Examen - Probabilidades y Estadística - 2018

Profesor: Iván Rapaport
Auxiliar: Martín Gilabert

Pregunta 1.

a.- (3 ptos) El tiempo de vida de un cierto tipo de baterías es una v.a. de esperanza 40 horas y varianza 400 horas. Las baterías se usan hasta que mueren y, cuando esto ocurre, se reemplazan inmediatamente por una nueva. Suponga que disponemos de 25 baterías. Calcule la probabilidad (aproximada) de que dispongamos de más de 1100 horas de batería. Información útil: $\Phi(0.5) \approx 0.6915$, $\Phi(1) \approx 0.8413$, $\Phi(1.5) \approx 0.9332$, $\Phi(2) \approx 0.9772$.

b.- (3 ptos) Suponga que usted tiene una moneda cargada, que tiene probabilidad 0.6 de resultar cara y probabilidad 0.4 de resultar sello. Usted quiere convencer a alguien, por medio de un experimento, que la moneda no está equilibrada. ¿Qué experimento propondría para que la persona quede “99% convencida”? Justifique su razonamiento. Indicación: Usar Chebyshev y el hecho de que $p(1-p) \leq 1/4$ para todo $p \in [0, 1]$.

Pregunta 2.

a.- (3 ptos) Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. que sigue una Uniforme $U(0, \theta)$. Sea la v.a $X = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Sea $Y = \frac{n+1}{n}X$. Muestre que la varianza de Y es $\frac{\theta^2}{n(n+2)}$. Indicación: $F_X(x) = \mathbb{P}\{X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\}$.

b.- Suponga que dentro de cada caja de cereal viene uno de los n cupones (y que los n cupones están uniformemente distribuidos). Sea X la v.a. que representa el número de cajas de cereales que hay que comprar hasta que se completan los n cupones.

i.- (1.5 ptos) Sea X_i la v.a. que representa el número de cajas que se compran mientras uno tiene exactamente $i - 1$ cupones distintos. Pruebe que $\mathbb{E}(X_i) = \frac{n}{n-i+1}$. Indicación: X_i es una v.a geométrica.

ii.- (1.5 ptos) Concluya que $\mathbb{P}\{X \geq 2nH_n\} \leq 1/2$, donde $H_n = \sum_{i=1}^n 1/i$.

Pregunta 3.

a.- (3 ptos) Suponga que la altura, en centímetros, sigue una normal de parámetros $\mu = 170$ y $\sigma^2 = 16$ para los hombres y de $\mu = 165$ y $\sigma^2 = 9$ para las mujeres. Suponga que se selecciona al azar, de manera independiente, un hombre y una mujer. Demuestre que la probabilidad de que la mujer sea más alta que el hombre es $1 - \Phi(1)$.

b.- (3 puntos) Una extraña enfermedad afecta a una persona en 100. Un test resulta positivo con probabilidad $\frac{99}{100}$ cuando se le aplica a una persona enferma y con probabilidad $\frac{1}{100}$ cuando se le aplica a una persona sana. Suponga que al señor K se le aplica el test y resulta positivo. ¿Qué es más probable? ¿Que el señor K esté enfermo o que el test se haya equivocado?

Tiempo: 3 horas.