Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
20 de Diciembre de 2018

Pauta Auxiliar Extra Examen

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Determine si los siguientes límites existen o no. En caso de existir, calcúlelos y justifique.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a_n,b_n^3)\ln(a_n+1)}{a_n 2^{b_n}}, \frac{1-\cos(n\pi)}{(n\pi)^2}\right)$, con $(a_n,b_n)\to(0,0)$ y $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x|y|^\alpha}{x^2+x^4+y^4}$, con $\alpha>3$.

(c) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^2yz}{x^4+x^2y^2+z^4}$

Demostración:

(a) Llamando $x_n = (\frac{f(a_n,b_n^3)\ln(a_n+1)}{a_n 2^{b_n}}, \frac{1-\cos(n\pi)}{(n\pi)^2})$, analizamos la sucesión por componentes:

$$x_n^1 = \underbrace{\frac{\ln(a_n+1)}{a_n}}_{\to 1}\underbrace{\frac{1}{2^{b_n}}}_{\to 1}\underbrace{f(a_n,b_n^3)}_{\to f(0,0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0,0)$$

donde utilizamos el límite conocido para el logaritmo y que las funciones f y $g(x)=2^{-x}=e^{-x\ln(2)}$ son continuas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$, respectivamente.

$$x_n^2 = \underbrace{\frac{1}{(n\pi)^2}}_{\to 0}\underbrace{(1-\cos(n\pi))}_{\text{acotada}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Luego, $x_n\to(f(0,0),0)$.

(b) Intuitivamente, como el orden máximo en el numerador es mayor que en el denominador $(1+\alpha>4)$, nuestro candidato a limite es 0. Probemos esto por sándwich llamando $g(x,y)=\frac{x|y|^\alpha}{x^2+x^4+y^4}$:

$$0\le|g(x,y)-0| = \frac{|x||y|^\alpha}{x^2+x^4+y^4} = \frac{1}{2}\frac{2|x|y^2|y|^{\alpha-2}}{x^2+x^4+y^4} \le \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^4+x^4)|y|^{\alpha-2}}{x^2+y^4+x^4} = \frac{1}{2}|y|^{\alpha-2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

donde utilizamos que $2|x|y^2\le x^2+y^4\le x^2+y^4+x^4$ $(2|ab|\le a^2+b^2$ con $a=x, b=y^2$, y después sumar $x^4\ge 0)$, y que $\alpha-2>0$.
Nota: En la clase utilicé la cota en el denominador:

$$|g(x,y)-0|\le\frac{|x||y|^\alpha}{2|x|y^2}=\frac{1}{2}y^{\alpha-2}$$

pero acá hay que tener cuidado, porque se podría estar dividiendo por cero, así que para usar esto analizamos esos casos por separado.
<u>Si $x=0$</u> entonces $y\neq 0$ y $|g(x,y)-0|=\frac{0}{y^4}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
<u>Si $y=0$</u> entonces $x\neq 0$ y $|g(x,y)-0|=\frac{0}{x^2+x^4}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

(c) Veamos que hay dos trayectorias que se acercan a $(0,0,0)$ pero que la función a través de esas trayectorias converge a límites distintos, concluyendo así que el límite no existe.

Trayectoria recta por los ejes: Imponiendo, por ejemplo, $x = y = 0$ y $z \neq 0$, la función resulta:

$$\frac{0}{z^2} \xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,0)]{} 0$$

Trayectoria recta diagonal: Imponiendo $x = y = z$, la función resulta:

$$\frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{1}{3}$$

.

Nota 2: En clase auxiliar utilicé la sucesión $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, que es un caso particular de la trayectoria recta diagonal. Cualquiera de los dos métodos es válido.

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Demuestre que la función es continua en todo punto.

(b) Calcule, cuando existan, las derivadas parciales.

(c) Determine si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Demostración:

(a) La función es continua fuera del origen por álgebra y composición de funciones continuas. Veamos que el límite de la función acercándose a $(0,0)$ es justamente 0. Para ello notemos que como la función seno está acotada por 1

$$0 \leq |f(x,y) - 0| \leq (x^2+y^2)\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Luego, f es continua en todo $\mathbb{R}^2$

(b) Primero calculemos las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donde no hay puntos conflictivos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

y análogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

En $(0,0)$ calculamos las parciales por definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0} \underbrace{t}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t^2}\right)}_{\text{acotada}} = 0$$

y análogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(c) Como las derivadas parciales son continuas fuera del $(0,0)$, f es es de clase $\mathcal{C}^1$ (en particular diferenciable) en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (también se puede argumentar que f es diferenciable fuera del origen por álgebra y composición de funciones diferenciables). Estudiemos ahora f en el origen: Sabemos que si las derivadas parciales son continuas en $(0,0)$ entonces f será de clase $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$ y en particular diferenciable en $(0,0)$. Sin embargo, aunque el primer término $2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ es continuo en $(0,0)$ (por el mismo argumento de nula por acotada), el segundo término $\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) =: h(x,y)$ no lo es, pues si evaluamos en la sucesión $(x_n,0) = (\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0)$ que converge a $(0,0)$ se obtiene

$$h(x_n,0) = \frac{2}{x_n}\cos\left(\frac{1}{x_n^2}\right) = \sqrt{2n\pi}\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} = \sqrt{2n\pi}$$

que diverge cuando $n \to \infty$.

Nota 3: El error que tuve al considerar la sucesión $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ es que la cota

$$\frac{-1/n}{2/n^2}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{2/n^2}\right)}_{\geq -1} \geq -\frac{n}{2}(-1)$$

es muuuuy falsa, pues hay un signo $-$ multiplicando! Como comentario final, esta sucesión efectivamente diverge (se puede ver graficando la función $-\frac{x}{2}\cos(\frac{x^2}{2})$), pero como el coseno pasa infintas veces por cero, no es posible acotarla por abajo por una sucesión divergente como quise yo, sino que hay que tomar una subsucesión donde el coseno no se anule (por ejemplo que sea siempre -1), para que al multiplicar con $-\frac{n}{2}$ se vaya a infinito. Esta es la idea que usé ahora para la solución.

Luego, la derivada parcial no puede ser continua en $(0,0)$, pero esto solo dice que f no es de clase $\mathcal{C}^1$, que es más fuerte que diferenciable, por lo que aún podría ser diferenciable! De hecho, proponiendo como candidato a diferencial la matriz $Df(0,0) = [0,0]$, es decir, la que tiene el valor de las derivadas parciales en $(0,0)$, y analizando el límite de la definición de diferenciabilidad en $(0,0)$ tenemos que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - \overbrace{f(0,0)}^{0} - \overbrace{Df(0,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}^{0}}{\underbrace{\|(h_1,h_2)\|}_{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}_{\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right) = 0,$$

pues se trata nuevamente de una convergencia nula por una función acotada. Como el límite es cero, f es diferenciable en $(0,0)$ con $Df(0,0) = [0,0]$, y por lo visto anteriormente concluimos que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}$.

P3. Sea $a > 0$ y Ω el sólido encerrado por la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 5a^2$, el cilindro $x^2+y^2 = a^2$ y el primer octante. Calcule la masa de este sólido si la densidad $d(x,y,z)$ es proporcional a la altura.

Demostración: Veamos de la Figura 1 que el sólido encerrado por tanto la esfera como el cilindro es el mismo cilindro, cuando la esfera es más grande, y la parte superior e inferior de la esfera, cuando ella es superada por el cilindro.

Entre las varias opciones para representar este volumen, consideraremos coordenadas cilíndricas, con las cuales podemos reescribir las ecuaciones en términos del parámetro radial ρ:

$$\rho^2 + z^2 = 5a^2 \text{ y } \rho^2 = a^2.$$

El primer octante en estas coordenadas está determinado por las restricciones $z \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (recordar que siempre $\rho \geq 0$). Con todo lo anterior podemos visualizar la relación entre z y ρ con el gráfico de la Figura 2, donde la curva superior corresponde a la ecuación $z = \sqrt{5a^2 - \rho^2}$, y la recta vertical es $\rho = a$.

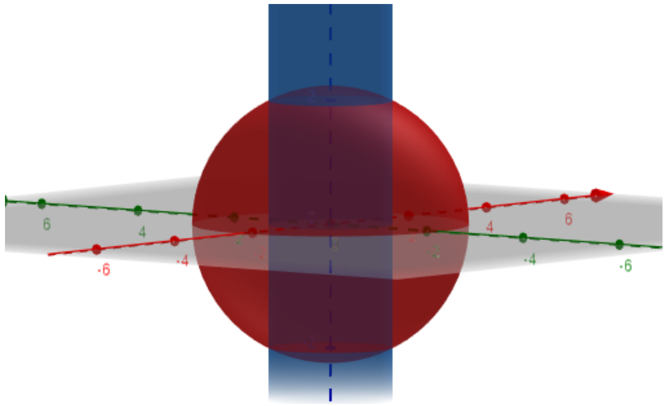

Figura 1: Esfera y Cilindro para $a = 1$

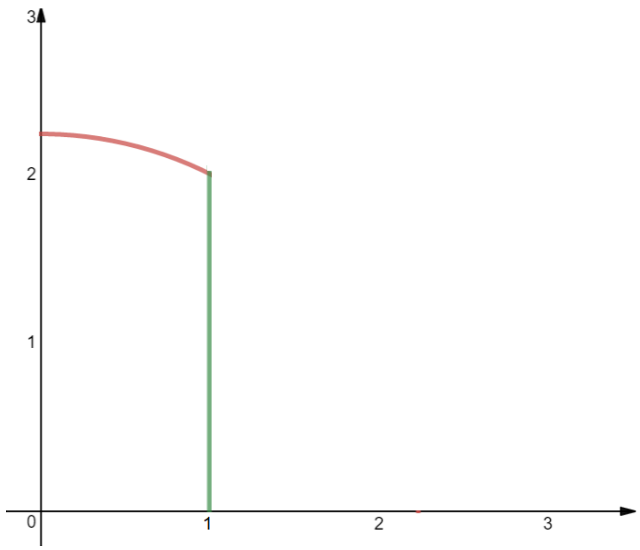

Figura 2: Gráfico z vs ρ para $a = 1$

La intersección de estas curvas se obtiene al resolver

$$a^2 + z^2 = 5a^2 \iff z^2 = 4a^2 \iff z = 2a,$$

con lo cual los límites de integración considerados serán

$$0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{5a^2 - \rho^2}.$$

Consideremos ahora la masa de un objeto como la triple integral de la función densidad $d(x, y, z) = Cz$, donde C es la constante de proporcionalidad de la densidad con respecto a la altura z, entonces, recordando que el elemento de volumen para coordenadas cilíndricas es ρ:

$$
\begin{aligned}
M(\Omega) &= \iiint_\Omega d(x,y,z) \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{5a^2-\rho^2}} Cz \overbrace{\rho}^{\text{elemento de volumen}} dz\, d\rho\, d\theta \\
&= C \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho \frac{z^2}{2} \bigg|_{z=0}^{\sqrt{5a^2-\rho^2}} d\rho\, d\theta \\
&= \frac{C}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a 5a^2\rho - \rho^3 \, d\rho\, d\theta \\
&= \frac{C}{2} \int_0^{\pi/2} 5a^2 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \bigg|_{\rho=0}^{a} d\theta \\
&= \frac{9Ca^4}{8} \theta \bigg|_{\theta=0}^{\pi/2} \\
&= \frac{9C\pi a^4}{16}
\end{aligned}
$$