Aplicaciones en operadores diferenciales

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad \left(= \sum_{ij} \delta_{ij} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\cancel{\operatorname{grad}(\vec{F}) = \sum_i \partial F}$$

$$\operatorname{grad}(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{e}_i$$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} F_j \, \hat{e}_k \quad (= \nabla \times \vec{F})$$

Propiedades

1. Linealidad

$$\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{grad}(f) + \beta \operatorname{grad}(g)$$

$$\operatorname{div}(\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \operatorname{div}(\vec{F}) + \beta \operatorname{div}(\vec{G})$$

$$\operatorname{rot}(\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \operatorname{rot}(\vec{F}) + \beta \operatorname{rot}(\vec{G})$$

dem: Trivial. Linealidad de la operación de derivación.

② $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$ para f de clase $\mathcal{C}^2$

dem

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\hat{e}_k$$

$$= \sum_k \left\{\sum_{ij} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\}\hat{e}_k$$

entonces, para cada k, por ejemplo $k=1$

i,j pueden tomar los valores $2,3$ y $3,2$.

O sea. Para $k=1$ $\quad \varepsilon_{231} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} + \varepsilon_{321} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$

$$= (\varepsilon_{231} + \varepsilon_{321}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$$

pues el orden de las derivadas no influye

pues ε_{ijk} es antisimetrico

$\varepsilon_{231} = -\varepsilon_{321}$

$$= 0 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$$

Similar para $k=2$ y $k=3$

<u>nota</u> Un campo cuyo rotor es nulo se dice irrotacional.

Def: $\vec{F}$, campo vectorial, se dice conservativo si es el gradiente de algun campo escalar es decir, existe φ campo escalar tal que

$$\vec{F} = \nabla \varphi$$

(en física se prefiere decir $\vec{F} = -\nabla\varphi$, pues corresponde bien con la interpretación de φ como energía potencial. Pero la propiedad matemática no cambia pues

$$\vec{F} = \nabla\varphi = -\nabla(-\varphi)$$

esto es, basta cambiar φ por $-\varphi$.

<u>Teo</u> Si $\vec{F}$ es conservativo y $\mathcal{C}^2$
Entonces $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$

<u>Conjetura</u> $\operatorname{rot}\vec{F} = 0 \Rightarrow$ ¿$\vec{F}$ conservativo? ...

(3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$ si $\vec{F}$ de clase $\mathcal{C}^2$

<u>dem directo</u>

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \cdots$$

$= 0$ pues el orden de derivación no afecta //

nota Un campo vectorial con divergencia nula se dice solenoidal.

(4) $\quad \mathrm{div}(\varphi \vec{F}) = \nabla\varphi \cdot \vec{F} + \varphi \, \mathrm{div}(\vec{F})$

dem

$$\mathrm{div}(\varphi \vec{F}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi F_i)$$

$$= \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} . F_i + \sum_i \varphi \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

$$= \nabla\varphi . \vec{F} + \varphi . \mathrm{div}(\vec{F})$$

(5) $\quad \mathrm{rot}(\varphi \vec{F}) = \nabla\varphi \times \vec{F} + \varphi \, \mathrm{rot} \vec{F}$

dem

$$\mathrm{rot}(\varphi \vec{F}) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi F_j) \hat{e}_k$$

$$= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} F_j \hat{e}_k + \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \varphi \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \hat{e}_k$$

$$= \nabla\varphi \times \vec{F} + \varphi . \mathrm{rot} \vec{F}$$

Ej: Calcular $\nabla g(r)$ con $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

usar las formulas anteriores para obtener

$\mathrm{div}(g(r)\,\vec{r}) \quad \mathrm{rot}(g(r)\,\vec{r}) \quad$ ($\vec{F} = g(r)\,\vec{r}$ es un campo central) respuestas $\nabla g(r) = \frac{g'(r)}{r}\vec{r}$

$$\mathrm{div}(g(r)\vec{r}) = r g'(r) + 3g(r)$$

$$\mathrm{rot}(g(r)\vec{r}) = 0$$

Otros:

⑥ • $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

dem $\nabla(\varphi\psi) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\psi)\hat{e}_i$

$$= \sum \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\hat{e}_i + \sum\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\hat{e}_i$$

$$= \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

⑦ • $\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\nabla\varphi\cdot\nabla\psi$

hacerlo!

(m) • ver apunte, mas identidades.