Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
Diciembre de 2018

Un poco de Convexidad

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Sean $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funciones convexas, $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una función afín (esto es, una función lineal desplazada por una constante), y $\alpha \in \mathbb{R}$:

- **(a)** Pruebe que $f + g$ es convexa.
- **(b)** Pruebe que αf es convexa si $\alpha \geq 0$ y muestre con un contraejemplo que esto no se cumple si $\alpha < 0$.
- **(c)** Pruebe que $f \circ h$ es convexa.
- **(d)** Pruebe que el conjunto de nivel $C_\alpha(f) =: \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq \alpha\}$ es convexo.
- **(e)** Pruebe que la función $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ es convexa.
  Hint: Utilice lo demostrado en la P2 de la auxiliar 7.

P2. Considere la función

$$f(x, y) = \ln(e^x + e^y).$$

Demuestre que f es estrictamente convexa y concluya que el conjunto

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 7\ln(e^{3x+1} + e^{3y+1}) + y^2 \leq 1789\}$$

es convexo.

P3. Demuestre que el conjunto $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$ NO es convexo, y deduzca que la función $\|(x, y)\| = (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$ NO puede ser norma en $\mathbb{R}^2$. ¿Cuál condición falla?

P4. Demuestre que si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es convexa y acotada superiormente, entonces es constante. Para ello siga el siguiente esquema:

- **(a)** Suponga que f no es constante, es decir, existe x, y tal que $f(x) < f(y)$, defina:

  $$g(t) = f(x + t(y - x))$$

  Pruebe que es convexa y que $g(0) < g(1)$.
- **(b)** Considere ahora $t > 1$, y demuestre que

  $$g(1) \leq \left(1 - \frac{1}{t}\right) g(0) + \frac{1}{t} g(t).$$

  Con lo anterior deduzca que $g(t) \geq g(0) + t(g(1) - g(0))$.
- **(c)** Contradiga el supuesto y concluya.