Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
31 de Octubre de 2018

Pauta Auxiliar #5

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables tales que

$$g(x,y) = xy \cdot f\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Demuestre que estas funciones cumplen la ecuación

$$x^2\frac{\partial g}{\partial x} - y^2\frac{\partial g}{\partial y} = H(x,y)g(x,y),$$

encontrando explícitamente una expresión para $H(x,y)$.

Demostración: En primer lugar, notemos que definiendo las variables auxiliares

$$u = xy \quad , \quad v = \frac{x+y}{xy}$$

la función que estamos analizando toma la forma: $g(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$ con $g(u,v) = uf(v)$, por lo que los cálculos de todas las derivadas parciales de este problema se podrán llevar a cabo de forma más bien explícita (pues salvo por f, conocemos todas las componentes involucradas en ellos). Dicho esto, calculemos directamente las derivadas parciales de la ecuación planteada en el enunciado ocupando la regla de la cadena (lo siguientes es el corolario 8.1 del apunte de Del Pino):

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Teniendo esto, calculamos todos los factores de las expresiones anteriores:

- $\dfrac{\partial g}{\partial u} = f(v).$
- $\dfrac{\partial g}{\partial v} = uf'(v).$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y.$
- $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x.$
- $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1\cdot(xy) - (x+y)y}{(xy)^2} = -\dfrac{y^2}{(xy)^2} = \dfrac{-1}{x^2}.$
- $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1\cdot(xy) - (x+y)x}{(xy)^2} = -\dfrac{x^2}{(xy)^2} = \dfrac{-1}{x^2}.$

Con todo esto, reemplazamos para $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, obteniendo

$$\frac{\partial g}{\partial x} = yf(v) - \frac{uf'(v)}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = xf(v) - \frac{uf'(v)}{y^2}$$

Para concluir, basta que reemplacemos lo que tenemos en la parte izquierda de la ecuación planteada y llegar a lo que buscamos al lado derecho. Así:

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial g}{\partial x} - y^2\frac{\partial g}{\partial y} &= x^2\left(yf(v) - \frac{uf'(v)}{x^2}\right) - y^2\left(xf(v) - \frac{uf'(v)}{y^2}\right) \\ &= x^2yf(v) - uf'(v) - xy^2f(v) + uf'(v) \\ &= x^2yf(v) - xy^2f(v) \\ &= (x-y)xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right) \\ &= \underbrace{(x-y)}_{H(x,y)}g(x,y). \end{aligned}$$

de donde se concluye lo deseado.

P2. Considere la superficie definida por la ecuación $\ln(z) + (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$.

(a) Defina $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que el grafo de f coincida con la superficie antes mencionada.

(b) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie en cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Encuentre todos los puntos en que el plano tangente es paralelo al plano $z = 0$.

(c) Calcule las derivadas parciales de segundo orden de f y justifique si f es de clase $\mathcal{C}^2$.

Demostración:

(a): Despejando algebraicamente notamos que $z = e^{-(x-1)^2-(y-2)^2}$. Luego, definiendo $f(x,y) = e^{-(x-1)^2-(y-2)^2}$, tenemos que

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ln(z) + (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\} = \mathrm{Gr}(f).$$

(b): La ecuación general del plano tangente al grafo en un punto (x_0, y_0) se obtiene directamente como

$$\Pi_{(x_0,y_0)} : z = f(x_0,y_0) + \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

donde recordamos que en $\mathbb{R}^2$ el producto interno es $\langle w, z\rangle = w_1z_1 + w_2z_2$ y el gradiente es la función de dos variables que cumple:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Luego, basta calcular las derivadas parciales y reemplazar en la ecuación anterior:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2(x-1)e^{-(x-1)^2-(y-2)^2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(y-2)e^{-(x-1)^2-(y-2)^2}$

$$\Longrightarrow \Pi_{(x_0,y_0)} : z = e^{-(x_0-1)^2-(y_0-2)^2} - 2(x_0-1)e^{-(x_0-1)^2-(y_0-2)^2}(x-x_0) - 2(y_0-2)e^{-(x_0-1)^2-(y_0-2)^2}(y-y_0)$$

$$\Longrightarrow \Pi_{(x_0,y_0)} : z = e^{-(x_0-1)^2-(y_0-2)^2}(1 - 2(x_0-1)(x-x_0) - 2(y_0-2)(y-y_0))$$

Ahora, como para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ hemos encontrado un plano tangente al grafo en ese punto, tiene sentido preguntarse en cuáles de estos puntos el plano será paralelo a $z = 0$ (esto es el plano XY). Para que esto

suceda, es necesario que el plano tangente sea de la forma $z = cte \in \mathbb{R}$, por lo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ deben ser cero, pues así, en la ecuación del plano, z ya no dependerá de x ni de y.
Notamos que como $e^{-(x-1)^2-(y-2)^2} > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \iff -2(x_0 - 1) = 0 \iff x_0 = 1$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \iff -2(y_0 - 2) = 0 \iff y_0 = 2$

por lo que el único punto donde el plano es paralelo a $z = 0$ es $(1, 2)$.
(c): Como no hay puntos conflictivos, derivando nuevamente sin problemas y obtenemos:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2e^{-(x-1)^2-(y-2)^2} + 4(x-1)^2 e^{-(x-1)^2-(y-2)^2} = 2(2x-1)^2 e^{-(x-1)^2-(y-2)^2}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2e^{-(x-1)^2-(y-2)^2} + 4(y-2)^2 e^{-(x-1)^2-(y-2)^2} = 2(2(y-2)^2 - 1)e^{-(x-1)^2-(y-2)^2}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4(x-1)(y-2)e^{-(x-1)^2-(y-2)^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

y como las derivadas cruzadas son continuas, la función es de clase $\mathcal{C}^2$.

P3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Determine las derivadas parciales en cada punto de $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule el valor de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. ¿Qué sucedió?

Demostración:
Sabemos que en $(x, y) \neq (0, 0)$ la función no tiene puntos conflictivos, por lo que las derivadas parciales están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{(y(x^2 - y^2) + 2x^2 y)(x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Como $\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\dfrac{yx(y^2 - x^2)}{(y^2 + x^2)^2}$, podemos notar que la derivada parcial con respecto a y tendrá la misma forma que la calculada anteriormente intercambiando roles de x e y y multiplicando por -1, obteniendo entonces que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) + 4y^2 x^3}{(y^2 + x^2)^2}.$$

En el origen calculamos las derivadas parciales por definición (de derivada direccional):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(t, 0) - f(0, 0)) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

y análogamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(b): Veamos nuevamente por definición que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) := \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{(-t^5 - 0)}{t^4} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{-t^5}{t^5} = -1,
\end{aligned}
$$

y de la misma forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) := \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{(t^5 - 0)}{t^4} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{t^5} = 1.
\end{aligned}
$$

El ejercicio anterior es un ejemplo donde las derivadas cruzadas de segundo orden no son iguales (difieren al menos en (0,0)), por lo que el Teorema de Schwartz nos asegura que f no puede ser de clase $\mathcal{C}^2$.