

MA3705 - Algoritmos Combinatoriales**Profesora:** Maya Stein**Auxiliar:** Tomás Martínez M.**Fecha Auxiliar:** 5 de Octubre, 2018

Auxiliar 2: Matroides

P1. [Unión de Matroides]*Esta pregunta debe ser entregada en papel.*

- a) Mostrar que la unión $M = (E, \mathcal{I})$ de dos matroides $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ definida por

$$\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}_1, I_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

es matroide.

- b) Mostrar que M tiene 2 bases disjuntas si y solamente si el rango de la unión de M con M es $2r(M)$.
- c) Supongamos ahora que las matroides actúan sobre conjuntos disjuntos E_1 y E_2 . En este caso definimos la unión de las matroides como $M = (E, \mathcal{I})$ donde $E = E_1 \cup E_2$ y $\mathcal{I}$ se define igual que antes. Muestre que la unión de dos matroides uniformes es una matroide de partición.

P2. [$u-v$ Separadores]

Sea $G = (V, E)$ grafo conexo y $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de peso estrictamente positiva.

Decimos que $S \subseteq E$ es un $u-v$ separador si al borrar S obtenemos exactamente 2 componentes conexas, una conteniendo a u y la otra conteniendo a v .

- a) Sea $I_{uv} = \{F \subseteq E : (V, F) \text{ es un bosque donde } u \text{ y } v \text{ están en distintas componentes conexas}\}$. Demuestre que $M_{uv} = (E, I_{uv})$ es matroide.
- b) Diseñe un algoritmo para encontrar un $u-v$ separador de peso máximo en G . Analice su correctitud y determine su complejidad.

P3. [Aumento Débil]

Aumento Débil:

$$\text{Sean } X, Y \in \mathcal{I}, \text{ tal que } |X \setminus Y| = 1, |Y \setminus X| = 2 \implies \exists y \in Y \setminus X : X + y \in \mathcal{I}$$

Demuestre que Aumento Débil es equivalente a Aumento.

P4. [Más Matroides]

Sea $M = (E, \mathcal{I})$ matroide. Definimos $M^* = (E, \mathcal{I}^*)$ donde

$$\mathcal{I}^* = \{F \subseteq E : \exists B \subseteq F^c \text{ con } B \text{ base de } M\}$$

- a) Pruebe que M^* es matroide.
- b) Demuestre que $(M^*)^*$