

El control va a constar de 3 partes principalmente: Residuos, Fourier y EDP's.

I. Residuos:

Siempre recuerden que si $f \in H(\Omega)$ y $\gamma \in \Omega$:

$$\rightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Considerando que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y que Ω es simple conexo.

Si se nos "escapan" partes no holomorfas, algunas se pueden parchar. En el C2 vimos que se usaba el cálculo indirecto (Teorema de Cauchy-Goursat).

Ahora, dependiendo del tipo, tenemos el cálculo de la integral mediante residuos:

Se tienen:

- Punto Singular Aislado: (PSA); $\{p\}$
 $"\exists r > 0$ tal que $f \in H(D_r(p, r) \setminus \{p\})$ y f es no holomorfo en p ".

Ej: $f(z) = \frac{z}{z}$, $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$, ...

- Punto Singular Evitable: (PSE); $\{p\}$
 $"Es PSA y además $\lim_{z \rightarrow p} f(z) \exists"$ ".$

Ej: $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z}$

Como son "parchables" en general se usa S.H. para corroborarlo...

- Polo: $\{p\}$

"Es PSA y $\exists m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ tal que:

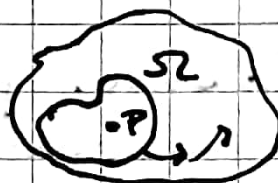
$$\lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m \cdot f(z) \exists \text{ y es no nulo}."$$

$m \rightarrow$ orden del polo. (Si $m=1 \rightarrow$ Polo simple)

¡Ojo! Noten que las singularidades evitables son "polos" de orden 0: , ,

y... ¿cómo integramos entonces una función con polos?

Teorema del Residuo:



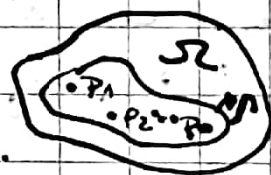
Sea p un polo de orden m , con $f: \Omega \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$ y con $p \in \Omega$. Sea $\gamma \subseteq \Omega$ cerrada.

Entonces $\oint_{\gamma} f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}(f, p)$

con $\operatorname{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-p)^m f(z))$

¿y si tengo muchos?

¡Se suman! : $\oint_{\gamma} f(z) = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, p_i)$



Ya, bkn, ¿y eso es todo? ... No.

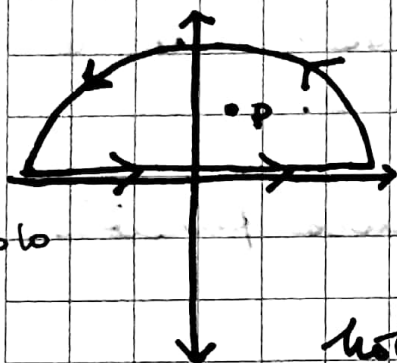
Tienen que tener ojo. Este teorema es bkn y tiene muchas consecuencias.

Primero, para usarlo siempre deben saber los polos, por lo que es necesario "transformar" sen's funciones (si es que se puede) a polinomios.

O sea:
$$\left. \begin{array}{l} pe^{i\theta} \rightarrow z \\ \operatorname{sen} \theta \rightarrow \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ \operatorname{cos} \theta \rightarrow \frac{z + z^{-1}}{2} \end{array} \right\} \text{Así es más fácil ver los polos.}$$

$\rightarrow$ Revisar P2 Auxiliar 9

Segundo; ahora se puede calcular de forma "más fácil" integrales en $\mathbb{R}$:



Si tenemos que calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \text{ usamos}$$

el límite de este: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$

Notamos que hay 3 integrales en la figura... ($R \rightarrow \infty$)

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx.$$

$\text{①} \quad \text{②} \quad \text{③}$

No voy a argumentar acá porque, pero verifiquen en qué casos $\text{②} \rightarrow 0$ (Hint: Lemma de Jordan, apuntes clase 21 profe, Residue Theorem en Wikipedia). El resultado implica que $\text{①} = \text{③}$, y ① se calcula mediante residuos.

¿En qué casos vemos esto?

Ejemplos: Clase 21 profesor: $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)} dx$

P3 Auxiliar

En general, se ve con Polinomios donde el grado del denominador es ≥ 2 que el del numerador.

Tercero: Integrales de la forma: $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(sx) f(x) dx$

→ En estos casos no apaña $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f(x) dx$ lo visto arriba... Revisen clase 22 del profe y recuerden que:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Cuarto... ¡Recuerden el truco!

Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ con g y h polinomios,

y p es polo simple de f , entonces:

$$\text{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right)_p = \frac{g(p)}{h'(p)} \rightarrow \text{simplemente eso.}$$

II Fourier:

Se busca representar cosas periódicas.

A. Series de Fourier:

Sea $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$, una función continua a trozos.
Diremos que f admite serie de Fourier en $[-l, l]$ si:
 $(a_n), (b_n)$ sucesiones tales que:

$\forall x \in [-l, l]$ la serie:

$$\rightarrow S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\text{con: } a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(s) ds$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(s) \cos\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds$$

es convergente.

El periodo de las funciones trig. es de $2l$.

Pregunta válida: ¿Cuándo f admite desarrollo en series de Fourier?

¿Cuándo $f(x) = S_f(x)$? ver P2 Apx 10

1) Si f es integrable en $[-l, l]$ (integrable = $\int_{-l}^l |f| < \infty$)

2) Si $f \in C^2([-l, l]) \rightarrow$ clase C^2 .

↳ Confirman condiciones en el apunte.

¡Recuerden!: Si f es periódica de periodo T i se cumple que $f(x) = f(x+T)$.

Esto se aplica cuando uno integra!
Si mis límites de integración difieren por un periodo y sé que es continua, entonces al integrar la derivada será 0: $\int_0^T f'(x) dx = f(T) - f(0) = 0$.

Revisen apuntes de la clase 24 para confirmar consecuencias de que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_f(x) = f(x)$:

$$\rightarrow S_f(e) = S_f(-e) = \frac{1}{2} (f(e) + f(-e))$$

$$\rightarrow \forall x \in (-e, e) \text{ (donde } f \text{ es continua)}: S_f(x) = f(x)$$

$$\rightarrow \forall x \in (-e, e) \text{ (donde } f \text{ no es continua)}:$$

$$S_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Ojo: Si f es par $\rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$

Si f es impar $\rightarrow a_n = a_0 = 0 \quad \forall n$

↳ Esto funciona cuando corroboran paridad.

No todas las funciones son pares o impares siempre:

Ej: Caso 1: La función $\cos(x)$ no es par en el intervalo $(0, \infty)$, lo es en $(-\infty, \infty)$

Caso 2: La función $f(x) = x^2 + x$ no es par ni impar en $\mathbb{R}$.

Identidades:

→ Sea $f \in C^1$, 2ℓ -periódico $\mid \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = 0$:

$$> \text{Parseval: } \int_{-\ell}^{\ell} f^2(x) dx = \ell \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$> \text{Si } f \in C^2: \int_{-\ell}^{\ell} (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

(Aux 10)

Hint: Recuerden que pueden trasladar funciones a "gusto" para calcular integrales. Ej. cambio de variables.

B. Transformada de Fourier:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrable (es decir $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$),
entonces la transformada de Fourier es:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx \rightarrow \text{Noten que para tener a } s \text{ integramos en torno a } x.$$

y la antitransformada:

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{ixs} ds \rightarrow \text{y que para tener a } x \text{ integramos a } s.$$

Lo bn es que al ser integrales son lineales.

Vamos propiedades:

- Linealidad
- Traslación en el espacio: $\widehat{f(x-x_0)}(s) = e^{-isx_0} \hat{f}(s)$
- Traslación en frecuencia: $\widehat{f(x)}(s-s_0) = e^{is_0x} \hat{f}(s)$
- Cambio de escala: $\forall a \neq 0: \widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
- Inversión espacio-tiempo: $\widehat{\widehat{f(x)}}(s) = \hat{f}(-s)$
- Linealidad en el ^{negativa}conjugado: $\widehat{\overline{g(x)}}(s) = \overline{\hat{g}(-s)}$
- Ponderación Trigonométrica:
 - $\widehat{f(x) \cos(\omega_0 x)}(s) = \frac{1}{2} [\hat{f}(s-\omega_0) + \hat{f}(s+\omega_0)]$
 - $\widehat{f(x) \sin(\omega_0 x)}(s) = \frac{1}{2i} [\hat{f}(s-\omega_0) - \hat{f}(s+\omega_0)]$
- Convolución: $(f * g)(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s)$
- Derivada: $\hat{f}'(s) = (is) \hat{f}(s)$ (se puede aplicar $\hat{f}^{(n)}(s) = (is)^n \hat{f}(s)$ con + derivadas !)

Recuerden la similitud entre T. de Laplace y Fourier...

Definición Convolución:

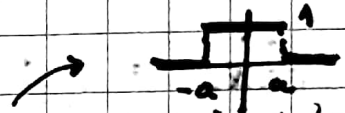
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(x-y) dy$$

Hint: Para los integrales, recuerden propiedades del sen:
 $\text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \rightarrow$ aparece al integrar exponenciales y resto. $\int e^{ix} dx$.

Identidades relacionadas:

> Plancherel: $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{g(y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \overline{\hat{g}(s)} ds$

> Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$.



Recordar: la función $\mathbb{1}_{[-a, a]}$ define la integral, un caso extremo de ella es la delta de Dirac.

III. Ecuaciones Diferenciales Parciales:

Esta parte es muy "recta".

Lo que se busca es una función en varias variables: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (en general en este curso $n=2,3$).
 y se requiere que cumpla una ecuación en la que aparezcan derivadas parciales.

Un ejemplo común son las: (Ejemplos)

• Elípticas: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$ (Laplace)

• Parabólicas: $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = 0$ (Ec. de calor)

• Hiperbólicas: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$ (Ec. de onda)

No quédé sin tiempo, espero que hasta donde llego el resumen les sirva.

Que tengan un buen día, y cual quier consulta al correo: bernardita.riedg@gmail.com.

¡Mucha suerte en el estudio!