Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
28 de Noviembre de 2018

Pauta Auxiliar #8

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3 \qquad g(x,y) = x^2 + \cos(x) + y^2 - y$$

(a) Encuentre y estudie la naturaleza de los puntos críticos de f y g.

(b) Determine si los óptimos encontrados son globales.

Demostración:

(a) Sabemos que los puntos críticos son los que anulan el gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6y \\ -6x + 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (1)\ y = \frac{x^2}{2}, \quad (2)\ y^2 - 2x = 0$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - \operatorname{sen}(x) \\ 2y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (3)\ 2x = \operatorname{sen}(x), \quad (4)\ y = \frac{1}{2}$$

Reemplazando (1) en (2) obtenemos

$$\frac{x^4}{4} - 2x = 0 \iff x(x^3 - 8x) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = 2,$$

por lo que los puntos críticos de f son $(0,0)^T$ y $(2,2)^T$ (el traspuesto es solo para mantener notación).

Una solución de (3) es $x = 0$, y para ver que es la única, notamos que la función real $G(x) = 2x - \operatorname{sen}(x)$ es estrictamente creciente ($G'(x) = 2 - \cos(x) > 0$), por lo que cualquier valor $\tilde{x} > 0$ ($\tilde{x} < 0$ es análogo) va a cumplir que $G(\tilde{x}) > G(0) = 0$.

Luego, $(0, \frac{1}{2})^T$ es el único punto crítico de g.

Para clasificar los puntos recordamos las condiciones de segundo orden: Si $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y x_0 punto crítico de h, entonces

Suficientes: Si la matriz $\nabla^2 h(x_0)$ es definida positiva (resp. negativa), entonces x_0 es mínimo (resp. máximo) local estricto de h.

Necesarias: Si x_0 es mínimo (resp. máximo) local de h, entonces la matriz $\nabla^2 h(x_0)$ es semidefinida positiva (resp. negativa),

Con esto, calculamos las matrices hessianas y evaluamos en los puntos críticos:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 6y \end{bmatrix} \Longrightarrow \nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(2,2) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - \cos(x) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \nabla^2 g(0,1/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Recordamos además del curso de Álgebra Lineal que una matriz simétrica es definida positiva (resp. negativa) si y sólo si todos sus valores propios son positivos (resp. negativos). Esto es, de hecho, solo una de las consecuencias del Teorema 7.1 del apunte de lineal que pueden revisar para ver otras formas de probar la condición suficiente de segundo orden.

Calculamos entonces los valores propios de cada matriz, imponiendo que el polinomio característico sea cero

$$p(\lambda) = \det(\nabla^2 f(0,0) - \lambda I) = \lambda^2 - 36 = 0 \iff \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -6$$

Como los valores propios tienen signos opuestos y son distintos de cero, el punto crítico $(0,0)^T$ es un **punto silla** de f. Por otro lado, calculando para el otro punto crítico obtenemos

$$p(\lambda) = \det(\nabla^2 f(2,2) - \lambda I) = (12 - \lambda)^2 - 36 = 0 \iff (\lambda - 6)(\lambda - 8) = 0 \iff \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 8,$$

donde el hecho que los dos valores propios sean positivos nos asegura que $(2,2)^T$ es un **mínimo local estricto** de f.

Finalmente, como la matriz $\nabla^2 g(0, 1/2)$ es diagonal, sus valores propios son justamente los valores de la diagonal, que son positivos, por lo que $(0, 1/2)^T$ es **mínimo local estricto** de g.

(b) Para verificar si estos óptimos son globales, se puede recurrir a las siguientes opciones:

- Si h es una función convexa (resp. cóncava), entonces cualquier punto crítico x_0 es mínimo (resp. máximo) global, más aún, si la convexidad es **estricta**, entonces el óptimo encontrado es **único**.
- Si existe sucesión (trayectoria) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $h(x_n) \to -\infty$ (resp. ∞), entonces no existe mínimo (resp. máximo) global.

En el caso de f, $(2,2)^T$ no puede ser mínimo global, pues $f(x,0) = x^3 \xrightarrow[\pm\infty]{} \pm\infty$. (equivalente a considerar las sucesiones $(n, 0)$ y $(-n, 0)$).
Por otro lado, vimos antes que $2 - \cos(x) > 0$, por lo que $\nabla^2 g(x,y)$ es definida positiva en todo punto (x,y), lo cual implica que la función g es **estrictamente convexa**. Luego, $(0, 1/2)$ es el **único** mínimo global de g.

P2. Un agrónomo expone que los factores más importantes para las plantas de su invernadero son la cantidad de horas de luz que reciben (x_1) y la cantidad de fertilizante utilizado (x_2). La cantidad de biomasa producida es proporcional al producto $x_1^\alpha x_2^\beta$, siendo α, β constantes positivas. Los costos por hora de luz y por unidad de fertilizante son, respectivamente, p_1, p_2. y el presupuesto disponible es w. Para ayudar al agrónomo a decidir cuántas horas de luz y qué cantidad de fertilizante debe utilizar para maximizar la producción de biomasa se propone el siguiente esquema:

(a) Escriba un problema de optimización que modele el desafío del agrónomo, es decir, identifique la función objetivo $f(x_1, x_2)$ y sus restricciones.

(b) Plantee un nuevo problema con las mismas restricciones, pero con la función objetivo $\ln(f(x_1, x_2))$ y justifique que la solución de este problema es también la del problema original.

(c) Argumente por qué basta considerar solo el caso en que el agrónomo invierte todo el presupuesto y resuelva el problema definido en **(b)**.

Demostración:

(a) Consideramos la función objetivo $f(x_1, x_2) = Cx_1^\alpha x_2^\beta$, con $C > 0$ la constante de proporcionalidad (desconocida, pero irrelevante como veremos después). La única restricción es que el dinero gastado no puede superar el presupuesto disponible, es decir $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$.

(b) Como la función $\ln(\cdot)$ es estrictamente creciente, ella alcanza su óptimo cuando su argumento, $f(x_1, x_2)$ lo hace (notar que este mismo argumento justifica que multiplicar por C no influye en la optimización cuando $C > 0$). Luego, manteniendo la restricción, podemos considerar $F(x_1, x_2) = \ln(C) + \alpha \ln(x_1) + \beta \ln(x_2)$ y llegaremos a la misma solución.

(c) En lenguaje económico, como ”más es mejor”, no es conveniente dejar presupuesto sin gastar, porque ese resto podría haber sido ocupado para aumentar la producción. En términos más matemáticos, si estudiamos primero el interior de la restricción, es decir, cuando $p_1x_1 + p_2x_2 < w$ podemos analizar el gradiente de la función:

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{x_1} \\ \\ \dfrac{\beta}{x_2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, x_1, x_2$$

es decir, la función no tiene puntos críticos cuando la desigualdad es estricta y, en particular, no alcanza mínimo ni máximo en el interior. Luego, basta optimizar en el borde, es decir, con la restricción $p_1x_1 + p_2x_2 = w$.

Para esto definimos el lagrangiano:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \ln(C) + \alpha \ln(x_1) + \beta \ln(x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w).$$

Derivando obtenemos el sistema

$$\frac{\alpha}{x_1} + \lambda x_1 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\beta}{x_2} + \lambda x_2 = 0 \tag{2}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 - w = 0 \tag{3}$$

De (1) y (2), obtenemos:

$$x_1 = \frac{\alpha p_2}{\beta p_1} x_2$$

Reemplazando esto en (3), se tendrá

$$x_2 = \frac{w}{p_2}\frac{\beta}{\alpha + \beta} \Longrightarrow x_1 = \frac{w}{p_1}\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \Longrightarrow \lambda = \frac{\alpha + \beta}{w}$$

Así, encontramos un candidato (x_1, x_2) que no puede ser mínimo, pues el ínfimo de la función F es $-\infty$ obtenido en los puntos $(w/p_1, 0)$ o $(0, w/p_2)$, lo cual nos deja con la afirmación que si existen máximo (pendiente), este será justo el punto (x_1, x_2) encontrado anteriormente.

P3. Considere la curva $C \subseteq \mathbb{R}^3$ dada por la intersección entre el plano $x+y = 4$ y el paraboloide $2z = 16-x^2-y^2$. Determine los puntos de C, en el primer octante, que se encuentren más cercanos y más distantes al origen, justificando su existencia.

Demostración: La distancia al origen en este caso corresponde a $\|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, pero para facilitar el cálculo de derivadas, notamos que como la función $(\cdot)^2$ es estrictamente creciente, podemos usar la función objetivo.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Consideremos las restricciones $g_1(x, y, z) = 2z - 16 + x^2 + y^2$ y $g_2(x, y, z) := x + y - 4$ y denotemos $C := \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 0, x, y, z \geq 0\}$, que es cerrado y acotado, por lo tanto compacto. Además, es fácil ver que f es continua por álgebra y composición, con lo cual se corrobora la existencia de mínimo y máximo. El *Teorema de multiplicadores de Lagrange* nos asegura que, **bajo ciertas condiciones de las restricciones**(*), existen números λ, μ para cada óptimo (mínimo o máximo) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tales que

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lambda \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \mu g_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

De aquí proviene la mnemotecnia $\nabla \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \lambda, \mu) = 0$, donde la función

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) := f(x, y, z) - \lambda g_2(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(2z - 16 + x^2 + y^2) - \mu(4 - x - y)$$

se denomina **Lagrangiano**. Con esto, nos proponemos resolver el siguiente sistema:

$$2x - 2\lambda x + \mu = 0, \tag{4a}$$
$$2y - 2\lambda x + \mu = 0, \tag{4b}$$
$$2z - 2\lambda = 0, \tag{4c}$$
$$2z - 16 + x^2 + y^2 = 0, \tag{4d}$$
$$4 - x - y = 0, \tag{4e}$$

donde (5d) y (5e) son las restricciones (o se pueden entender más informalmente como la derivada con respecto a los multiplicadores).

De (5a) y (5b) se obtiene $x(1-\lambda) = y(1-\lambda)$, por lo que uno está tentado a simplificar el término $(1-\lambda)$. Sin embargo, esto dejaría fuera el caso en que $\lambda = 1$, por lo tenemos que revisarlo aparte.

$\underline{\lambda \neq 1}$ Tenemos que $x = y$, lo cual se puede reemplazar en (5e) para obtener que $x = 2 = y$, y en (5d) esto significa que $z = 4$. Con esto, los multiplicadores tienen que valer $\lambda = 4$ por (5c) y $\mu = 12$ de (5a), con lo que obtenemos un candidato $(2, 2, 4)^T$ con valor $f(2, 2, 4) = 2\sqrt{6}$.

$\underline{\lambda = 1}$: De (5a) o (5b) obtenemos que $\mu = 0$, y de (5c) que $z = 1$. Reemplazando esto último en (5d), junto con que $y = 4 - x$ de (5e), resulta la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned} 0 &= 2 - 16 + x^2 + (4-x)^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 2, \end{aligned}$$

que tiene soluciones $x_1 = 2 + \sqrt{15}/2$ y $x_2 = 2 - \sqrt{15}/2$ ambas positivas! (si alguna fuera negativa, el punto asociado no estaría en el primer octante, y por tanto tampoco en C). Con esto encontramos dos nuevos candidatos $(2 + \sqrt{15}/2, 2 - \sqrt{15}/2, 1)^T$ y $(2 - \sqrt{15}/2, 2 + \sqrt{15}/2, 1)^T$ ambos con valor $\sqrt{9 + 15/2} < 2\sqrt{6}$. Luego, podemos concluir que estos dos últimos puntos son los más cercanos al origen, mientras que $(2, 2, 4)^T$ es el más lejano.

Para finalizar, debemos comprobar que se cumplen las condiciones (*) que requieren los multiplicadores de Lagrange, las cuales corresponden a que los gradientes de las restricciones en los óptimos son vectores linealmente independientes. En este caso calculamos primero

$$\nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y notamos que estos vectores son l.i. independiente de los valores de x, y, z, en particular, si se evalúa en los óptimos encontrados, se mantendrá la independencia lineal, lo cual permite ocupar el Teorema.