MA3705 - Algoritmos Combinatoriales
Profesora: Maya Stein
Auxiliar: Tomás Martínez M.
Fecha Auxiliar: 15 de Noviembre, 2018

Auxiliar 7: Intersección y Unión de Matroides

P1. Considere el gafo Q_n de la cuadriculo de $[n] \times [n]$, es decir,

$$V(Q_n) = [n] \times [n] \quad y \quad E(Q_n) = \{(a,b)(c,d) : |a-c| + |b-d| = 1\}$$

Suponga que a cada cuadrado unitario C (ciclo de largo 4 en Q_n) se le asigna un valor $b(C) \in \{0,1,2,3,4\}$ y que se marca un conjunto de aristas $F \subseteq E(Qn)$ (ver la Figura 1 para un ejemplo).
Plantee como un problema de intersección de matroides el problema de encontrar un conjunto $R \subseteq F$ de tamaño máximo tal que en cada cuadrado unitario C de Q_n, R contiene a lo más $b(C)$ aristas. Argumente que su planteamiento basta para encontrar un algoritmo que resuelve el problema en tiempo polinomial.

3	3	1
2	0	3
1	2	1

Figura 1: Ejemplo de una entrada del problema para $n = 4$, las aristas de F están en negrita y los números dentro de los cuadrados corresponden a los valores $b(C)$.

P2. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo:

a) De un algoritmo que en tiempo polinomial decida si existen 2 arboles generadores disjuntos (en aristas) del grafo.

Recuerdo: Para una matroide M el dual $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ también es matroide.

b) Demuestre que G tiene dos árboles generadores disjuntos si y sólo si:

$$\forall X \subseteq E : |E \setminus X| \geq 2(cc(X) - 1)$$

P3. **[Covering/Packing de Bases]**
Sea $M = (E, \mathcal{I})$ una matroide y $k \in \mathbb{N}$.

a) Demuestre que el tamaño máximo de la unión de k conjuntos independientes es igual a:

$$\min_{U \subseteq E} |S \setminus U| + kr(U)$$

.

b) Demuestre que E puede ser cubierto por k conjuntos independientes si y sólo si:

$$U \leq kr(U) \qquad \forall U \subseteq E$$

¿Qué nos dice esto de la matroide gráfica?

c) Demuestre que S tiene k bases disjuntas si y sólo si:

$$k(r(E) - r(U)) \leq |E \setminus U| \qquad \forall U \subseteq E$$

¿Qué nos dice esto en la matroide gráfica de un grafo conexo?