Auxiliar #7: Convexidad y Puntos Críticos

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

Recuerdo (Convexidad):

Def: (Conjunto Convexo) Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^d$ se dice **convexo** si para todo par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^d$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

Def: (Función Convexa) Una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **convexa** si para todo par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^d$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

P1. Sea $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Muestre que $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{g(x)}$ es convexa.

Ejercicio corto: Muestre que cualquier norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.

P2. Considere el epigrafo de una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\text{epi}(f) := \{(x, r) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : r \geq f(x)\}.$$

Pruebe que $\text{epi}(f)$ es un conjunto convexo si y solo si f es función convexa.

Aplicación: Justifique brevemente por qué el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \geq e^{|x|+|y|}\}$ es convexo.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función **estrictamente convexa**, esto es, que para cada par de puntos $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Demuestre que f tiene a lo más un mínimo local.

Contraejemplo: Muestre con un ejemplo que si la convexidad no es estricta, la afirmación no es necesariamente cierta.

P4. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{x+y} - 1} & \text{si } x + y \neq 0 \\ 2 & \text{si } x + y = 0 \end{cases} \quad g(x, y) = y \operatorname{sen}(x)$$

(a) Pruebe que f no tiene máximos ni mínimos locales.

(b) Determine los puntos críticos de g y concluya que no pueden ser máximos ni mínimos globales.