Problema 3

(a) v es sol. de (EQ) pues

cumple EQ
0.3

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(solo difieren en una constante

CBH
0.3

$$v(0\,t) = u(0\,t) - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$v(\pi, t) = u(\pi, t) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Finalmente

CI
0.4

$$v(x, 0) = u(x, 0) - 1 = f(x) - 1$$

así que $g(x) = f(x) - 1$

(b) Reemplazar $v(x\,t) = X(x)\,T(t)$ en EQ

0.3
reemplaza

$$XT' = X''T \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

función de t = función de x debe ser constante: $\lambda \in \mathbb{R}$

0.3
existe λ

$$T' = \lambda T \quad \wedge \quad X'' = \lambda X$$

Y (CBH) $\quad X(0)\,T(t) = 0 \quad \forall t$

solución no nula si $X(0) = 0$

0.4
$X(0) = X(\pi) = 0$

$X(\pi)\,T(t) = 0 \quad \forall t$

solución no nula si $X(\pi) = 0$

Problema a resolver $\quad T'(t) = \lambda T(t)$

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(\pi) = 0$$

(c) caso $\boxed{\lambda > 0}$

soluciones $X(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$

CBH: $X(0) = A \cdot 1 + B \cdot 1 = 0 \Rightarrow A = -B$

descartar $\lambda<0$
0.5

$X(x) = 2A \cosh(\sqrt{\lambda} x)$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow 2A \cosh(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow A = 0$
no sirve

caso $\boxed{\lambda = 0}$ soluciones $X(x) = Ax + B$

descartar $\lambda=0$
0.5

pero $X(0) = X(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0$
no sirve

$\boxed{\lambda < 0}$ soluciones $X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + B\,\text{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x)$

$X(0) = 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \Rightarrow A = 0$

$X(\pi) = 0 = B\,\text{sen}(\sqrt{\lambda} \cdot \pi)$

para tener $B \neq 0$, solo se podría con

$\sqrt{-\lambda} \cdot \pi = n\pi$ (ceros de sen(·))

obtener los valores de λ
1.0

$\Rightarrow \boxed{\lambda = -n^2}$

así $X_n(x) = \text{sen}(nx)$ son las

únicas soluciones no nulas de

$X'' = \lambda X \quad X(0) = X(\pi) = 0$

(d) $\lambda_n = -n^2 \qquad X_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$

y $T_n(t)$ sol. de $T_n' = \lambda_n T_n$

$$\Rightarrow T_n(t) = \exp(-n^2 t)$$

las soluciones son

$$v_n(x,t) = \operatorname{sen}(nx)\exp(-n^2 t)$$

y buscar

$$v(x\ t) = \sum \alpha_n \operatorname{sen}(nx)\exp(-n^2 t)$$

Con la condición inicial, se obtiene

$$v(x,0) = g(x) = f(x) - 1$$

$$= \sum \alpha_n \operatorname{sen}(nx) \cdot 1$$

(aquí lo más simple es recordar que $\{\operatorname{sen} nx\}$ es familia ortogonal completa en $L^2[0\ \pi]$)

Usar ortogonalidad para obtener α_n (0.6)

$$(g, \operatorname{sen} mx) = \alpha_m \underbrace{(\operatorname{sen} mx, \operatorname{sen} mx)}_{\pi/2}$$

expresión correcta (0.2)

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi/2}\int_0^\pi g(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (f(x)-1)\operatorname{sen} mx\,dx$$

$u = v+1$ y serie para u (0.2)

$$\Rightarrow u(x,t) = 1 + \sum \alpha_n \operatorname{sen}(nx)\exp(-n^2 t)$$

(e) Basta con notar

$$\exp(-n^2 t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$ 1pto

como "justificación" de que

$$\sum \alpha_n \sin nx \exp(-n^2 t) \longrightarrow 0$$

Nota: Si lo hacen, acotando la serie por una cota que tiende a 0 me los envías (copia al correo!) Si está correcto, les daré un bonus

Por ejemplo $|\alpha_n|$ acotados pues $\sum \alpha_n^2$ converge

$$\left| \sum \alpha_n \sin nx \exp(-n^2 t) \right|$$

$$\le \sum |\alpha_n| \cdot 1 \cdot \exp(-n^2 t)$$

$$\le C \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n t)^n$$

$$\le C \exp(-t) + C \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-nt)^n$$

Si $n \geq 2$ $\exp(-nt) \le \exp(-2t) \le \exp(-t)\exp(-t)$

$$\le C \exp(-t) + C \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \exp(-t-t)^n}_{\le \exp(-t) \sum \exp(-t)^n}$$

$$\le C \exp(-t) \left\{ 1 + \sum [e^{-t}]^n \right\} = C \exp(-t) \left\{ 1 + \frac{1}{1-e^{-t}} \right\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$