

**MA3705 - Algoritmos Combinatoriales****Profesora:** Maya Stein**Auxiliar:** Tomás Martínez M.**Fecha Auxiliar:** 10 de Diciembre, 2018

## Auxiliar 10: Gomory Hu

**P1.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo no dirigido con requerimientos  $r : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . El problema del árbol de mínimo requerimiento cpmoste en buscar un árbol generador  $T$  tal que  $\sum_{e \in E} r(e) \cdot dT(e)$  es mínimo, donde  $dT(e)$  es la distancia entre los endpoints de  $e$  en el arbol  $T$ .

a) Para cada arista  $f \in T$ , sea  $RT(f)$  el peso del corte inducido por las 2 componentes de  $T \setminus f$ .

Muestre que

$$\sum_{e \in E} r(e) \cdot dT(e) = \sum_{f \in T} RT(f)$$

b) Sera  $T$  y  $T'$  2 arboles generadores. Muestre que existe una biyección de aristas  $\phi : T \rightarrow T'$  tal que para todo  $e \in T$   $\phi(e)$  es una arista en el único camino de  $T'$  conectando los endpoints de  $e$ .

c) Muestre que un árbol de Gomory-Hu es una solución óptima al problema del árbol de mínimo requerimiento.

**P2.** Sea  $(G, u, s, t)$  una red tal que  $u(e) \in \{0, 1\}$  para todo  $e \in E$  (estas redes se llaman unitarias). Llamaremos flujo de caminos mínimo (FCM) a un flujo que este compuesto por un set maximal de  $s - t$  caminos de largo mínimo (en cantidad de aristas). Suponga que tiene un algoritmo que le entrega un FCM en tiempo  $O(m)$ .

a) Sea  $f$  un FCM. Muestre que la distancia de  $s$  a  $t$  en  $G_+$  es estrictamente menor que la distancia de  $s$  a  $t$  en  $G_f$ .

b) Suponga que la distancia de  $s$  a  $t$  en  $G_+$  es  $d$ . Usando integralidad del flujo máximo y teorema de descomposición de flujos pruebe que el flujo máximo en esta red es a lo más  $m/d$ .

c) Considere el siguiente algoritmo. Parta del flujo vacío  $f = 0$ . Mientras exista un  $s-t$  camino en  $G_f$ , encontrar un FCM  $g$  de  $(G^f, c^f, s, t)$  (notar que esta red es unitaria) y reemplazar  $f$  con  $f + g$  (es decir "aumentar  $f$  con  $g$ ").

d) Mostrar que la complejidad de este algoritmo es a lo más  $O(m^{3/2})$ . Indicación: ¿Cuan grande puede ser el flujo residual máximo después de  $k$  iteraciones? (use la parte (c) para esto). Note además que en cada iteración posterior el flujo máximo se reduce en una unidad. Elijiendo  $k$  adecuado, concluya.

e) **Bonus:** Use/adapte BFS y DFS para encontrar un FCM.