Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
12 de Noviembre de 2018

Pauta Auxiliar Extra C2

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\,\mathrm{sen}(xy)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule, si es que existen, las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$ y todas las direcciones $e \in \mathbb{R}^2$.

(b) Calcule, cuando existan, las derivadas parciales.

(c) Determine si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

(d) Determine la ecuación del plano tangente al grafo de f en cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que donde $x^2 + y^2 = 1$.

Demostración:

(a): Recordemos que la definición de derivada direccional en el punto (x_0, y_0) y dirección $e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ (es decir, $\|e\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = 1$) es

$$f'((x_0,y_0);e) := \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t(e_1,e_2)) - f(x_0,y_0)}{t}$$

Luego, aplicando a nuestro caso en $(0,0)$ obtenemos

$$f'((0,0);e) = \lim_{t\to 0} \frac{f(te_1,te_2) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 e_1 e_2\,\mathrm{sen}(t^2 e_1 e_2)}{t^3 \underbrace{(e_1^2+e_2^2)}_{1}} = \lim_{t\to 0} t e_1^2 e_2^2 \underbrace{\frac{\mathrm{sen}(t^2 e_1 e_2)}{t^2 e_1 e_2}}_{\to 1} = 0.$$

(b): Fuera del origen podemos derivar sin problemas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y\,\mathrm{sen}(xy) + xy(\cos(xy)y))(x^2+y^2) - 2x(xy\,\mathrm{sen}(xy))}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y((y^2-x^2)\,\mathrm{sen}(xy) + xy\cos(xy)(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x((x^2-y^2)\,\mathrm{sen}(yx) + yx\cos(yx)(y^2+x^2))}{(y^2+x^2)^2}.$$

donde la última derivada se determina fácilmente gracias a la simetría de la función (intercambiando roles).

Las derivadas parciales en $(0,0)$ se calculan simplemente recordando que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f'((0,0);(1,0)) \overbrace{=}^{\textbf{(a)}} 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f'((0,0);(0,1)) \overbrace{=}^{\textbf{(a)}} 0.$$

(c): La haremos de dos formas distintas:

Derivadas parciales continuas: Sabemos que esta condición es suficiente para probar la diferenciabilidad de f. Como la continuidad es clara fuera del origen, por álgebra y composición de funciones continuas, basta probar la continuidad en $(0,0)$, esto es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
0 \leq |\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| &\leq \frac{|y|(|(y^2-x^2)||\text{sen}(xy)| + |xy||\cos(xy)|(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2} \\
&\leq \frac{|y||\text{sen}(xy)|}{x^2+y^2} + \frac{y^2|x||\cos(xy)|}{x^2+y^2} \\
&\leq \underbrace{\frac{|y||\text{sen}(xy)|}{x^2+y^2}}_{(*)} + \underbrace{|x||\cos(xy)|}_{\to 0}
\end{aligned}$$

Para ver la convergencia de (*), notemos primero que si $x=0$ o $y=0$, (*) es siempre cero, por lo que el límite también será cero. Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$:

$$(*) \leq \underbrace{\frac{|y|}{2}}_{\to 0} \underbrace{\frac{|\text{sen}(xy)|}{|xy|}}_{\to 1} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

donde utilizamos que $2|xy|^2 + y^3$.

Luego, la derivada parcial con respecto a x es continua y, de manera análoga, también lo será la derivada con respecto a y (recordar que son casi la misma función, más aun cerca del cero), por lo que podemos asegurar que la función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

Por definición de diferenciabilidad: Recordando que lo anterior es solamente una implicancia, podría darse el caso en que las derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$, pero la función SI es diferenciable en tal punto. En estos casos, siempre es bueno saber probar la diferenciabilidad por definición, esto es, proponiendo un candidato a diferencial $Df(0,0) \in \mathcal{M}_{2x1}$ y probando que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}}{\|(x,y)\|} = 0 \tag{1}$$

Además, sabemos que si la función es diferenciable, el diferencial se compone de las derivadas parciales, por lo que un buen candidato siempre es:

$$Df(0,0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] \underbrace{=}_{\textbf{(b)}} [0,0]$$

Luego, reemplazando esto y que $f(0,0)=0$, probamos el límite (1), notando como en (*) que si $x=0$ o $y=0$ la función es siempre cero. Luego, si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, podemos acotar:

$$0 \leq \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|xy||\text{sen}(xy)|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \frac{|xy||\text{sen}(xy)|}{(2|xy|)^{3/2}} = \underbrace{\frac{\sqrt{xy}}{2^{3/2}}}_{\to 0} \underbrace{\frac{|\text{sen}(xy)|}{xy}}_{\to 1} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

(d): Ya sabiendo que la función es diferenciable y teniendo las derivadas parciales calculadas en cada punto, solo resta ocupar alguna de las fórmulas equivalentes para el plano tangente: Sea $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, el plano tangente al grafo de f está dado por

$$
\begin{aligned}
\Pi_{(x_0,y_0)} : z &= f(x_0,y_0) + \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).
\end{aligned}
$$

Si (x_0, y_0) es tal que $x_0^2 + y_0^2 = 1$, reemplazamos con lo calculado en **(b)** y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{(x_0,y_0)} : z = x_0y_0 \operatorname{sen}(x_0y_o) &+ y_0((y_0^2 - x_0^2)\operatorname{sen}(x_0y_0) + x_0y_0\cos(x_0y_0))(x-x_0) \\
&+ x_0((x_0^2 - y_0^2)\operatorname{sen}(y_0x_0) + y_0x_0\cos(y_0x_0))(y-y_0)
\end{aligned}
$$

P2. Considere el cambio de coordenadas parabólicas $x = \dfrac{u^2-v^2}{2}$ y $y = uv$. Muestre que si se define $g(u,v) = f\left(\dfrac{u^2-v^2}{2}, uv\right)$, con f una función de clase $\mathcal{C}^2$, entonces

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right).
$$

Demostración: Notemos primero que con este cambio de variables tendremos:

$$
\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2u}{u} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-2v}{2} = -v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u
$$

Calculemos entonces las derivadas de primer orden de $g(u,v) = g(x(u,v), y(u,v))$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\
&= u\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + v\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\
&= -v\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + u\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}
$$

Veamos ahora los términos de segundo orden, notando que se tendrá que ocupar la regla del producto en las multiplicaciones y la regla de la cadena en los términos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v))$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))$. Para simplificar notación, en adelante omitiremos las variables en las que están evaluadas las funciones.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} := \frac{\partial\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial u} &= \frac{\partial\left(u\dfrac{\partial f}{\partial x} + v\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial u} \\
&= \frac{\partial\left(u\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u} + \frac{\partial\left(v\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial u} \\
&= 1\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u} + 0\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + v\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial u} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} + u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right) + v\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} + u\left(u\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right) + v\left(u\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} + u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

donde ocupamos que, como f es de clase $\mathcal{C}^2$, el teorema de Schwarz nos asegura que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Similarmente obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= \frac{\partial\left(-v\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial v} + \frac{\partial\left(u\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial v} \\
&= -\frac{\partial f}{\partial x} - v\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right) \\
&= -\frac{\partial f}{\partial x} + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

Finalmente, sumando las expresiones anteriores se obtiene lo pedido:

$$
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (u^2+v^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)
$$

P3. Se define la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como:

$$
f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1).
$$

Escriba la aproximación de Taylor de orden 2 en el en torno a cualquier punto (x_0, y_0, z_0).

Demostración: Por comodidad usaremos $R = x^2+y^2+z^2+1$. Como no hay puntos conflictivos, procedemos a derivar sin problemas:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{R} \\ \\ \dfrac{2y}{R} \\ \\ \dfrac{2z}{R} \\ \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \\ \end{bmatrix} = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} 2R - 4x^2 & -4xy & -4xz \\ \\ -4xy & 2R - 4y^2 & -4yz \\ \\ -4xz & -4yz & 2R - 4x^2 \\ \end{bmatrix}$$

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ fjio, para $(h_1,h_2,h_3) \approx (0,0,0)$ el la aproximación de Taylor es:

$$\begin{aligned} P_2(h_1,h_2,h_3) &= f(x,y,z) + \nabla f(x,y,z)^T \begin{pmatrix} h_3 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + (h_1,h_2,h_3) \nabla^2 f(x,y,z) \begin{pmatrix} h_3 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \\ &= R + \frac{2xh_1}{R} + \frac{2yh_2}{R} + \frac{2zh_3}{R} + \\ & \frac{2}{R^2} \left(Rh_1^2 + Rh_2^2 + Rh_3^2 - 2h_1^2 x^2 - 2h_2^2 y^2 - 4h_1 h_2 xy - 2h_3^2 z^2 - 4h_1 h_3 yz - 4h_2 h_3 yz \right) \end{aligned}$$