exactamente el número de conjuntos de $[n]$ de tamaño k, es decir $\binom{n}{k}$. Use el PIE para encontrar una fórmula alternativa contando y descontando multiconjuntos donde algún i aparezca 2 veces.
2. Encuentre el número de caminos crecientes en el plano desde $(0,0)$ hasta $(4n,4n)$ que no pasan por (n,n), $(2n,2n)$ ni $(3n,3n)$.