

MA3705 - Algoritmos Combinatoriales**Profesora:** Maya Stein**Auxiliar:** Tomás Martínez M.**Fecha Auxiliar:** 5 de Noviembre, 2018

Auxiliar 6: Matchings

Importante: La P2 la debe entregar escrita.

P1. Eres un mago trabajando con un mazo inglés de cartas (52 cartas divididas en cuatro pintas, cada una de ellas con números del 1 al 13). Para el primer número de tu show, un voluntario del público divide el mazo en 13 pilas de 4 cartas cada una. Muestre que es posible asombrar al público seleccionando exactamente 1 carta de cada pila de tal modo que las 13 cartas seleccionadas contengan exactamente una carta de cada número del 1 al 13.

P2. Considere el siguiente juego en un grafo conexo: dos jugadores seleccionan alternadamente vértices v_1, v_2, \dots de un grafo G , donde v_{i+1} tiene que ser adyacente a v_i para todo $i > 1$. El último jugador que puede seleccionar un vértice gana el juego. Dicho de otro modo, si un jugador no tiene vértices disponibles para seleccionar entonces pierde. Un matching perfecto de G es un matching M con $V(M) = V(G)$.

- Demuestre que si G tiene un matching perfecto, entonces el jugador 2 tiene estrategia ganadora.
- Decimos que un nodo $u \in V$ es no-esencial si existe un matching máximo M de G que no cubre a u . Demuestre que si existen nodos no esenciales en G , el jugador 1 tiene estrategia ganadora que parte eligiendo algún vértice u no-esencial.

P3. Recuerdo: König por caminos aumentantes

Sea $G = (V, E)$ con bipartición $V = L \cup R$ con L y R disjuntos.

- Pruebe que si M es un matching máximo, U el conjunto de L de nodos expuestos para dicho matching y Z el conjunto de nodos que está en U unido a aquellos que están dentro de algún camino alternante, entonces

$$K = (L \setminus Z) \cup (R \cap Z)$$

es cubrimiento de E .

P4. Sea $G = (V, E)$ con bipartición $V = L \cup R$ con L y R disjuntos.

- Mostrar que un árbol T tiene un matching perfecto si y solamente si para cada $v \in V(T)$, $T - v$ tiene exactamente una componente impar.
- Encontrar un algoritmo que determina si un árbol T tiene un matching perfecto, y en el caso que no lo tiene, entrega un vértice v tal que $T - v$ tiene mas de una componente impar.