MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Matías Godoy C.
Auxiliares: Cristóbal Valenzuela - Bernardita Ried.
Jueves 25 de Octubre de 2018

Control 1

P1. (a) **(3 ptos.)** La **catenoide** es la superficie obtenida al rotar la catenaria en torno al eje OX, es decir, al rotar el gráfico de la función $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, con $a > 0$ una constante y $x \in \mathbb{R}$. Una parametrización para esta superficie está dada por:

$$\vec{\varphi}(u,v) = \left(a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\cos u, a\cosh\left(\frac{v}{a}\right)\operatorname{sen} u, v\right),\ u \in [0,2\pi), v \in \mathbb{R}$$

Recuerde que $\cosh(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$, $\sinh(x) = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(i) (0.5 ptos.) Bosqueje la superficie recién definida.

(ii) (1.5 ptos.) Determine el vector normal de la catenoide.

(iii) (1.0 pto.) Para $v \in [-\ell, \ell]$ con $\ell > 0$, determine el área de la catenoide.
Indicación: $\int \cosh^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + \cosh(x)\sinh(x)) + C$.

(b) **(3 ptos.)** Sea Γ una curva simple, regular por trozos contenida en el plano XY. Suponga que Γ está parametrizada en coordenadas polares vía la relación $r = f(\theta)$, es decir:

$$x(\theta) = f(\theta)\cos\theta, \quad y(\theta) = f(\theta)\sin\theta \quad \theta \in [a,b] \subset [0,2\pi)$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es $\mathcal{C}^1$ y 2π-periódica. Sea D la región encerrada por Γ y las rectas $y = m_a x$ e $y = m_b x$, que unen los extremos de Γ con el origen y cuyas pendientes son las asociadas a los ángulos a y b. Pruebe que:

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2 d\theta$$

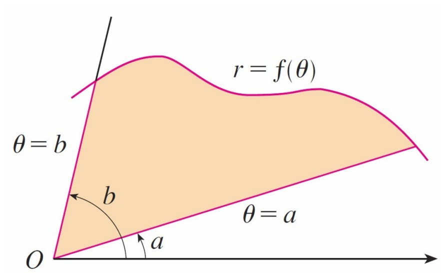

Figura 1: Esquema de la situación.

P2. (a) **(3 ptos.)** Sea $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, donde $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$, el campo vectorial dado por $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \rho\hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Sea S la porción del casquete esférico $x^2+y^2+z^2 = a^2$ que se encuentra fuera del cilíndro $x^2+y^2 \leq a^2/4$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de S orientada según la normal exterior.
Indicación: Note que $1/\rho$ no está bien definido en el eje z.

(b) **(3 ptos.)** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo por caminos de frontera regular $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Sea $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ solución de la ecuación del calor en régimen estacionario con condiciones de borde mixtas:

$$(ECM)\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = T_0 & \text{sobre } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u & \text{sobre } \Sigma_2 \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $T_0 \geq 0$ son constantes conocidas y $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \hat{n}$ es la denominada *derivada normal* de u.

(i) (1.5 ptos.) Pruebe que en el caso $T_0 = 0$ se tiene $u = 0$ en todo Ω.
Indicación: Recuerde que la $\text{div}(u\nabla u) = \|\nabla u\|^2 + u\Delta u$. Use esto para probar que:

$$\iiint_{\Omega} ||\nabla u||^2 dV + \alpha \iint_{\Sigma_2} u^2 dS = 0.$$

(ii) (1.5 ptos.) Deduzca que la ecuación (ECM) posee a lo más una solución $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$.

P3. **(a)** **(3.0 ptos.)** Sea Γ la hélice que une los puntos $P(1,0,0)$ y $Q(1,0,1)$, recorridos en este orden, al dar exactamente una vuelta. Calcule:

$$\int_{\Gamma} \left(x \cdot e^{x^2+y^2+z^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ y \cdot e^{x^2+y^2+z^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ z \cdot e^{x^2+y^2+z^2} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \cdot d\vec{r}$$

Indicación: Puede ser útil recordar que $\displaystyle\int u e^{u^2} du = \frac{e^{u^2}}{2} + C$.

(b) **(3.0 ptos.)** Sea S la superficie del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que se encuentra en la región $z \geq 1$ y que se orienta según la normal exterior a la esfera. Calcule el flujo de $\nabla \times \vec{F}$ a través de S donde $\vec{F}(x,y,z) = (e^z + x^2 y)\hat{\imath} + (z + xy^2)\hat{\jmath} + y^2\sqrt{1+z^4}\hat{k}$

Fórmulas útiles
Factores escalares de sistemas de coordenadas ortogonales usuales:
Sean (u,v,w) ordenados según mano derecha.
Para $\vec{r} = \vec{r}(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$: $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$, $h_z = 1$.
Para $\vec{r} = \vec{r}(r,\varphi,\theta) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$: $h_r = 1$, $h_\varphi = r$, $h_\theta = r\sin\varphi$.

Gradiente, divergencia y rotor en sistemas de coordenadas ortogonales:
Sea $\vec{F} = F_u\hat{u} + F_v\hat{v} + F_w\hat{w}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ y f un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned}
\nabla f(u,v,w) &= \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}, \quad \Delta f = \text{div}\,\nabla f \\
\text{div}\,\vec{F}(u,v,w) &= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_w h_u) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)\right] \\
\text{rot}\,\vec{F}(u,v,w) &= \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_w F_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_v F_v)\right]\hat{u} + \frac{1}{h_w h_u}\left[\frac{\partial}{\partial w}(h_u F_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_w F_w)\right]\hat{v} \\
&\quad + \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v F_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_u)\right]\hat{w}
\end{aligned}$$

Teoremas de integración: Dado un abierto Ω de frontera $\partial\Omega$, una superficie S de frontera ∂S y una región plana D de frontera ∂D cumpliendo las hipótesis de orientación y regularidad que sean necesarias (y que usted conoce muy bien), entonces: Para $\vec{F}$ un campo vectorial y M, N campos escalares suficientemente regulares:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \text{div}\,\vec{F} dV, \qquad \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\partial D} M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy, \qquad A(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy - ydx = \oint_{\partial D} xdy$$

Otros:

$$dS = \|\partial_u\vec{\varphi} \times \partial_v\vec{\varphi}\| dudv,\ d\vec{S} = \partial_u\varphi \times \partial_v\varphi\ dudv,\ d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)dt$$

$$\text{div}(f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$$

Una hélice que une los puntos $P(1,0,0)$ y $Q(1,0,a)$ puede parametrizarse vía $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), at/(2\pi))$, $t \in [0, 2\pi]$.