MA3403-2 Probabilidades y Estadística
Profesor: Iván Rapaport
Auxiliar: Martín Gilabert

Auxiliar 11

P1 N personas llegan a una cena secuencialmente, y asumimos que los $\binom{N}{2}$ pares de personas son amigos con probabilidad p e independientemente. Al llegar, cada persona se fija en si hay amigos suyos entre los que llegaron antes. Si los hay, entonces se sienta en una mesa donde hay uno de ellos (las mesas pueden dar cabida a cualquier número de personas). Si no los hay, entonces se sienta en una mesa desocupada. Calcule el valor esperado de la cantidad de mesas ocupadas (cuando todos hayan llegado). Indicación: defina X_i como la indicatriz del evento 'la i-ésima persona se sienta en una mesa desocupada'.

P2 Se escoge un punto al azar X en el intervalo [0,1]. Luego, en el intervalo $[X, 1]$ se escoge un segundo punto al azar Y.

a) Escriba las densidades $f_X, f_{Y|X}, f_{X,Y}$ y f_Y.

b) Grafique la región $T \subset [0,1]^2$ tal que $(X,Y) \in T$ ssi podemos construir un triángulo con los segmentos $[0,X], [X,Y]$ e $[Y,1]$.

c) Calcule la probabilidad de que se pueda construir un triángulo con los segmentos mencionados.

P3 a) Se dibuja un círculo al azar centrado en (0,0) cuyo radio R sigue una distribución exponencial de parámetro 1, y luego se escoge un punto al azar (X,Y) dentro del círculo. Calcule la esperanza de la distancia de ese punto al origen. Indicación: esperanzas condicionales.

b) Considere la ecuación $x^2+Ux+1=0$, donde U es una variable aleatoria continua con densidad $f_U(u) = \frac{1}{2}e^{-|u|}\ \forall u \in \mathbb{R}$. Encuentre la probabilidad de que las raíces de la ecuación sean reales, y la probabilidad de que la suma de las raíces sea mayor que $x \in \mathbb{R}$ cualquiera.

P4 (Sólo si alcanzamos) Considere una colonia de bacterias con población inicial n_0. En cada generación, la cantidad de bacterias puede multiplicarse por $\lambda > 1$ (con probabilidad p) o dividirse por λ (con probabilidad $1-p$). La multiplicación o división de la población ocurre de manera independiente en cada período. λ es fijo.

Considere la variable aleatoria X_n que mide la población de bacterias en la generación n.

a) Pruebe que X_n toma valores en el conjunto $\{\lambda^k n_0\}_{k=-n}^{n}$.

Por lo tanto, podemos definir una variable U_n a valores en $\{-n,\dots,n\}$ tal que $X_n = \lambda^{U_n} n_0$. Definamos las variables R_n como el número de veces que la población se multiplicó hasta la etapa n, y $L_n = n - R_n$.

b) Encuentre las distribuciones de R_n y L_n, y exprese U_n en términos de R_n.

c) Encuentre $P(U_n = k)$ y use este resultado para encontrar la distribución de X_n.