

Auxiliar Extra Examen

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Determine si los siguientes límites existen o no. En caso de existir, calcúlelos y justifique.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a_n, b_n^3) \ln(a_n + 1)}{a_n 2^{b_n}}, \frac{1 - \cos(n\pi)}{(n\pi)^2} \right)$, con $(a_n, b_n) \rightarrow (0, 0)$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|^\alpha}{x^2 + x^4 + y^4}$, con $\alpha > 3$.

(c) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y z}{x^4 + x^2 y^2 + z^4}$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Demuestre que la función es continua en todo punto.

(b) Calcule, cuando existan, las derivadas parciales.

(c) Determine si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

P3. Sea $a > 0$ y Ω el sólido encerrado por la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 5a^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el primer octante. Calcule la masa de este sólido si la densidad $d(x, y, z)$ es proporcional a la altura.