

MA3705 - Algoritmos Combinatoriales

Profesora: Maya Stein

Auxiliar: Tomás Martínez M.

Fecha Auxiliar: 10 de Diciembre, 2018



Auxiliar 11: P, NP y Aproximación

P1. [Problema de Partición]

- a) En el problema de SUBSET-SUM nos dan n enteros a_1, \dots, a_n y un entero k . El objetivo es determinar si existe $S \subseteq [n]$ tal que $\sum_{i \in S} a_i = k$.
Pruebe que SUBSET-SUM es **NP**-completo.
- b) En el problema de partición nos dan n enteros positivos a_1, \dots, a_n . El objetivo es determinar si existe $S \subseteq [n]$ tal que $\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \notin S} a_i$.
Pruebe que el problema de partición es **NP**-completo.
Hint: Argumente que Subset-Sum es NP-completo, incluso cuando los números involucrados son positivos y reduzca a Subset-Sum.

P2. [Dominating Set]

En el problema de Dominating Set nos dan un grafo $G = (V, E)$ y un entero k . La pregunta es si existe $S \subseteq V$ tal que $N[S] = V$ y $|S| = k$. Demuestre que Dominating Set es **NP**-Completo.

Hint: Recuerde que Vertex Cover es **NP**-Completo.

P3. [Agendando trabajos con deadlines]

Suponga que tiene n trabajos para ser agendados en una máquina, donde la máquina puede procesar un trabajo por vez, y debe procesar un trabajo hasta que se complete una vez que se comienza a procesar.

Suponga que el trabajo j debe ser procesado por una cantidad de tiempo $p_j > 0$ y que su proceso no puede comenzar antes de una fecha de liberación $r_j \geq 0$. Además cada trabajo posee una fecha de entrega d_j , y si se completa en el tiempo C_j tendremos una tardanza $L_j = C_j - d_j$ asociada. El objetivo de este problema es minimizar la tardanza máxima $L_{max} = \max_{j=1 \dots n} L_j$.

- a) Sea $S \subseteq [n]$ un subconjunto de trabajos, definimos $r(S) = \min_{j \in S} r_j$, $p(S) = \sum_{j \in S} p_j$ y $d(S) = \max_{j \in S} d_j$. Sea además L_{max}^* el valor óptimo de tardanza máxima, demuestre que:

$$L_{max}^* \geq r(S) + p(S) - d(S)$$

- b) Considere la siguiente heurística conocida como EDD (earliest due date):
En cada momento que la máquina esté disponible, comenzar a procesar el trabajo con la fecha de entrega más temprana.
Demuestre que EDD entrega una 2-aproximación si todas los d_j son negativos.
- c) Pruebe que si tiene k máquinas paralelas y todas las fechas de liberación y los d_j son 0, entonces el algoritmo que asigna un trabajo cualquiera a la máquina con menos carga hasta el minuto es una 2 aproximación para este problema.