Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
10 de Diciembre de 2018

Pauta Auxiliar Extra C3

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ convexa. Pruebe que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}} F(x, y),$$

es convexa.
Hint: *Pruebe primero que para todo y_1, y_2, $\lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda r_1 + (1 - \lambda)r_2$, para todo $r_1 > f(x_1)$, $r_2 > f(x_2)$. Concluya tomando límite $r_1 \to f(y_1)^+$, $r_2 \to f(y_2)^+$.*

Demostración: Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in [0, 1]$, siguiendo el hint, nos proponemos probar que

$$f(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda r_1 + (1 - \lambda)r_2,\ \forall\, r_1 > f(x_1),\, r_2 > f(x_2).$$

Sean entonces $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$r_1 > f(y_1) = \inf_{x\in\mathbb{R}} F(x, y_1)$$
$$r_2 > f(y_2) = \inf_{x\in\mathbb{R}} F(x, y_2).$$

Por definición de ínfimo, existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$r_1 > F(x_1, y_1)$$
$$r_2 > F(x_2, y_2)$$

y en particular se cumple que $F(x_1, y_1) > f(y_1)$ y $F(x_2, y_2) > f(y_2)$. Veamos entonces que utilizando la convexidad de F se tiene que

$$\begin{aligned}
f(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) &= \inf_{x\in\mathbb{R}} F(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \\
&\leq F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \\
&= F(\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2)) \\
&\leq \lambda F(x_1, y_1) + (1 - \lambda)F(x_2, y_2) \\
&\leq \lambda r_1 + (1 - \lambda)r_2
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando límite por la derecha $r_1 \to f(y_1)$ y $r_2 \to f(y_2)$, se concluye que

$$f(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda f(y_1) + (1 - \lambda)f(y_2),$$

es decir, f es convexa.

P2. Considere la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Encuentre los puntos en que f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre la región

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\right\}$$

y explique por qué existen estos puntos.

Demostración: Veamos primero que E es cerrado (preimagen de $[0,1]$ por función continua) y acotado al ser una elipse de semieje mayor $\sqrt{2}$ y semieje menor 1, por l cual está contenida, por ejemplo, en la bola $= B(0,20)$. Luego, como f es continua, ella alcanza mínimo y máximo en E compacto.

Para trabajar con restricción de desigualdad separamos en dos casos $E = \mathrm{Int}(E) \cup \mathrm{Fr}(E)$, donde

$$\mathrm{Int}(E) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + y^2 < 1\right\}, \quad \mathrm{Fr}(E) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\right\}.$$

i) Si algún óptimo está en $\mathrm{Int}(E)$ debe ser punto crítico:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y = 0,$$

con lo cual $(0,0)^T$ es el único punto crítico de f, y además pertenece a E, por lo que lo consideramos como candidato (si apareciera un punto crítico que no esté en E no se considera).

Nota: En este punto, si se estuviera optimizando sin restricciones, uno procedería a calcular la hessiana para ver la naturaleza del punto crítico, pero, cuando hay restricciones, el método para determinar si los puntos son máximos o mínimos será evaluar en la función y ver qué puntos tienen mayor o menor valor (y estos serán máximos y mínimos globales en E!).

ii) Ahora estudiamos la frontera, definida por la restricción $g(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - 1 = 0$, por lo que queremos ocupar Lagrange.

Nota 2: Por el mismo argumento que antes, $\mathrm{Fr}(E)$ es compacto, por lo que f alcanza su máximo y mínimo en $\mathrm{Fr}(E)$, y la regla de multiplicadores de Lagrange nos arrojará al menos estos dos puntos.

Para ocupar Lagrange hay que verificar antes que los gradientes de las restricciones sean l.i. **en el conjunto de estudio** $\mathrm{Fr}(E)$, lo cual en este caso de una restricción se traduce en que su gradiente debe ser distinto de cero:

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y = 0,$$

pero $(0,0)^T \notin \mathrm{Fr}(E)$, pues $g(0,0) = -1 \neq 0$. Con todo chequeado, definimos el lagrangiano

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y^2 - 1\right),$$

y buscamos solucionar el sistema

$$2x - \lambda x = 0, \tag{1a}$$
$$2y - 2\lambda y = 0, \tag{1b}$$
$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \tag{1c}$$

De (1a) y (1b) obtenemos que $x(\lambda + 2) = 0$, por lo que nos ponemos en casos: <u>Si $x = 0$:</u> De (1c) $y = \pm 1$, entonces $\lambda = -1$ de (1b), por lo que encontramos dos candidatos $(0,-1)$ y $(0,1)$. <u>Si $x \neq 0$:</u> entonces $\lambda = -2$, y reemplazando en (1b) $y = 0$, con lo cual $x = \pm\sqrt{2}$ de (1c), encontrando así dos candidatos más $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$.

Para concluir tenemos que determinar cuáles de estos cinco candidatos serán máximos o mínimos en E, lo cual haremos evaluando en f: $f(0,0) = 0$, $f(0,\pm 1) = 1$ y $f(\pm\sqrt{2},0) = 2$, concluyendo así que $(\pm\sqrt{2},0)^T$ son máximos de f en E, y $(0,0)^T$ es mínimo de f en E.

Nota 3: No es necesario concluir algo sobre los puntos $(0,\pm 1)$, pero de lo argumentado anteriormente podemos deducir que estos puntos son los mínimos de f en $\mathrm{Fr}(E)$.

P3. Encuentre todos los máximos y mínimos de la función $f(x,y,z) = 4 - z$ en la superficie definida por la intersección entre el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + z = 5$ y el plano $x + y + z = 1$.

Demostración: Consideremos $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z-5$, $g_2(x,y,z) = x+y+z-1$ y definamos el conjunto $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = 0,\ g_2(x,y,z) = 0\}$ que es cerrado (intersección de cerrados) y acotado al ser un corte oblicuo del paraboloide, por lo que f continua alcanza máximo y mínimo en C compacto. Ahora queremos ocupar el Teorema de los multiplicadores de Lagrange, para lo cual debemos chequear que los vectores gradientes de cada restricción sean **linealmente independientes** en cada punto de C.

$$\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \nabla g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Recordemos que dos vectores u, v son l.i si para toda combinación lineal que cumpla $\alpha u + \beta v = 0$, entonces necesariamente $\alpha, \beta = 0$, pero sin pérdida de generalidad la condición se puede reducir a $\alpha u = v \implies \alpha = 0$. Con esto en mente, veamos que

$$\alpha \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \alpha = 1,\ x = y = \frac{1}{2},$$

pero notemos que ningún punto en C puede cumplir esta condición, pues $g_2(1/2, 1/2, z) = 0 \iff z = 0$, pero $g_1(1/2, 1/2, 0) \neq 0$. Luego, los gradientes son l.i. para todo punto de C y se puede ocupar Lagrange. Definimos el lagrangiano

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = 4 - z - \lambda(x^2 + y^2 + z - 5) - \mu(xy + z - 1),$$

y resolvemos el sistema

$$-2\lambda x - \mu = 0, \tag{2a}$$
$$-2\lambda y - \mu = 0, \tag{2b}$$
$$-1 - \lambda - \mu = 0, \tag{2c}$$
$$x^2 + y^2 + z = 5, \tag{2d}$$
$$x + y + z = 1, \tag{2e}$$

De (2a) y (2b) obtenemos que $\lambda(x - y) = 0$, por lo que nos pondremos en ambos casos:

$\underline{\lambda = 0}$: De (2a) o (2b) se tiene que $\mu = 0$, pero de (2c) $\mu = -1$, lo cual es una contradicción, por lo que desechamos este caso.

$\underline{\lambda \neq 0}$: En este caso, necesariamente $x = y$, por lo que $z = 1 - 2x$ de (2e). Reemplazando esto en (2d) obtenemos la ecuación cuadrática $2x^2 - 2x - 6 = 0$, la cual tiene como solución $x = 2$ y $x = -1$. Luego, los candidatos encontrados son $(2, 2, -3)^T$ y $(-1, -1, 3)^T$.

Evaluando, obtenemos que $f(2, 2, -3) = 7$ y $f(-1, -1, 3) = 1$, por lo que $(2, 2, -3)^T$ es máximo de f en C y $(-1, -1, 3)^T$ es mínimo de f en C.

P4. Calcule el volumen del sólido limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

Demostración: El dibujo 3D en este caso es más o menos complicado, por lo que nos basaremos en el análisis de algunos planos específicos.

Al graficar los ejes XY (plano $z = 0$), se puede apreciar un círculo de radio a. De aquí, dejando x como variable libre entre $-a$ y a, se puede ver que para cada x fijo, la variable y se mueve desde la parte inferior del círculo hasta la superior, esto es, desde la curva $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, hasta $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (esta funciones vienen de despejar $x^2 + y^2 = a^2$).

Si graficamos ahora los ejes XZ (plano $y = 0$), podemos ver la misma figura, por lo que análogamente z se mueve entre $z = -\sqrt{a^2 - x^2}$ y $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, independiente del valor de y. Con esto, se puede definir el sólido como

$$S := \{(x, y, z) : -a \leq x \leq a,\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2},\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}\},$$

por lo que su volumen estará determinado por la integral múltiple

$$\begin{aligned}
vol(S) = \iiint_S 1 &= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1 \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2 - x^2} \, dy \, dx \\
&= \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2}(y) \Big|_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
&= 4 \int_{-a}^{a} a^2 - x^2 \, dx \\
&= 4\left(a^2 x \Big|_{x=-a}^{a} - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-a}^{a} \right) \\
&= 4\left(2a^3 - \frac{2a^3}{3} \right) \\
&= \frac{4}{3}(6a^3 - 2a^3) \\
&= \frac{16a^3}{3}.
\end{aligned}$$