## Problema 3

a) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y^3}{r^4}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \dfrac{3x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^3}$

1 pto por 2 derivadas parciales

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-xy^2}{r^4}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{-xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \dfrac{3x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^3}$

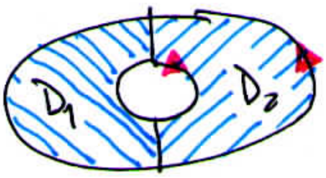
b) Como círculo $c_\varepsilon(t) = (\varepsilon \cos t, \varepsilon \operatorname{sen} t)$ $t \in [0\ 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^3 \operatorname{sen}^3 t \cdot (-\varepsilon \operatorname{sen} t) - \varepsilon \cos t\ \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 t \cdot \varepsilon \cos t}{(\varepsilon^2 \cos^2 t + \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2 t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon^4 \operatorname{sen}^4 t - \varepsilon^4 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t}{\varepsilon^4}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2(t)\, dt = -\pi$$

1 pto por calculo en $C_\varepsilon$




Se puede aplicar Green a una región perforada: $D_1$ y $D_2$ por separado sumando los resultados y luego a $D_1 \cup D_2$

$$\int_{-C_\varepsilon} + \int_{Elipse} = \iint_D 0\, dx\, dy \Rightarrow \int_{elipse} = 0 - \int_{-C_\varepsilon} = \int_{C_\varepsilon} = -\pi$$

1 pto para usar green para calcular la 2° integral

[o 1.0 por calcularla directamente en la elipse!!]

c) Calculo del gradiente

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\frac{xy}{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\theta\right) \qquad \text{si usamos } \theta=\operatorname{atan}(y/x)$$

1pto por calculo correcto de la parte $\nabla\theta$

$$=\left(\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}(-1)2x+\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{-y}{x^2},\right.$$

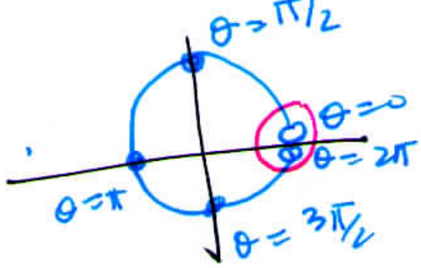
$$\left.(-1)\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Lo que comprueba que $\nabla\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{r^2}-\theta\right)=\vec{F}$

d) El angulo polar $\theta$ tiene una discontinuidad en $\theta=0$

1pto




así que

$$\oint\vec{F}\cdot\vec{dr}=\oint\frac{1}{2}\nabla\frac{xy}{r^2}\cdot\vec{dr}+\oint\frac{1}{2}\nabla\theta\,\vec{dr}$$

$$=0-\left(\frac{1}{2}\theta_{final}-\frac{1}{2}\theta_{inicial}\right)$$

$$=-\pi$$

Calculo obien usando $\theta=\operatorname{atan} y/x$ (aunque esto solo vale en 1º, 4º cuadrante)
obien, usando gradiente en coord. cilr.

$$\nabla\theta=\frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{h_r}\frac{\partial\theta}{\partial r}\hat{r}=\frac{1}{r}\hat{\theta}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}(-y,x)$$

$$=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$