MA3705 - Algoritmos Combinatoriales
Profesora: Maya Stein
Auxiliar: Tomás Martínez M.
Fecha Auxiliar: 7 de Diciembre, 2018

Auxiliar 9: Flujos y Cortes

P1. Considere el siguiente problema de flujos con capacidad en los nodos y múltiples fuentes y destinos:

a) Sea $G = (V, E)$ un digrafo y sean $S, T \subseteq V$ dos conjuntos disjuntos de nodos. Sea además una función $u : E \to \mathbb{R}^+$ una función de capacidad en los arcos. Usted quiere mandar la mayor cantidad de flujo desde los nodos $s \in S$ a los nodos $t \in T$ (es decir, quiere maximizar la cantidad de flujo que sale desde S o entra a T).

Reduzca este problema al de un problema de flujo máximo en redes con fuente y destino único.

P2. Pruebe el siguiente lema: Sea $G = (V, E), s, t, c$ una red y f un flujo en la red, entonces existe una colección de flujos factibles $f_1, ..., f_k$ y $s - t$ caminos$p_1, ..., p_k$ tal que

- $k \leq |E|$.
- $v(f) = \sum_{i=1}^{k} v(f_i)$.
- f_i tiene su soporte en p_i.

P3. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y conexo. Un corte de aristas es un conjunto $F \subseteq E$ de aristas tal que $G \setminus F$ es disconexo. Un corte de vértices (o "corte" a secas) es un conjunto de vértices S tal que $\delta(S)$ (el conjunto de las aristas del corte) es un corte por aristas de G (es decir cualquier conjunto $S \notin \{\emptyset, V\}$).

Suponga que $u : E \to \mathbb{R}^+$ es una función de capacidades en las aristas no negativas.

a) Demuestre que para todo corte por aristas F existe un corte $S \subseteq V$ tal que $\delta(S) \subseteq F$ y deduzca que existe un corte por aristas F' de capacidad mínima que además es corte por vértices (este es llamado corte mínimo global de G, y lo último puede leerse como que $F' = \delta(S')$ para algún $S' \subseteq V$).

b) Mediante un ejemplo muestre que lo anterior no es válido si se permiten capacidades negativas.

c) Un grafo no dirigido H se dice k-arista-conexo si entre cada par de vértices v y w, existen al menos k $v - w$ caminos disjuntos por aristas. El valor máximo de k tal que H es k-arista-conexo se conoce como la conectividad por aristas de G. Diseñe un algoritmo que calcule la conectividad por aristas de H (si H no es conexo, entonces la conectividad es 0).

P4. Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, y s y t dos vértices distintos de V .

Dos $s - t$ dicaminos P1, P2 se dicen arcodisjuntos si $E(P1) \cap E(P2) = \emptyset$.

Dos $s - t$ dicaminos $P1, P2$ se dicen internamente disjuntos si $V(P1) \cap V(P2) = s, t$.

Un $s - t$ corte es un conjunto $S \subseteq V$ tal que $s \in S$ y $t \notin S$.

Un s-t separador es un conjunto $S \subseteq V s, t$ tal que t no es alcanzable desde s en G S.

a) Demuestre que los teoremas siguientes son equivalentes (es decir, muestre como deducir uno a partir de otro).

   i) Suponga que s y t no son adyacentes. Entonces el número máximo de $s-t$ dicaminos internamente disjuntos par a par es igual al tamaño mínimo de un $s - t$ separador.

   ii) Sean s y t arbitrarios. Entonces el número máximo de $s - t$ dicaminos arco-disjuntos par a par es igual al número mínimo de arcos de un $s - t$ corte.

b) Use el teorema de flujo máximo, corte mínimo, y el teorema descomposición de flujos para demostrar los teoremas de Menger (demuestre cualquiera de los dos ya que en la parte anterior probó que son equivalentes).