

## Guía de Ejercicios 2

**Profesor:** David Salas.  
**Auxiliar:** Matías Romero.

### 1. Diferenciabilidad

**P1.** Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Construya un esquema que explique las implicancias o equivalencias entre las siguientes proposiciones, escribiendo un contraejemplo en el caso en que no haya relación lógica.

- (a)  $f$  es diferenciable en  $x_0$ .
- (b) Existen las derivadas parciales de  $f$  en  $x_0$ .
- (c)  $f$  es continua en  $x_0$ .
- (d) Existen las derivadas direccionales  $f'(x_0; e)$  en toda dirección  $e \in \mathbb{R}^d$ .
- (e) Existen las derivadas parciales de  $f$  en  $x_0$  y son continuas.

**P2.** Sea  $A = \{(x, y) : 0 < y < x\}$ . Para un número  $\alpha \in \mathbb{R}$ , considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y(y-x)x^{-\alpha} & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin A. \end{cases}$$

Demuestre que si  $\alpha < 1$  esta función es diferenciable en  $(0, 0)$ .

**P3.** Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estudie la continuidad y diferenciabilidad de  $f$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- (b) ¿Es  $f$  continua en  $(0, 0)$ ?
- (c) ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0, 0)$ ?
- (d) Muestre que  $f$  no es de clase  $\mathcal{C}^1$ .

**P4.** Considere la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estudie diferenciabilidad de  $f$  en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- (b) Calcule las derivadas parciales en el origen, esto es  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
- (c) ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0, 0)$ ?

## 2. Regla de la Cadena

**P5.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  y sea  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación definida a partir de  $f$  por

$$g(u, v) = f(\cos(u) + \sin(v), \cos(v) + \sin(u), e^{u-v}).$$

Calcule  $Dg(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , sabiendo que

$$Df(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

**P6.** Sean  $f, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables. Se define la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$g(x) = f(x, h(x, x))$$

(a) Encuentre  $g'(x)$ .

(b) Compruebe la fórmula anterior para  $f(x, y) = x + 2y$  y  $h(x, y) = 2xy$ .

**P7.** Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Se define  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ , donde  $u(x, y) = x + y$  y  $v(x, y) = \sin(x - y)$ .

Demuestre que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\cos(x - y)^2\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

**P8.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ambas de clase  $\mathcal{C}^2$ . Sea la función  $F$  definida por:

$$F(x, y) = f(x + g(y)).$$

Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

**P9.** Suponga que  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi = \phi(x, t)$  es una función de clase  $\mathcal{C}^2$  que satisface

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

donde  $c > 0$ . Definamos

$$\psi(u, v) = \phi\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right).$$

(a) Pruebe que  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u} = 0$ .

(b) Deduzca que existen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^2$  tales que

$$\phi(u, v) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

### 3. Plano Tangente

**P10.** Considere la superficie dada por  $z = \ln(2x + y)$ ,  $2x + y > 0$ , y el paraboloide de ecuación  $z = 5 + (x - 1)^2 + (y + 2)^2$ . Determine la ecuación de la recta dada por la intersección de los planos tangentes a la superficie en los puntos  $(-1, 3, 0)$  y  $(2, 0, 10)$ , respectivamente.

**P11.** Calcule el plano tangente a cada superficie  $z = f(x, y)$  en cada punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  y luego evalúe el punto indicado.

(a)  $z = x^3 + y^3 - 6xy$  en  $(1, 2, -3)$ .

(b)  $z = \cos(x) \sin(y)$  en  $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$ .

(c)  $z = e^x y^2$  en  $(\frac{1}{2}, 2)$

### 4. Aproximaciones de Taylor

**P12.** Considere la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = x \ln(1 + y) + \sin(x + y)$$

(a) Encuentre la expansión de Taylor de orden 2 en torno al  $(0, 0)$ .

(b) Pruebe que para  $x^2 + y^2 \leq 1/4$  se tiene

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| \leq \frac{3}{2}(|x| + |y|)^3$$

donde  $P_2$  es la expansión de orden 2 encontrada anteriormente.

**P13.** Se define la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1).$$

Escriba la aproximación de Taylor de orden 2 en el en torno a cualquier punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**P14.** Encuentre la aproximación de primer orden  $P_1(x, y, z)$  y la aproximación de segundo orden  $P_2(x, y, z)$  para la función

$$f(x, y, z) = xe^y + ze^{2y}$$

en torno al punto  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ . Encuentre una región en torno al origen que garantice un error de aproximación menor o igual a  $10^{-3}$ .