MA3403-1 Probabilidades y Estadística
Profesor: Iván Rapaport
Auxiliar: Martín Gilabert
Ayudantes: Diego León, Luis Pinochet y Mauricio Rojas

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Pauta P3 Control #1

Suponga que A lanza n + 1 veces una moneda equilibrada y que B lanza n veces una moneda equilibrada. Demuestre que la probabilidad de que A obtenga más caras que B es 1/2. Indicación: Condicione respecto a qué jugador tiene más caras después de n lanzamientos (son 3 casos).

Se definen C_A y C_B como el número de caras que obtiene cada uno respectivamente después de n lanzamientos. Siguiendo la indicación se puede deducir que los 3 casos son $C_A > C_B$, $C_A < C_B$ y $C_A = C_B$ y denotemos como G el evento en que A finalmente gana (después de los n+1 lanzamientos). Usando el teorema de probabilidad totales se tiene la ecuación (1).

$$P(G) = P(G|C_A > C_B)P(C_A > C_B) + P(G|C_A < C_B)P(C_A < C_B) + P(G|C_A = C_B)P(C_A = C_B) \tag{1}$$

En la ecuación (1) las probabilidades condicionales son todas sencillas de calcular. $P(G|C_A < C_B)$ es evidentemente 0 (no puede ganar A con menos caras), $P(G|C_A = C_B) = 1/2$ (pues están empatados hasta el n-ésimo lanzamiento y las monedas están equilibradas) y $P(G|C_A > C_B) = 1$. Adicionalmente, el resto de probabilidades cumplen la ecuación (2).

$$P(C_A > C_B) + P(C_A = C_B) + P(C_A < C_B) = 1 \tag{2}$$

donde $P(C_A > C_B) = P(C_A < C_B)$ (igual de probable que cualquiera de los 2 tenga más caras hasta los n lanzamientos), entonces usando la ecuación (2) se tiene que $1 - 2P(C_A > C_B) = P(C_A = C_B)$ y reemplazando todo lo obtenido hasta el momento en la ecuación (1) se tiene que:

$$P(G) = P(C_A > C_B) + \frac{1}{2}P(C_A = C_B) \tag{3}$$

$$P(G) = P(C_A > C_B) + \frac{1}{2}(1 - 2P(C_A > C_B)) \tag{4}$$

$$P(G) = \frac{1}{2} + P(C_A > C_B) - P(C_A > C_B) = \frac{1}{2} \tag{5}$$

De la ecuación (5) se ve finalmente que $P(G) = \frac{1}{2}$ ∎

También es posible calcular $P(C_A > C_B)$, $P(C_A = C_B)$ y $P(C_A < C_B)$, pero no es la idea del problema. Se considera correcto de todas formas dependiendo de su argumentación y los valores a los que llegaron.