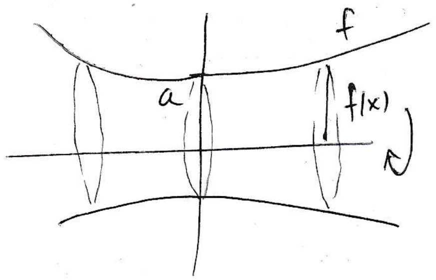
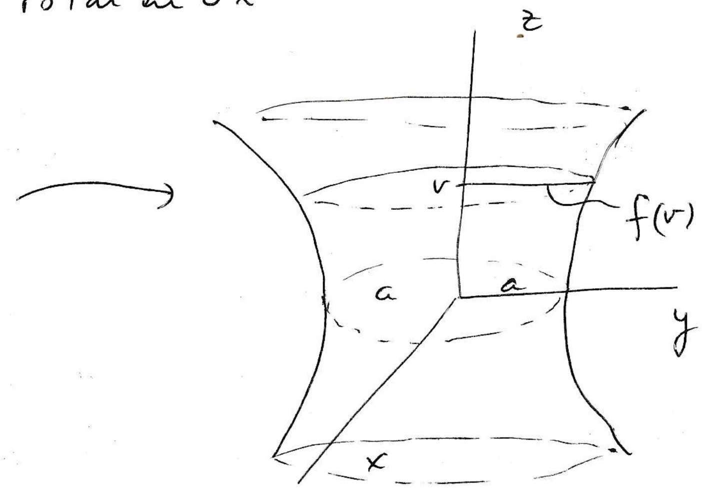
Pauta C1 - MA 2002 Primavera 2018: Pregunta 1:

a) i) $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a\left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)$

idea: La superf. se obtiene al rotar en OX el gráfico de f





Dado $v \in \mathbb{R}$ (altura en z)

Como $\vec{\varphi}(u,v) = (\underbrace{a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u}_{x(u,v)}, \underbrace{a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\operatorname{sen} u}_{y(u,v)}, v)$

Se tiene: $x^2(u,v) + y^2(u,v) = a^2\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)$ ← círculo de radio $a\cosh\left(\frac{v}{a}\right) = f(v) = f(z)$

ii) $\vec{\varphi}(u,v) = \left(a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\operatorname{sen} u, v\right)$ $u \in [0,2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow (u,v) \in D = [0,2\pi) \times \mathbb{R}$.

Notar que $\vec{\varphi} \in C^\infty(D, \mathbb{R}^3)$.

Calculemos $\hat{n}(u,v) = \dfrac{\partial_u\vec{\varphi} \times \partial_v\vec{\varphi}}{\|\partial_u\vec{\varphi} \times \partial_v\vec{\varphi}\|}$. Recordar que: $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$

$\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$.

$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.

$\partial_u\vec{\varphi} = \left(-a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\operatorname{sen} u, a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, 0\right)$

$\partial_v\vec{\varphi} = \left(\operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, \operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)\operatorname{sen} u, 1\right)$

Luego: $\partial_u\vec{\varphi} \times \partial_v\vec{\varphi} = \Big(a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\operatorname{sen} u, -a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\operatorname{sen}^2 u \operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)$
$- a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos^2 u \operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)\Big)$

$= a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\left(\cos u, \operatorname{sen} u, -\operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)\underbrace{\left(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u\right)}_{1}\right)$

$= a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\left(\cos u, \operatorname{sen} u, -\operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)\right)$.

y $\|\partial_u\vec{\varphi} \times \partial_v\vec{\varphi}\| = a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\left(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u + \operatorname{senh}^2\left(\frac{v}{a}\right)\right)^{1/2} = a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\Big(\underbrace{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{v}{a}\right)}_{\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)}\Big)^{1/2}$

$= a\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)$

$\therefore \quad \hat{n}(u,v) = \dfrac{a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\left(\cos u, \operatorname{sen} u, -\operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)\right)}{a\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right)} = \dfrac{1}{\cosh\left(\frac{v}{a}\right)}\left(\cos u, \operatorname{sen} u, -\operatorname{senh}\left(\frac{v}{a}\right)\right)$

iii) Para $v \in [-l, l]$ debemos calcular

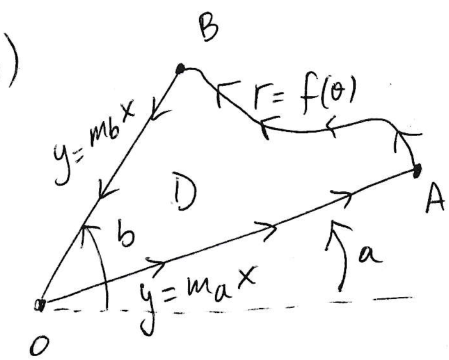
$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \|\partial_u \vec{\varphi} \times \partial_v \vec{\varphi}\| \, du\,dv = \int_{-l}^{l}\int_0^{2\pi} a\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) du\,dv$$

$$= 4\pi \int_0^{l} a\cosh^2\left(\frac{v}{a}\right) dv \underset{\substack{\frac{v}{a} = x \\ dv = a\,dx}}{=} 4\pi a \int_0^{l/a} \cosh^2(x)\, a\,dx = 4\pi a^2 \int_0^{l/a} \cosh^2(x)\,dx$$

$$= 4\pi a^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{l}{a} + \operatorname{senh}\left(\frac{l}{a}\right)\cosh\left(\frac{l}{a}\right)\right)$$

$$= 2\pi a^2 \left(\frac{l}{a} + \operatorname{senh}\left(\frac{l}{a}\right)\cosh\left(\frac{l}{a}\right)\right).$$

b)



$\partial D = \Gamma \cup \overline{OA} \cup \overline{BO}$ es cerrada simple, reg. a trozos.

Usemos Green en el plano:

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + \int_{\overline{OA}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + \int_{\overline{BO}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}\right).$$

$x = x(\theta) = f(\theta)\cos\theta$

$y = y(\theta) = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \begin{pmatrix} -f(\theta)\operatorname{sen}(\theta) \\ f(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta \\ f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta \end{pmatrix} d\theta = \int_a^b -\cancel{ff'\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + f^2\operatorname{sen}^2\theta + \cancel{ff'\cos\theta\operatorname{sen}\theta} + f^2\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_a^b f^2(\theta)(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = \int_a^b f^2(\theta)\,d\theta.$$

Para las otras dos, notemos que para cualquier recta $y = mx$

$$\int_{\text{recta}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} \underset{\substack{x = t \\ y = mt}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} -mt \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} dt = \int_{t_1}^{t_2} (-mt + mt)\,dt = 0!!$$

y se concluye sumando.

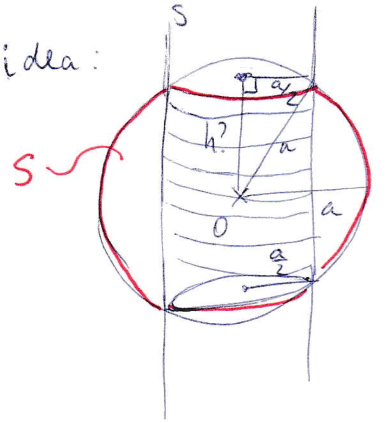
P2 a) $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$; $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \neq 0\}$; $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \rho\hat{k}$.

S = porción de $x^2+y^2+z^2 = a^2$ fuera del cilindro $x^2+y^2 \leq a^2/4 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = a^2 \wedge x^2+y^2 > \left(\frac{a}{2}\right)^2\}$

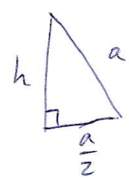
Se pide $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

idea:



S = porción de la superficie de esfera de radio a exterior al cilindro de radio $\frac{a}{2}$.

Del dibujo podemos determinar la altura h asociada al "corte" con el cilindro:



$\Rightarrow h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$

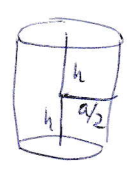
La idea (naturalmente) es usar Teo. divergencia, más aun si:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\underbrace{\rho \cdot \frac{1}{\rho}}_{1}\Big) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(0)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\rho)}{\partial z} = 0 \, !!$$

Sin embargo, hay que cerrar la superficie (de modo tal que sea el borde geométrico ~~del~~ un volúmen) y hay que hacerlo de modo tal que $\vec{F}$ sea C^1!!

opciones: $\tilde{S} = S \cup$ Tapas en $z=h$ y $z=-h$ X no sirve pues las tapas poseerán ptos tq $x^2+y^2=0$ donde $\vec{F}$ no es C^1

$\tilde{S} = S \cup$ borde cilindro ~~de~~ radio basal $\frac{a}{2}$ entre $-h$ y h.

es decir $\tilde{S} = S \cup$  $= \{(x,y,z) / x^2+y^2+z^2 = a^2 \wedge x^2+y^2 > \frac{a^2}{4}\}$
$\cup \{(x,y,z) / x^2+y^2 = \frac{a^2}{4}, z \in [-h,h]\}$

$= S \cup M$

En tal caso, por Teo de la divergencia de Gauss:

$$\iint_{\tilde S} \vec F\cdot d\vec S = \iint_S \vec F\cdot d\vec S + \iint_M \vec F\cdot d\vec S = \iiint_{\text{Vol encerrado}} \overset{0}{\overset{\|}{\operatorname{div}}}(\vec F)\,dV = 0$$

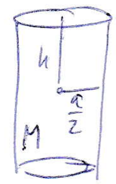
$\therefore \displaystyle\iint_S \vec F\cdot d\vec S = -\iint_M \vec F \cdot d\vec S$, esta última integral es fácil de calcular a mano.

Siempre orientando según normal exterior al volumen!!

$$\iint_M \vec F\cdot d\vec S = \iint_M \left(\frac{1}{\rho}\hat\rho + \rho\hat k\right)\cdot \underbrace{\hat n_{ext}}_{(-\hat\rho)}\, dS \underset{\substack{\text{en } M\\ \rho=(\frac a2)}}{=} \iint_M \left(\frac{2}{a}\underbrace{(-\hat\rho\cdot\hat\rho)}_{-1} + \frac a2 \underbrace{\hat k\cdot\hat\rho}_{0}\right) dS$$

$$= -\frac2a \iint_M dS = -\frac2a \,\text{Area}(M)$$

pero



$$\acute A = 2\pi r(2h) = 2\pi\left(\frac a2\right)\cdot\left(2\frac{\sqrt3}{4}a\right) = \pi\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt3}{2}$$

$$= -\frac{\cancel{2}}{\cancel{a}}\cdot\frac{\sqrt3}{\cancel{2}}\,\pi a^{\cancel{2}} = -\sqrt3\,\pi a$$

$$\therefore \iint_S \vec F\cdot d\vec S = -\iint_M \vec F\cdot d\vec S = -(-\sqrt3\,\pi a) = \sqrt3\,\pi a$$

b) (ECM) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = T_0 & \text{sobre } \Sigma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u & \text{sobre } \Sigma_2 \end{cases}$ Ω conexo, $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ regular.
$\alpha > 0$, $T_0 \geq 0$ ctes.
$\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \hat{n}$.

i) Supong. $T_0 = 0$. Veamos que $u \equiv 0$ en Ω.
Sigamos la indicación: Probemos que $\iiint_\Omega \|\nabla u\|^2 dV + \alpha \iint_{\Sigma_2} u^2 dS = 0$.

En efecto, como $\Delta u = 0$ en $\Omega \Rightarrow u \cdot \Delta u = 0$ en Ω

luego: $\iiint_\Omega u \Delta u = 0$ pero $\operatorname{div}(u \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla u + u \cdot \Delta u = \|\nabla u\|^2 + u \Delta u$

Entonces, por Gauss: $\iint_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot \hat{n} dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}(u \nabla u) dV = \iiint_\Omega \|\nabla u\|^2 + u \Delta u \, dV$

$(\Leftrightarrow) \underbrace{\iiint_\Omega u \cdot \Delta u \, dV}_{= 0} = -\iiint_\Omega \|\nabla u\|^2 + \iint_{\partial\Omega} u \underbrace{(\nabla u \cdot \hat{n})}_{\frac{\partial u}{\partial n}} dS$, pero $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$$0 = -\iiint_\Omega \|\nabla u\|^2 + \iint_{\Sigma_1} \underbrace{u}_{T_0 = 0} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dS + \iint_{\Sigma_2} u \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{-\alpha u} dS$$

$$\therefore 0 = -\iiint_\Omega \|\nabla u\|^2 dV - \alpha \iint_{\Sigma_2} u^2 dS$$

$$0 = \iiint_\Omega \|\nabla u\|^2 dV + \underbrace{\alpha}_{>0} \iint_{\Sigma_2} u^2 dS \checkmark$$

Notar que cada integral es ≥ 0
$\Rightarrow \|\nabla u\|^2 = 0$ en $\Omega \Rightarrow \nabla u = 0$ en Ω
$\Rightarrow u$ cte. en Ω.
(conexo!)

y: $u^2 = 0$ sobre $\Sigma_2 \Rightarrow u = 0$ sobre Σ_2

Como u es cte. en Ω y $u = 0$ sobre Σ_2 + $u \in C^1(\bar{\Omega}) \Rightarrow u$ cont. en $\bar{\Omega}$
$\Rightarrow u = 0$ en $\bar{\Omega}$.

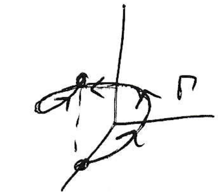
ii) Supong. existen dos soluciones: u_1, u_2 satisf. (ECM)

luego $w := u_1 - u_2$ satisface $\begin{cases} \Delta w = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0 - 0 = 0 \text{ en } \Omega \\ w = u_1 - u_2 = T_0 - T_0 \text{ sobre } \Sigma_1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = \dfrac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial n} = \dfrac{\partial u_1}{\partial n} - \dfrac{\partial u_2}{\partial n} = -\alpha u_1 + \alpha u_2 = \alpha w \text{ en } \Sigma_2 \end{cases}$

ie. w satisface (ECM) con $T_0 = 0$, por i) $\Rightarrow w \equiv 0$ en $\Omega \Rightarrow u_1 = u_2$ en Ω.

P3 a) $$\int_\Gamma \left(xe^{x^2+y^2+z^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ ye^{x^2+y^2+z^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ ze^{x^2+y^2+z^2} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\cdot d\vec{r}$$

Γ: Hélice que une $(1,0,0)$ con $(1,0,1)$



Reescribamos el campo a integrar:

$$\vec{F} = \left(x\left(e^{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\ y\left(e^{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\ z\left(e^{x^2+y^2+z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right)\cdot d\vec{r}$$

$$= \Big(e^{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2}} + \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{r}}\Big)\underbrace{(x,y,z)}_{r\hat{r}} = \left(e^{r^2} + \frac{1}{r}\right) r\hat{r} = \left(re^{r^2}+1\right)\hat{r}.$$

simetría esférica!

Luego, queremos $\displaystyle\int_\Gamma \underbrace{(re^{r^2}+1)\,\hat{r}}_{\vec{F} = F_r\hat{r} \text{ con } F_r = f(r)}\cdot d\vec{r}$

de la fórmula del rotor, es inmediato que $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$

luego, el campo es conservativo y $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = g(1,0,0) - g(1,0,1)$ con g el potencial con $\vec{F} = -\nabla g$.

Como $\vec{F}(r,\varphi,\theta) = (re^{r^2}+1)\hat{r} \underset{\vec{F}=-\nabla g}{\Rightarrow} re^{r^2}+1 = -\dfrac{\partial g}{\partial r} \Rightarrow \boxed{g(r) = -r - \dfrac{e^{r^2}}{2}}$

$$\therefore \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\left(1+\frac{e}{2}\right) + \left(\sqrt{2} + \frac{e^2}{2}\right) = (-1+\sqrt{2}) + \frac{e(e-1)}{2}$$

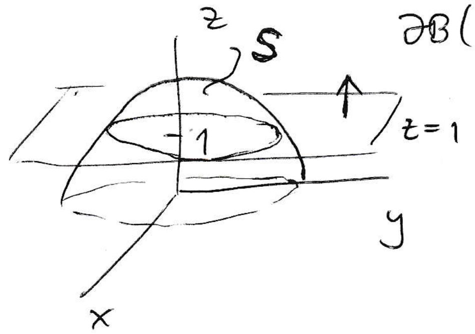
Obs. Puede hacerse en cartesianas, reconociendo "al ojo" el potencial

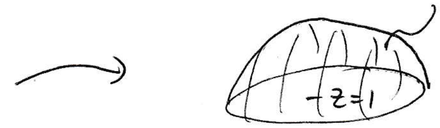
argumentando la simetría de las derivadas en x, y y z.

$$g(x,y,z) = -\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{2}e^{(x^2+y^2+z^2)}$$

b) Nos piden ~~[illegible]~~ el FLUJO de $\nabla \times \vec{F}$ con $\vec{F} = (e^z + x^2 y,\ z + xy^2,\ y^2\sqrt{1+z^4})$

En $S = \{(x,y,z) \mid \underbrace{x^2+y^2+z^2=4}_{\partial B((0,0,0),2)},\ z \geq 1\}$.





S: puntos de la esfera con $z \geq 1$.

Nos piden $\displaystyle\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$, con normal ext. a la esfera: $\hat{n}$.
hay dos formas de hacer el problema:
Con Teo. de Stokes ① y Gauss ②:

① $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, S es regular y ∂S es curva cerrada simple regular

(∂S = circunf. de centro $(0,0,1)$, radio $\sqrt{3}$ y en el plano $z=1$)

$x^2+y^2+1=4$
$\iff x^2+y^2=3$

La orient. está dada por la regla de la mano derecha, luego:

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} \underset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial S = \Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

, calculemos esa integral a mano:

Param. de Γ: $\vec{r}(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1)$ $t \in [0, 2\pi)$

$\vec{r}\,'(t) = (-\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t, 0)$

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^1 + 3\cos^2 t\sqrt{3}\sin t \\ 1 + \sqrt{3}\cos t\, 3\sin^2 t \\ 3\sin^2 t\sqrt{1+1^4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sin t \\ \sqrt{3}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-e\sqrt{3}\sin t - \cancel{9\cos^2 t\sin^2 t} + \sqrt{3}\cos t + \cancel{9\cos^2 t\sin^2 t} + 0\right) dt$$

integro sen y cos en un periodo

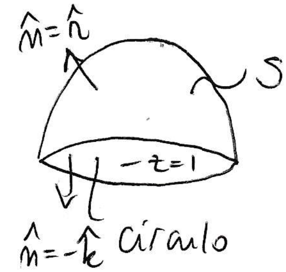
$$= \int_0^{2\pi} \left(-e\sqrt{3}\sin t + \sqrt{3}\cos t\right) dt = 0$$

$$\therefore \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S = \Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

(2) Con Gauss: $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ✓, S no es cerrada $\Rightarrow$ debe cerrarse (para ser el borde de un volumen)

$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

Sea $\tilde{S} = S \cup$ círculo encerrado por ∂S.



$\Rightarrow \tilde{S} =$  $\cup$ 

Tapa

; $\tilde{S}$ es sup. regular a trozos y es el borde del abto $\Omega = B((0,0,0),2) \cap \{z \geq 1\}$

Así, por Gauss aplicado a $\nabla \times \vec{F}$ en $\tilde{S}$

$$\iint_{\partial\Omega = \tilde{S} = S \cup \text{Tapa}} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div}(\nabla \times \vec{F})}_{=0 \text{ (identidad conocida)}} dV = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{\tilde{S}} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{S} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Tapa}} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Orient. según $\hat{n}$ ext. a Ω.

$$\Leftrightarrow \iint_{S} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{\text{Tapa}} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

aquí la normal es $-\hat{k}$.

$$= -\iint_{\text{Tapa}} \nabla \times \vec{F} \cdot (-\hat{k})\, dS = \iint_{\text{Tapa}} \underbrace{\nabla \times \vec{F} \cdot \hat{k}}_{\text{solo interesa coord. en } \hat{k}} dS$$

$$(\nabla \times \vec{F})_z = \partial_x(z + xy^2) - \partial_y(e^z + x^2 y) = y^2 - x^2$$

$$\therefore \iint_{S} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Tapa}} (y^2 - x^2)\, dS = \iint_{\text{Tapa}} y^2 dS - \iint_{\text{Tapa}} x^2 dS \underset{\text{¡Por simetría!}}{=} 0$$

lo mismo que antes.

Si no usan simetría: Param Tapa: $\vec{\varphi}(\rho, \theta) = \rho\hat{\rho} + 1 \cdot \hat{k}$, $\rho \in [0, \sqrt{3}]$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$\Rightarrow dS = \rho\, d\rho\, d\theta$

$$\text{y da: } \iint_{\text{Tapa}} (y^2 - x^2)\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta - \rho^2 \cos^2\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta = \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\sqrt{3}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\, d\theta}_{=0}$$

$$= 0.$$