MA3705 - Algoritmos Combinatoriales
Profesora: Maya Stein
Auxiliar: Tomás Martínez M.
Fecha Auxiliar: 25 de Octubre, 2018

Auxiliar 5: Matchings

P1. 2-coloreabilidad

a) (50 %) Un algoritmo se dice 2-coloreable si es que existe existe una forma de pintar los vertices con 2 colores (rojo o azul) de forma tal que toda arista uv cumpla que u y v son de colores distintos. Encuentre un algoritmo que funcione en O(n+m) que decida si un grafo es 2-coloreable.

b) (25 %) Mostrar que un grafo es bipartito no tiene ciclos de largo impar.

c) (25 %) Mostrar que un grafo sin ciclos impares es bipartito

P2. In Degree acotado
Sea $D = (V, E)$ un digrafo, sea $k \in \mathbb{N}$. Considere el par $(E, \mathcal{I})$, donde $\mathcal{I}$ es el conjunto de todos los subconjuntos I de E tal que en el digrafo inducido por I, ningún vértice tiene in-degree mayor que k.

a) (35 %) Muestre que $(E, \mathcal{I})$ es un matroide.

b) (35 %) Determine los circuitos y las bases de esta matroide.

c) (30 %) Muestre que si arriba reemplazamos D por un grafo, y indegree por degree, entonces $(E, \mathcal{I})$. NO es un matroide. Indicación: Le basta con mostrarlo cuando $k = 1$.

P3. Más matroides aún
Sea $G = (V, E)$ con bipartición $V = A \cup B$ con A y B disjuntos. Sea

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq A : \text{existe matching } M \text{ de } G \text{ que cubre a todos los vértices de } X\}.$$

Muestre que $(A, \mathcal{I})$ es matroide.

P4. König por caminos aumentantes
Sea $G = (V, E)$ con bipartición $V = L \cup R$ con L y R disjuntos.

a) Pruebe que si M es un matching máximo, U el conjunto de L de nodos expuestos para dicho matching y Z el conjunto de nodos que está en U unido a aquellos que están dentro de algún camino alternante, entonces

$$K = (L \setminus Z) \cup (R \cap Z)$$

es cubrimiento de E.

b) Genere un algoritmo en tiempo $O(m(m + n))$ que encuentre un vertex cover de tamaño mínimo.