

P4

* Recuerda: Teorema de Holgura complementaria

→ Si: $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_m)$ son puntos factibles para el problema primal y dual respectivamente

Si y solo si

$$1: x_j (a_j^T y - c_j) = 0$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$2: (a_i x - b_i) y_i = 0$$

$$i = 1, \dots, m$$

* ¿Cómo funciona un algoritmo primal dual?

1: Parte con algún y dual factible

2: Propone un x basado en satisfacer la condición 1:

de holgura complementaria

3: Mientras x e y no cumplen alguna condición:

4: Actualiza y de forma que todas las restricciones que se cumplen con igualdad ($a_j^T y = c_j$)

se sigan cumpliendo con igualdad, y al menos 1 restricción más pare a cumplirse con igualdad.

Sea "i" el número de esa restricción

5: Actualizamos x_i (hasta ahora x_i era 0,

pues su restricción corres pendiente en el dual no se cumple con igualdad).

~~Si x es primal factible~~

P4

b) Relajación del problema:

$$(P) \quad \min \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in A} v_i^A x_i \geq D_A$$

$$x_i \geq 0$$

* No dijo nada
porque no es necesario
agregar $x_i \leq 1$

$$\forall A \subseteq I$$

$$(D) \quad \max \sum_{A \subseteq I} D_A y_A$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{A \subseteq I: i \in A} v_i^A y_A \leq w_i$$

$$y_A \geq 0$$

$\rightarrow y_2$ que $x_2 \geq 0$

$\rightarrow y_1$ que $x_1 \geq D_A$

$$\forall i \in [n]$$

$$\forall A \subseteq I$$

* Veremos que si x es solución y tiene algún $x_i \geq 1$

$$\Rightarrow \bar{x} \text{ dado por } \bar{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \geq 1 \\ x_i & \text{si no} \end{cases}$$

también es solución.

$$\text{Sea } A_1 = \{ i : x_i \geq 1 \}$$

$$S.c. \quad B \subseteq I$$

$$\Rightarrow \sum_{i \notin A \cup B} x_i v_i^{A \cup B} \geq D_{A \cup B}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \notin A \cup B} x_i v_i^{A \cup B} \geq D - v(A, B) - v(B)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \notin A \cup B} x_i v_i^{A \cup B} + v(A, B) \geq D - v(B)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \notin A \cup B} x_i v_i^{A \cup B} + \sum_{i \in A, B} v_i \geq D_B$$

$\downarrow$
 $v_i^{A \cup B} \leq v_i^B$

$$\Rightarrow \sum_{i \notin A \cup B} x_i v_i^B + \sum_{i \in A, B} v_i \geq D_B$$

$\Rightarrow v_i^B = D_B$
 $\Rightarrow \bar{x}_i v_i^B = D_B$
 $\Rightarrow \sum_{i \in A, B} \bar{x}_i v_i^B \geq D_B$

$\downarrow x_i = \bar{x}_i \text{ si } i \notin A$

$$\Rightarrow \sum_{i \notin A \cup B} \bar{x}_i v_i^B + \sum_{i \in A, B} x_i v_i^B \geq D_B$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \notin B} \bar{x}_i v_i^B \geq D_B$$

$\Rightarrow \bar{x}_i$ cumple todas las restricciones //

P4]

$$c) y \leftarrow 0$$

$$A \leftarrow \emptyset$$

While $v(A) \leftarrow D$

Hacer crecer y_A hasta que se ajuste alguna restricción
Sea i la restricción que se ajusta

$$A = A \cup \{i\}$$

return A

Ojo: Cuando hago crecer y_A , se van ejecutando sólo restricciones
de la forma $\sum_{A': i \in A'} v_i^{A'} y_{A'} \leq w_i \rightarrow i\text{-ésima restricción}$

$\Rightarrow$ Si $i \in A \Rightarrow$ la $i\text{-ésima}$ restricción no se
ve afectada.

d) Sea X la solución entregada por el algoritmo
 si: $i \in X \Rightarrow$ la restricción se cumple con igualdad.

$$\sum_{i \in X} w_i$$

$$= \sum_{i \in X} \sum_{A: i \notin A} v_i^A y_A$$

$$= \sum_{i \in X} \sum_{A \subseteq I} v_i^A y_A \mathbb{1}_{[i \notin A]}$$

$$= \sum_{A \subseteq I} \sum_{i \in X} v_i^A y_A \mathbb{1}_{[i \notin A]}$$

$$= \sum_{A \subseteq I} \sum_{i \in X \setminus A} v_i^A y_A$$

$$= \sum_{A \subseteq I} y_A \sum_{i \in X \setminus A} v_i^A \leq \sum_{A \subseteq I} 2 y_A D_A \leq 2 \text{OPT}$$

Seo A tq $y_A \neq 0 \Rightarrow A \subseteq X$. $\rightarrow$ el último elemento agregado

Por todos los items menos por el último tenemos que

$$v_i^A = \min(v_i, D_A) = v_i, \text{ pues si } i \text{ no fue el último}$$

$$\Rightarrow v(A_i) + v_i < D \Rightarrow v_i < D_{A_i}$$

$$\text{Luego } \sum_{i \in X \setminus A} v_i^A = v_0^A + \sum_{\substack{i \in X \setminus A \\ i \neq 0}} v_i^A = \underbrace{v_0^A}_{\leq D_A} + \underbrace{v(X \setminus A)}_{\leq D_A} - v(A)$$

0 es el último elemento.

$$\leq 2 D_A$$