MA4006. Combinatoria. 2018.
Profesor: José Soto.

Tarea 1.

Fecha entrega: Viernes 28/09. (En papel solo durante la clase; escaneada, vía ucursos antes de las 17:59)
Puntaje por ejercicio: 10 puntos. Puntaje calculado: $0 \leq T \leq 100$.

La nota del control 2 se calculará como sigue, donde T_i es el puntaje calculado de cada tarea.

$$N = \begin{cases} \text{máx}(10, \text{mín}(T_1, T_2, T_3)) & \text{si mín}(T_1, T_2, T_3) < 30 \\ \text{mín}(70, \frac{T_1+T_2+T_3}{3}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cíñase a la política de honestidad y colaboración del curso (en ucursos). En particular, si colabora con alguien en un problema específico debe indicarlo, **dándole crédito** a la o las otras personas con las que discutió. Si no colabora con nadie en un problema, también debe indicarlo, escribiendo específicamente la frase *sin colaboración*.

Ejercicio 1. Sea $\emptyset \neq B \subseteq A^k$, donde A es un alfabeto fijo. Llame para $j \in \mathbb{N}$, $\text{Pref}(B, j)$ al conjunto de prefijos de B de largo j. Como $B \neq \emptyset$, $\text{Pref}(B, 0) = \{\varepsilon\}$. Pruebe el principio general del producto siguiente (sea explícito en tanto a las biyecciones que esté usando)
Principio general del producto: Si existen valores $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $1 \leq j \leq k$ y todo $w \in \text{Pref}(B, j-1)$, $|\{\sigma \in A \colon w\sigma \in \text{Pref}(B, j)\}| = s_j$, entonces $|B| = \prod_{j=1}^{k} s_j$.

Ejercicio 2. Sea $n, k \geq 1$. ¿Cuántos números de n dígitos $a_1 a_2 \ldots a_n \in \mathbb{N}_{10}$ (notar que su primer dígito no puede ser 0) satisfacen que la diferencia entre dígitos consecutivos es múltiplo de k?

Por ejemplo, 3906 y 7111 son números válidos para $n = 4, k = 3$.

Ejercicio 3. Demostrar combinatorialmente que para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$,

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}, \qquad (a^b)^c = a^{b \cdot c}, \qquad (ab)^c = a^c \cdot b^c.$$

si además, $a, b, c \geq 1$

$$(a+b)^c \geq a^c + b^c$$

Ejercicio 4. Demostrar combinatorialmente que para todo $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leq n^n, \qquad \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) \geq \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j},$$

$$\sum_i i \binom{n}{i} = n 2^{n-1}, \qquad \sum_i i^{\underline{k}} \binom{n}{i} = n^{\underline{k}} 2^{n-k}.$$

Ejercicio 5. Una torre es una pieza de ajedrez que puede atacar a piezas en su misma fila o columna. Responda las siguientes preguntas en orden (no se salte partes, use la solución más simple que encuentre para cada una, justificándola apropiadamente)

1. Sea $k \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $k \times k$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?
2. Sean $k, n \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times n$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?
3. Sean $k, n, m \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times m$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

Ejercicio 6. Imagine que tiene un librero con n casilleros y considere un conjunto de k libros distintos (identificado con $[k]$) que desea apilar en esos casilleros (en otras palabras, en cada casillero hay una lista ordenada de libros, que eventualmente puede estar vacía). Llamemos (n, k)-libreros a cada posible configuración. Por ejemplo, hay 12 $(3, 2)$-libreros distintos (codificados como listas separadas por barras a continuación).

```
(a) |12| | |    (b) | |12| |    (c) | | |12|    (d) |21| | |    (e) | |21| |    (f) | | |21|

(g) |1 |2 | |   (h) |1 | |2 |   (i) |2 |1 | |   (j) |2 | |1 |   (k) | |1 |2 |   (l) | |2 |1 |
```

Definamos provisoriamente, $n^{\overline{k}}$ como el cardinal del conjunto de los (n,k)-libreros.

- Demuestre combinatorialmente la identidad[1] $n^{\overline{k}} = (n+k-1)^{\underline{k}}$.
- Demuestre combinatorialmente la identidad $n^{\overline{k}} = \left(\!\binom{n}{k}\!\right) k!$.

Ejercicio 7. Probar combinatorialmente que para todo $n,k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i}^{n} \binom{i}{k}, \qquad \left(\!\!\binom{n+1}{k+1}\!\!\right) = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{k} \left(\!\!\binom{i}{j}\!\!\right).$$

Ejercicio 8. Pruebe combinatorialmente que los números $\left(\left(\!\binom{n}{k}\!\right) \right)_{n,k \geq 0}$ satisfacen la siguiente recurrencia:

$$\forall k, n \geq 1: \ \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right).$$

con valores de borde, $\left(\!\binom{n}{0}\!\right) = 1$, para $n \geq 0$ y $\left(\!\binom{0}{k}\!\right) = 0$, para $k \geq 1$.

Ejercicio 9. Pruebe combinatorialmente que los números $\mathrm{com}(n,k)_{n,k\geq 0}$ satisfacen la siguiente recurrencia:

$$\forall n \geq k \geq 1: \ \mathrm{com}(n,k) = \mathrm{com}(n-1,k-1) + \mathrm{com}(n-1,k).$$

con valores de borde, $\mathrm{com}(0,0) = 1$, y $\mathrm{com}(n,0) = \mathrm{com}(0,k) = 0$ para $n,k \geq 1$.

Ejercicio 10. Para $n,k \in \mathbb{N}$, llame $D(n,k)$ al conjunto que contiene todas las particiones de un rectángulo de $1 \times n$ en piezas de tamaños en $\{1 \times 1, 1 \times 2, \ldots, 1 \times k\}$. Además, llame $d(n,k) = |D(n,k)|$ y extienda a valores negativos con 0. Pruebe que $d(n,k)$ satisface las recurrencias:

$$\forall n,k \in \mathbb{Z}, \quad 2d(n,k) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 0 \text{ o } k < 0 \\ 1, & \text{si } n = 0 \\ \sum_{j=1}^{k} d(n-j,k), & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

y

$$\forall n,k \in \mathbb{Z}, \quad d(n,k) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 0 \text{ o } k < 0 \text{ o } (n > 0 = k) \\ 1, & \text{si } n = 0 \\ d(n,k-1) + \sum_{j=0}^{n-k} d(j,k)d(n-k-j,k-1), & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Indicación: Note que el caso $k = 2$ corresponde a las composiciones de Fibonacci. Recuerde como se prueban las identidades análogas en ese caso.

[1] Para el lado derecho piense que está *sacando* los libros uno a uno del librero.