Auxiliar 9

Covarianza y correlación

Prof: Vicente Acuña
Auxs: Sebastián López, Cristóbal Parraguez

P1.- Sean $\{X_1, ..., X_n\}$ variables aleatorias exponenciales independientes e identicamente distribuidas, es decir, X_i distribuye $Exp(\lambda)$ $\forall i \in \{1...n\}$. Muestre que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ distribuye $Gamma(n, \lambda)$

P2.- Sean $X_1...X_n$ variables aleatorias iid normales (μ, σ^2), entonces las variables aleatorias:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{1}$$

son independientes.

P3.- Sean $X_1...X_m; Y_1...Y_n$ variables aleatorias tales que:

- $V(X_i) = V(Y_j) = 1\ \forall i, j$
- $\rho(X_i, Y_j) = \rho_3\ \forall i, j$
- $\rho(X_i, X_j) = \rho_1\ \forall i, j$
- $\rho(Y_i, Y_j) = \rho_2\ \forall i, j$

Sean $U = \sum_{i=1}^{m} X_i$, $W = \sum_{j=1}^{n} Y_j$, muestre que:

$$\rho(U, W) = \frac{\sqrt{mn}\rho_3}{\sqrt{1-(m-1)\rho_1}\sqrt{1-(n-1)\rho 2}} \tag{2}$$

Propuesto.- Sea X un vector aleatorio bidimensional que distribuye según una Normal Multivariada de medias μ y matriz de varianza-covarianzas Σ definida positiva. Es decir, $X\tilde{}N(\mu; \Sigma)$. Su densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{det(\Sigma)}} e^{\frac{-1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1}(x-\mu)} \tag{3}$$

Considere ahora el vector $Z = (Z_1, Z_2) = (X_1 + X_2, X_2)$

a) Muestre que Z distribuye normal bivariada ν, Θ, calculelos explicitamente.

b) Muestre que Z_1 distribuye normal, calcule su media y su varianza.