Aux #3

P1|

a) Tenemos que:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\mu x_i+\mu^2)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum x_i^2 - 2\mu\sum x_i + n\mu^2)}$$

$$= \underbrace{\sigma^{-n} e^{n\mu^2}}_{C(\theta)} \cdot e^{+\underbrace{\sum x_i^2}_{T_2}\cdot\underbrace{\frac{-1}{2\sigma^2}}_{\eta_2} + \underbrace{\frac{\mu}{\sigma^2}}_{\eta_1}\underbrace{\sum x_i}_{T_1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}}_{h(x)}$$

Notemos que podemos aplicar el teorema de factorización a la densidad anterior. Luego:

$$T = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

es suficiente para θ.

b) Hint: un estadístico T se dice equivalente a otro estadístico S ssi $\exists f$ bigeectiva tal que $T = f(S)$.

Tomando en cuenta lo anterior, es claro que $\overline{X}$ es equivalente a T_1, veamos el caso de S^2:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{T_2} - n\overline{X}^2\right)$$

con lo que S^2 es equivalente a T_2.

c) Retomemos la parte (a), suponiendo σ^2 conocido:

$$= \underbrace{\sigma^{-n} e^{n\mu^2}}_{C(\theta)} \cdot e^{\underbrace{\mu/\sigma^2}_{\eta_1}\underbrace{\sum x_i}_{T_1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x_i^2}}_{h(x)}$$

Luego, T_1 es completo y por (b), $\overline{X}$ es completo.

Para saber si es EIVUM, haremos uso del teorema de Lehmann-Scheffé, solo nos falta ver si es insesgado:

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(x_i) = \mu$$

y finalmente $\overline{X}$ es EIVUM.

d) Como ya sabemos que $\bar{X}$ es completo, parece buena idea intentar utilizar el teorema de Basú; para esto, mostremos que S^2 es ancilario. Trabajaremos con los llamados "modelos de traslación":

- ·) Decimos que $X=(X_1,\dots,X_n)$ es una MAS proveniente de un modelo de traslación si existen variables aleatorias iid $W_1,\dots,W_n$ tal que X tiene la misma distribución que $(W_1+\theta,\dots,W_n+\theta)$, para algún $\theta\in\Theta$. Además:
- ·) Un estadístico V se dice invariante bajo traslación ssi

$$V(X+d)=V(x_1+d,\dots,x_n+d)=V(x),\ \forall x,\ \forall\theta\in\Theta$$

Y nos ayudará el siguiente resultado: "Si V es un estimador invariante bajo traslación de un modelo de traslación, entonces V es ancilario".

dem: basta notar que $V(X)=V(W+\theta)=V(W)$, y como ni V ni W dependen de θ se concluye.

Con todo lo anterior, basta ver que $N\sim(\mu,\sigma^2)$ es un modelo de traslación y que S^2 es invariante bajo traslación y ganamos.

i) Si $x_i\sim N(\mu,\sigma^2)$, podemos tomar $Z_i\sim N(0,\sigma^2)$ y sabemos que $Z_i+\mu\sim N(0,\sigma^2)$

ii) Sea $d\in\mathbb{R}$:

$$S^2(X+d)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i+d-(\underbrace{\overline{x+d}}_{\bar{X}+d}))^2=S^2(X)$$

Luego, S^2 es ancilario y en virtud del teorema de Basú, $\bar{X}$ y S son independientes.

P2| a), b), c), d), e) propuestas.

f) Usando el teorema de Rao-Blackwell:

$$\hat{\psi}(S)=\mathbb{E}(\tilde{\psi}_{x_i}\mid S(x)=s)=\mathbb{E}(e^{tx_1}\mid S(x)=s)$$

$$\overset{d)}{=}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\left(\frac{e^t}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s-k}$$

$$\overset{\text{Newton}}{=}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{e^t}{n}\right)^s$$